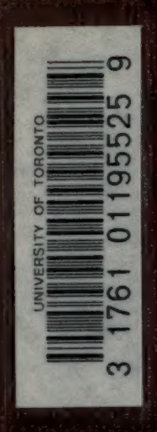

UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01195525 9

Cours de la Faculté des Sciences de l'Université Libre de Bruxelles

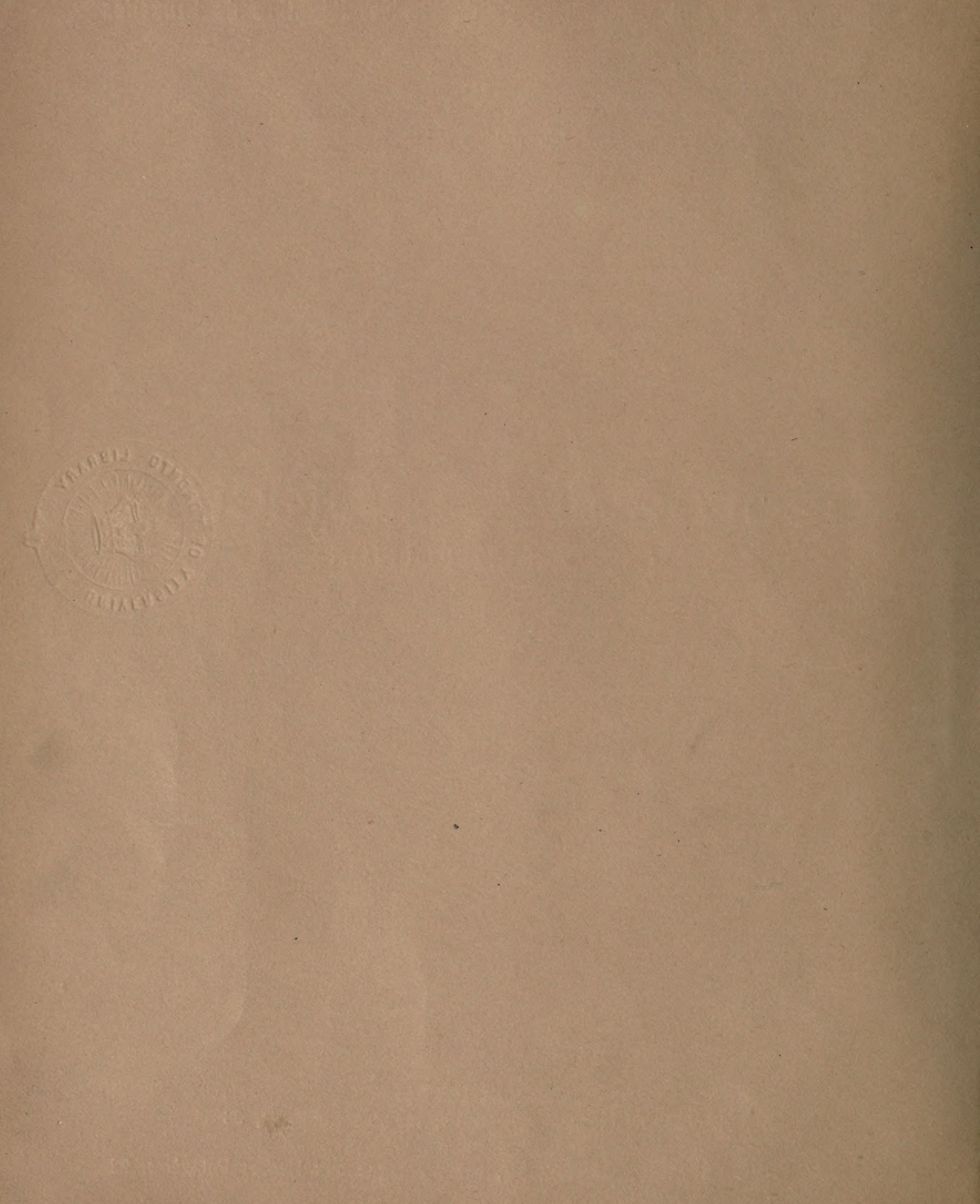
AD. MINEUR



Géométrie Projective
(NOUVELLE ÉDITION)

I

BRUXELLES
J. VAN DIJL, Libraire-Editeur, rue des Etudiants, 38
ET
ANCIENNE LIBRAIRIE CASTAIGNE, rue Montagne aux Herbes Potagères, 22



Cours de la Faculté des Sciences de l'Université Libre de Bruxelles

AD. MINEUR



Géométrie Projective

(NOUVELLE ÉDITION)

I

BRUXELLES
J. VAN DIJL, LIBRAIRE-EDITEUR, rue des Etudiants, 38
ET
ANCIENNE LIBRAIRIE CASTAIGNE, rue Montagne aux Herbes Potagères, 22

Préliminaires. — 1. Les figures considérées en géométrie projective prennent le nom de formes géométriques. Chacune d'elles est, au moins d'une manière, le lieu des positions d'un élément mobile et on dit qu'une forme géométrique est de n^e espèce si elle est le lieu d'un élément dont chaque position ne peut être déterminée que par les valeurs correspondantes de n paramètres ou coordonnées. — Certaines formes géométriques sont dites fondamentales. — Les formes fondamentales de première espèce sont la ponctuelle (ou division), la feuillée (ou faisceau de plans) et le faisceau (ou faisceau de droites). Une ponctuelle est l'ensemble des points situés sur une droite appelée le support de la ponctuelle (ou la base de la division). Une feuillée est l'ensemble des plans, les feuillets, passant par une droite appelée le support de la feuillée (ou l'axe du faisceau de plans). Un faisceau est l'ensemble des droites, les rayons, situés dans un plan et passant par un point appelé le support du faisceau (ou le sommet ou le centre du faisceau de droites). — Les formes fondamentales de seconde espèce sont le système plan et la gerbe. Un système plan est l'ensemble des points ou des droites d'un plan appelé le support du système plan. Une gerbe est l'ensemble des droites et des plans passant par un point appelé le support de la gerbe. La seule forme fondamentale de troisième espèce est l'espace à trois dimensions considéré comme lieu de points ou comme lieu de plans. Quand un système plan est considéré comme lieu de points, chacune de ses droites est le support d'une ponctuelle, tandis que si on le considère comme lieu de droites, chacun de ses points est le support d'un faisceau. De même, chaque plan d'une gerbe est le support d'un faisceau et chacune des droites de la gerbe est le support d'une feuillée, suivant qu'on considère la gerbe comme lieu de droites ou comme lieu de plans. — Dans l'espace considéré comme lieu de points, chaque plan est le support d'un système plan lieu de points et chaque droite est le support d'une ponctuelle; dans l'espace considéré comme lieu de plans, chaque point est le support d'une gerbe lieu de plans et chaque droite est le support d'une feuillée.

2. — La géométrie projective établit entre les éléments des formes géométriques de même espèce des relations telles qu'il est possible de prendre les coordonnées dans chacune de ces formes pour que les valeurs numériques des coordonnées des éléments correspondants soient égales. De pareilles coordonnées sont dites projectives; leur étude dans les formes fondamentales de première, de seconde et de troisième espèce fait l'objet de cette partie du cours. On rappellera d'abord ce qui a été dit des coordonnées homogènes dans le cours de géométrie analytique; c'est à l'aide de ces coordonnées qu'on développera ensuite la théorie générale des coordonnées projectives et on montrera que les coordonnées homogènes sont un cas particulier des coordonnées projectives. —

Chapitre I : Les Coordonnées homogènes.

§ I : Les coordonnées homogènes du point.

3. **Point réel à distance finie.** — 1° Étant donnés le trièdre $Oxyz$ et trois nombres réels x, y, z, il existe un point A dont les nombres x, y, z sont les coordonnées dans le trièdre $Oxyz$; on dit que le point A est un point réel à distance finie et que les nombres

$$A_1 = kx, \qquad A_2 = ky, \qquad A_3 = kz, \qquad A_4 = k$$

sont ses coordonnées homogènes dans le trièdre $Oxyz$, quelle que soit la valeur différente de zéro du nombre k.

2° On a

$$x = \frac{A_1}{A_4}, \qquad y = \frac{A_2}{A_4}, \qquad z = \frac{A_3}{A_4}.$$

Donc, dès qu'on s'est donné le trièdre $Oxyz$, quatre nombres A_1, A_2, A_3, A_4 dont le quatrième A_4 n'est pas nul et dont les rapports mutuels $A_1 : A_2 : A_3 : A_4$ sont réels, sont les coordonnées homogènes d'un point bien déterminé A.

3° Si A_1, A_2, A_3, A_4 et B_1, B_2, B_3, B_4 sont les coordonnées homogènes de deux points A, B dans le même trièdre, ces points sont distincts ou confondus suivant qu'on a

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ ou } = 0.$$

4° Il existe entre les coordonnées x, y, z et x', y', z' d'un même point dans deux trièdres $Oxyz$, $O'x'y'z'$ des relations telles que

$$\begin{aligned} x &= a_1 x' + a_2 y' + a_3 z' + a_4, \\ y &= b_1 x' + b_2 y' + b_3 z' + b_4, \\ z &= c_1 x' + c_2 y' + c_3 z' + c_4 \end{aligned}$$

et on sait que le déterminant $| a_1 \quad b_2 \quad c_3 |$ n'est pas nul.
En introduisant les coordonnées homogènes X_i, X'_i, ces relations deviennent

$$X_1 : X_4 = (a_1 X'_1 + a_2 X'_2 + a_3 X'_3 + a_4 X'_4) : X'_4, \ldots\ldots\ldots$$

Les formules de transformation entre coordonnées homogènes peuvent donc s'écrire

$$\begin{aligned} X_1 &= a_{11} X'_1 + a_{12} X'_2 + a_{13} X'_3 + a_{14} X'_4, \\ X_2 &= a_{21} X'_1 + a_{22} X'_2 + a_{23} X'_3 + a_{24} X'_4, \\ X_3 &= a_{31} X'_1 + a_{32} X'_2 + a_{33} X'_3 + a_{34} X'_4, \\ X_4 &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_{44} X'_4 \end{aligned} \qquad (X)$$

et on a

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} \neq 0.$$

4.- *Point réel à l'infini.* 1° Soient $Oxyz$ le trièdre coordonné et A_1, A_2, A_3 trois nombres dont un au moins n'est pas nul et dont les rapports sont réels. Les quatre nombres $A_1, A_2, A_3, 0$ ne sont les coordonnées d'aucun des points réels considérés dans le numéro précédent. On convient de dire qu'ils sont les coordonnées homogènes dans le trièdre $Oxyz$ d'un point réel A situé ou rejeté à l'infini. On dit aussi que le point A est un point impropre, par opposition aux points réels à distance finie qu'on appelle les points propres de l'espace.
2° Si $A(A_1, A_2, A_3, 0)$ et $B(B_1, B_2, B_3, 0)$ sont deux points impropres rapportés au même trièdre coordonné, on les considère comme distincts ou confondus suivant qu'on a

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & 0 \\ B_1 & B_2 & B_3 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ ou } = 0.$$

3° On convient d'appliquer les formules (X) du numéro précédent aux points impropres. Il en résulte que les conditions

$$X_4 = 0 \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & 0 \\ B_1 & B_2 & B_3 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ ou } = 0$$

sont équivalentes aux conditions

$$X'_4 = 0 \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} A'_1 & A'_2 & A'_3 & 0 \\ B'_1 & B'_2 & B'_3 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ ou } = 0$$

et qu'ainsi les définitions 1° et 2° sont indépendantes du trièdre coordonné.

5.- *Point imaginaire.* - 1° Soient A_1, A_2, A_3, A_4 quatre nombres dont deux au moins ne sont pas nuls et dont les rapports ne sont pas tous réels, et $Oxyz$ le trièdre coordonné. On dit que ces quatre nombres sont les coordonnées homogènes dans le trièdre $Oxyz$ d'un point imaginaire A qui est propre ou im-

propre selon qu'on a $A_4 \neq 0$ ou $A_4 = 0$.
2° Si $A(A_1, A_2, A_3, A_4)$, $B(B_1, B_2, B_3, B_4)$ sont des points rapportés au même trièdre coordonné et dont un au moins est imaginaire, on les considère comme distincts ou confondus suivant qu'on a

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ ou } = 0.$$

3° Les points imaginaires $A(A_1, A_2, A_3, A_4)$, $B(B_1, B_2, B_3, B_4)$ sont dits imaginaires conjugués lorsque les rapports de leurs coordonnées $A_1 : A_2 : A_3 : A_4$, $B_1 : B_2 : B_3 : B_4$ ont des valeurs imaginaires conjuguées.
4° On convient d'appliquer les formules (X) du numéro 3 aux points imaginaires et ainsi les définitions précédentes sont également indépendantes du trièdre coordonné.

§ II : Les coordonnées homogènes du plan.

6. **Plan réel à distance finie.** 1° Soient $Oxyz$ un trièdre coordonné et $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ quatre nombres dont les rapports sont réels et dont un au moins des trois premiers n'est pas nul. Le lieu des points réels à distance finie dont les coordonnées cartésiennes vérifient l'équation

$$\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \alpha_4 = 0,$$

est un plan α; on dit que ce plan est un plan réel à distance finie ayant les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ pour coordonnées homogènes.
Quand on passe des coordonnées cartésiennes x, y, z du point courant aux coordonnées homogènes X_1, X_2, X_3, X_4 du même point, l'équation précédente du plan α devient

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 + \alpha_4 X_4 = 0 .$$

2° On sait que les plans réels à distance finie

$$\alpha \equiv \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 + \alpha_4 X_4 = 0, \qquad \beta \equiv \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_4 X_4 = 0$$

rapportés au même trièdre coordonné sont distincts ou confondus suivant qu'on a

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ ou } = 0.$$

3° Quand on applique les formules (X) du numéro 3 à l'équation

$$\xi_1 X_1 + \xi_2 X_2 + \xi_3 X_3 + \xi_4 X_4 = 0,$$

cette équation se transforme en

$$\xi'_1 X'_1 + \xi'_2 X'_2 + \xi'_3 X'_3 + \xi'_4 X'_4 = 0$$

et on a les formules

$$\begin{aligned} \xi'_1 &= a_{11}\xi_1 + a_{21}\xi_2 + a_{31}\xi_3 , \\ \xi'_2 &= a_{12}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + a_{32}\xi_3 , \\ \xi'_3 &= a_{13}\xi_1 + a_{23}\xi_2 + a_{33}\xi_3 , \\ \xi_4 &= a_{14}\xi_1 + a_{24}\xi_2 + a_{34}\xi_3 + a_{44}\xi_4 . \end{aligned} \qquad (\xi)$$

Grâce à ces formules, les conditions

$$|\xi_1| + |\xi_2| + |\xi_3| \neq 0 \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ ou } = 0$$

sont équivalentes aux conditions

$$|\xi'_1| + |\xi'_2| + |\xi'_3| \neq 0 \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} \alpha'_1 & \alpha'_2 & \alpha'_3 & \alpha'_4 \\ \beta'_1 & \beta'_2 & \beta'_3 & \beta'_4 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ ou } = 0.$$

La définition et la propriété énoncées au 1° et au 2° sont donc indépendantes du choix du trièdre coordonné et les formules (ξ) servent à passer des coordonnées homogènes d'un plan dans un trièdre aux coordonnées homogènes du même plan dans un autre trièdre.

4° Notation. Pour simplifier les écritures, on pose

$$\xi_X = \xi_1 X_1 + \xi_2 X_2 + \xi_3 X_3 + \xi_4 X_4 .$$

5° Double interprétation de l'équation $\xi_X = 0$. Cette équation exprime que le point X est dans le plan ξ et on peut l'interpréter de deux façons différentes, pourvu que les éléments considérés ne soient encore que des éléments réels à distance finie.

1) Si les coordonnées ξ_i sont constantes et les coordonnées X_i variables, l'équation définit l'ensemble des points X situés dans le plan ξ et on l'appelle l'équation du plan ξ.

2) Si les coordonnées X_i sont constantes et les coordonnées ξ_i variables, l'équation définit l'ensemble des plans ξ passant par le point X et on l'appelle l'équation du point X.

7. Plan réel à l'infini. – 1° Soient $Oxyz$ le trièdre coordonné et α_4 un nombre réel quelconque. Les quatre nombres $0, 0, 0, \alpha_4$ ne sont les coordonnées d'aucun des plans réels considérés dans le numéro précédent. On convient de dire qu'ils sont les coordonnées homogènes d'un plan α situé ou rejeté à l'infini. On dit aussi que le plan α est un plan réel impropre par opposition aux plans réels à distance finie qu'on appelle les plans propres de l'espace.

2° Si $\alpha(0,0,0,\alpha_4)$, $\beta(0,0,0,\beta_4)$ sont deux plans réels impropres rapportés au même trièdre, on a

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_4 \end{vmatrix} = 0$$

et on dit que les plans α, β sont confondus. Il n'y a donc qu'un seul plan réel à l'infini dans le trièdre $Oxyz$.

3° On convient d'appliquer les formules (ξ) au plan réel à l'infini défini dans le trièdre $Oxyz$; on trouve ainsi

$$\xi'_1 = 0, \qquad \xi'_2 = 0, \qquad \xi'_3 = 0, \qquad \xi'_4 \neq 0$$

et ξ'_4 a une valeur réelle. La définition du plan réel à l'infini est donc indépendante du choix du trièdre coordonné.

8. Plan imaginaire. – 1° Soient $Oxyz$ le trièdre coordonné et $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ quatre nombres dont deux au moins ne sont pas nuls et dont les rapports ne sont pas tous réels. On dit que ces quatre nombres sont les coordonnées homogènes d'un plan imaginaire α propre ou impropre suivant qu'on a

$$|\alpha_1| + |\alpha_2| + |\alpha_3| \neq 0 \text{ ou } = 0$$

2° Si $\alpha(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, $\beta(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ sont des plans rapportés à un même trièdre et dont un au moins est imaginaire, on les considère comme distincts ou confondus, selon qu'on a

$$\begin{Vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{Vmatrix} \neq 0 \text{ ou } = 0 .$$

Or, que α_4 et β_4 soient réels ou imaginaires, on a toujours

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_4 \end{Vmatrix} = 0,$$

on dira donc que les plans impropres sont confondus en un seul, et ce seul plan impropre est appelé le plan de l'infini dans le trièdre coordonné considéré.

3° Les plans imaginaires $\alpha(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, $\beta(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ sont dits imaginaires conjugués lorsque les rapports de leurs coordonnées $\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \alpha_4$, $\beta_1 : \beta_2 : \beta_3 : \beta_4$ ont des valeurs imaginaires

conjuguées.

4° On convient d'appliquer les formules (ξ) du numéro 6 aux plans imaginaires et ainsi les définitions précédentes sont encore indépendantes du choix du trièdre coordonné.

9. 1° **Définition.** On dit que le point X est dans le plan ξ quand, les coordonnées étant évaluées dans un même trièdre, on a identiquement

$$\xi_1 X_1 + \xi_2 X_2 + \xi_3 X_3 + \xi_4 X_4 = 0 \quad \text{ou} \quad \xi_X = 0.$$

2° **Corollaires.** 1) Cette définition est indépendante du choix du trièdre coordonné.
En effet, il a été admis qu'on appliquerait les formules (X) et (ξ) des numéros 3 et 6 à des points et à des plans quelconques. Dès lors, si X_i et X'_i, ξ_i et ξ'_i sont les coordonnées d'un point et d'un plan dans les deux trièdres $Oxyz$, $O'x'y'z'$, on a identiquement.

$$\xi_1 X_1 + \xi_2 X_2 + \xi_3 X_3 + \xi_4 X_4 = \xi'_1 X'_1 + \xi'_2 X'_2 + \xi'_3 X'_3 + \xi'_4 X'_4 \quad \text{ou} \quad \xi_X = \xi'_{X'}.$$

Les conditions $\xi_X = 0$, $\xi'_{X'} = 0$ sont donc équivalentes.
2) La double interprétation de l'équation $\xi_X = 0$ (n° 6, 5°) est applicable à des éléments quelconques.
3) Le plan de l'infini est le lieu des points impropres réels ou imaginaires.
Les coordonnées du plan de l'infini sont $0, 0, 0, \xi_4 \neq 0$. Pour que le point X (X_1, X_2, X_3, X_4) soit dans ce plan, il faut et il suffit qu'on ait

$$0.X_1 + 0.X_2 + 0.X_3 + \xi_4.X_4 = 0 \quad \text{ou} \quad X_4 = 0,$$

c'est à dire que le point X soit un point impropre.

10. **Notation.** On représente les déterminants

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ D_1 & D_2 & D_3 & D_4 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 \end{vmatrix}$$

par les notations

$$|A \quad B \quad C \quad D| \quad \text{et} \quad |\alpha \quad \beta \quad \gamma \quad \delta|.$$

on désigne les mineurs des éléments $A_1, A_2, A_3, A_4, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ dans les deux déterminants par les notations $|BCD|_i$, $|\beta\gamma\delta|_i$, où on fait successivement $i = 1, 2, 3, 4$.

11. **Théorèmes.**

1° Pour qu'il y ait au moins un plan passant à la fois par les quatre points A, B, C, D, il faut et il suffit que les coordonnées homogènes de ces points rapportés à un même trièdre vérifient la condition.

$$|A \quad B \quad C \quad D| = 0$$

2° Pour qu'il y ait au moins un point situé à la fois dans les quatre plans $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, il faut et il suffit que les coordonnées homogènes de ces plans rapportés à un même trièdre vérifient la condition.

$$|\alpha \quad \beta \quad \gamma \quad \delta| = 0.$$

Il suffit de démontrer le 1°. Pour qu'il existe au moins un plan passant à la fois par les quatre points A, B, C, D, il faut et il suffit que le système des quatre équations

$$\begin{aligned} \xi_1 A_1 + \xi_2 A_2 + \xi_3 A_3 + \xi_4 A_4 &= 0, \\ \xi_1 B_1 + \xi_2 B_2 + \xi_3 B_3 + \xi_4 B_4 &= 0, \\ \xi_1 C_1 + \xi_2 C_2 + \xi_3 C_3 + \xi_4 C_4 &= 0, \\ \xi_1 D_1 + \xi_2 D_2 + \xi_3 D_3 + \xi_4 D_4 &= 0 \end{aligned}$$

admette une solution différente de $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = 0$; et pour cela, il faut et il suffit que le déterminant $|ABCD|$ soit nul.

§ III : Les coordonnées homogènes de la droite.

12. 1° **Les deux définitions de la droite.** – Puisqu'on a généralisé les définitions du point et du plan, il faut généraliser la définition de la droite. On peut le faire de deux manières, mais on démontre qu'elles sont concordantes.

1) L'ensemble des points qui appartiennent à deux plans distincts ξ, η forme une ponctuelle que l'on désigne en disant qu'elle a la droite $\xi\eta$ comme support; on dit que cette droite est l'intersection des plans ξ, η.

2) L'ensemble des plans qui passent par deux points distincts X, Y forme une feuillée que l'on désigne en disant qu'elle a la droite XY comme support; on dit que cette droite joint le point X au point Y.

Il résulte de ce qu'on a dit précédemment (n° 9, 2°, 1) que ces définitions sont indépendantes du trièdre coordonné.

2° **Théorèmes.**

1° Si les points X, Y appartiennent à la ponctuelle $\xi\eta$, pour qu'un troisième point Z appartienne à cette ponctuelle, il faut et il suffit qu'on ait

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 & Z_4 \end{vmatrix} = 0.$$

2° Si les plans ξ, η appartiennent à la feuillée XY, pour qu'un troisième plan ζ appartienne à cette feuillée, il faut et il suffit qu'on ait

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 & \zeta_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Il suffit de démontrer le premier théorème. a. – Condition nécessaire. Si les points X, Y, Z appartiennent à la ponctuelle $\xi\eta$, on a identiquement

$$\begin{aligned} \xi_1 X_1 + \xi_2 X_2 + \xi_3 X_3 + \xi_4 X_4 &= 0, \\ \xi_1 Y_1 + \xi_2 Y_2 + \xi_3 Y_3 + \xi_4 Y_4 &= 0, \\ \xi_1 Z_1 + \xi_2 Z_2 + \xi_3 Z_3 + \xi_4 Z_4 &= 0, \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} \eta_1 X_1 + \eta_2 X_2 + \eta_3 X_3 + \eta_4 X_4 &= 0, \\ \eta_1 Y_1 + \eta_2 Y_2 + \eta_3 Y_3 + \eta_4 Y_4 &= 0, \\ \eta_1 Z_1 + \eta_2 Z_2 + \eta_3 Z_3 + \eta_4 Z_4 &= 0. \end{aligned}$$

Dès lors, si la condition (1) n'était pas remplie, on aurait à la fois

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \xi_4 = |XYZ|_1 : |XYZ|_2 : |XYZ|_3 : |XYZ|_4 ,$$

$$\eta_1 : \eta_2 : \eta_3 : \eta_4 = |XYZ|_1 : |XYZ|_2 : |XYZ|_3 : |XYZ|_4 ,$$

d'où on déduirait

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \xi_4 = \eta_1 : \eta_2 : \eta_3 : \eta_4 ;$$

les deux plans seraient confondus, ce qui est contraire à l'hypothèse.

b. – Condition suffisante. Si la condition (1) est remplie, les points X, Y, Z étant distincts, il existe des nombres Z'_1, Z'_2 dont les valeurs sont finies, déterminées et différentes de zéro, pour lesquelles on a identiquement

$$Z_1 = Z'_1 X_1 + Z'_2 Y_1, \qquad Z_2 = Z'_1 X_2 + Z'_2 Y_2, \qquad Z_3 = Z'_1 X_3 + Z'_2 Y_3, \qquad Z_4 = Z'_1 X_4 + Z'_2 Y_4 .$$

Mais le point X, Y appartenant à la ponctuelle $\xi\eta$, on a

$$\begin{aligned} \xi_1 X_1 + \xi_2 X_2 + \xi_3 X_3 + \xi_4 X_4 &= 0, \\ \xi_1 Y_1 + \xi_2 Y_2 + \xi_3 Y_3 + \xi_4 Y_4 &= 0, \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} \eta_1 X_1 + \eta_2 X_2 + \eta_3 X_3 + \eta_4 X_4 &= 0, \\ \eta_1 Y_1 + \eta_2 Y_2 + \eta_3 Y_3 + \eta_4 Y_4 &= 0. \end{aligned}$$

On a donc aussi

$$\xi_1 Z_1 + \xi_2 Z_2 + \xi_3 Z_3 + \xi_4 Z_4 = 0 \qquad \text{et} \qquad \eta_1 Z_1 + \eta_2 Z_2 + \eta_3 Z_3 + \eta_4 Z_4 = 0,$$

et le point Z appartient à la ponctuelle $\xi\eta$.

3° **Corollaires**

1) Tout plan ζ qui passe par deux points de la ponctuelle $\xi\eta$ passe par tous les points de cette ponctuelle.

2) Tout point Z qui est dans deux plans de la feuillée XY est dans tous les plans de cette feuillée.

Il suffit de démontrer le premier corollaire. Or il résulte du calcul précédent qu'ayant

$$\zeta_1 X_1 + \zeta_2 X_2 + \zeta_3 X_3 + \zeta_4 X_4 = 0 \qquad \text{et} \qquad \zeta_1 Y_1 + \zeta_2 Y_2 + \zeta_3 Y_3 + \zeta_4 Y_4 = 0,$$

on a aussi

$$\zeta_1 Z_1 + \zeta_2 Z_2 + \zeta_3 Z_3 + \zeta_4 Z_4 = 0.$$

4° Concordance des deux définitions. Une droite peut donc être définie comme le support d'une ponctuelle ou comme le support d'une feuillée. Dans le premier cas, elle est déterminée par l'ensemble des points appartenant à deux plans et on dit qu'elle est l'intersection de ces plans. Dans le second cas, elle est déterminée par l'ensemble des plans passant par deux points et on dit qu'elle joint ces points. Mais il résulte des propriétés qu'on vient de démontrer que si les deux plans définissant une droite comme support d'une ponctuelle passent par les deux points définissant une droite comme support d'une feuillée, les deux droites n'en font qu'une; les deux définitions sont donc concordantes.

5° Remarque. De la démonstration faite au 2°(b), il résulte que les équations générales des points situés sur la droite définie par les points X, Y et des plans passant par la droite définie par les plans ξ, η sont

$$Z'_1 \xi_X + Z'_2 \xi_Y = 0 \qquad \text{et} \qquad \zeta'_1 \xi_X + \zeta'_2 \eta_X = 0.$$

13. 1° Théorèmes.

1) Lorsque les trois points X, Y, Z ne sont pas en ligne droite, ils déterminent un plan dont les coordonnées sont

$$|XYZ|_1, \ |XYZ|_2, \ |XYZ|_3, \ |XYZ|_4.$$

2) Lorsque les trois plans ξ, η, ζ ne passent pas par une droite, ils déterminent un point dont les coordonnées sont

$$|\xi\eta\zeta|_1, \ |\xi\eta\zeta|_2, \ |\xi\eta\zeta|_3, \ |\xi\eta\zeta|_4.$$

Il suffit de démontrer le premier théorème. Les trois points X, Y, Z n'étant pas en ligne droite, on a

$$\begin{Vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 & Z_4 \end{Vmatrix} \neq 0$$

Les équations

$$\begin{aligned} \xi_1 X_1 + \xi_2 X_2 + \xi_3 X_3 + \xi_4 X_4 &= 0, \\ \xi_1 Y_1 + \xi_2 Y_2 + \xi_3 Y_3 + \xi_4 Y_4 &= 0, \\ \xi_1 Z_1 + \xi_2 Z_2 + \xi_3 Z_3 + \xi_4 Y_4 &= 0 \end{aligned}$$

admettent donc la seule solution

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \xi_4 = |XYZ|_1 : |XYZ|_2 : |XYZ|_3 : |XYZ|_4 .$$

2° Corollaires.

1) Deux droites qui ont un point commun sont dans un même plan.

2) Deux droites qui sont dans un même plan ont un point commun.

3) Une droite et un point extérieur à cette droite déterminent un plan.

4) Une droite et un plan qui ne passe pas par cette droite ont un point commun.

3° Droites parallèles. On dit que des droites sont parallèles quand elles passent par un même point impropre.

4° Droite et plan parallèles. Quand le point commun à une droite et un plan est un point impropre, on dit que la droite et le plan sont parallèles.

14. Classification des droites en droites propres et droites impropres. 1° Droite propre ou située à distance finie. 1) Soient

$$(1) \qquad \begin{aligned} \xi_X = 0 \quad &\text{ou} \quad \xi_1 X_1 + \xi_2 X_2 + \xi_3 X_3 + \xi_4 X_4 = 0, \\ \eta_X = 0 \quad &\text{ou} \quad \eta_1 X_1 + \eta_2 X_2 + \eta_3 X_3 + \eta_4 X_4 = 0 \end{aligned}$$

les équations des plans ξ, η dans un même trièdre coordonné $Oxyz$. Les deux plans étant distincts, on a

$$(2) \qquad \begin{Vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \end{Vmatrix} \neq 0.$$

Si on a en outre

$$(3) \qquad \begin{Vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \end{Vmatrix} \neq 0,$$

les équations (1) n'ont qu'une solution

$$(4) \qquad x_1 : \begin{vmatrix} \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_2 & \eta_3 \end{vmatrix} = x_2 : \begin{vmatrix} \xi_3 & \xi_1 \\ \eta_3 & \eta_1 \end{vmatrix} = x_3 : \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{vmatrix} = x_4 : 0$$

pour laquelle $x_4 = 0$. La droite $\xi\eta$ ne contient qu'un seul point impropre, tous ses autres points sont des points propres et on dit que la droite est une droite propre ou située à distance finie.

2) L'équation générale des plans passant par la droite $\xi\eta$ est (nº 12, 5º)

$$(5) \qquad (\lambda_1'\xi_1 + \lambda_2'\eta_1)x_1 + (\lambda_1'\xi_2 + \lambda_2'\eta_2)x_2 + (\lambda_1'\xi_3 + \lambda_2'\eta_3)x_3 + (\lambda_1'\xi_4 + \lambda_2'\eta_4)x_4 = 0.$$

Il résulte de la condition (3) qu'il est impossible d'annuler en même temps les coefficients de x_1, x_2, x_3 de cette équation; tous les plans passant par une droite propre sont donc des plans propres.

3) Lorsque les plans ξ, η sont réels, les valeurs de x_1, x_2, x_3 dans les formules (4) sont précisément les nombres qu'on a appelés les coefficients coordonnés de la droite $\xi\eta$ dans le cours de géométrie analytique.

2º Droite impropre ou rejetée à l'infini. 1) Lorsque

$$(6) \qquad \begin{Vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \end{Vmatrix} = 0,$$

les équations (1) deviennent équivalentes si on y fait $x_4 = 0$; ces équations n'ont aucune solution pour laquelle x_4 soit différent de zéro; tous les points de la droite $\xi\eta$ sont des points impropres et on dit que cette droite est une droite impropre ou rejetée à l'infini.

2) En faisant

$$(7) \qquad \lambda_1' : \lambda_2' = -\eta_1 : \xi_1 = -\eta_2 : \xi_2 = -\eta_3 : \xi_3 \neq -\eta_4 : \xi_4,$$

l'équation (5) se réduit à l'équation

$$x_4 = 0$$

du plan de l'infini. Tous les autres plans passant par la droite $\xi\eta$ sont des plans propres; on dit que tous ces plans sont parallèles et la droite $\xi\eta$ s'appelle la droite de l'infini de chacun d'eux.

15. Classification des droites en droites réelles et droites imaginaires.

1º Théorèmes.

1) Toute droite qui contient deux points réels, en contient une infinité.

2) Quand il y a deux plans réels qui passent par une droite, il y en a une infinité.

Il suffit de démontrer le premier théorème. A cet effet, on considère la droite $\xi\eta$ intersection des plans

$$\xi \equiv \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0,$$
$$\eta \equiv \eta_1 x_1 + \eta_2 x_2 + \eta_3 x_3 + \eta_4 x_4 = 0.$$

Si les points $x(x_1, x_2, x_3, x_4)$, $y(y_1, y_2, y_3, y_4)$ sont deux points de cette droite, il en est de même du point z de coordonnées.

$$Z_1 = Z'_1 X_1 + Z'_2 Y_1, \qquad Z_2 = Z'_1 X_2 + Z'_2 Y_2, \qquad Z_3 = Z'_1 X_3 + Z'_2 Y_3, \qquad Z_4 = Z'_1 X_4 + Z'_2 Y_4,$$

quelles que soient les valeurs de Z'_1 et Z'_2.
Mais si les points X, Y sont réels, on peut supposer que leurs coordonnées $X_1, \ldots\ldots, Y_1, \ldots\ldots$ sont réelles et il suffira de donner des valeurs réelles à Z'_1 et Z'_2 pour que le point Z soit un point réel de la droite $\xi\eta$; le théorème est donc démontré, des valeurs différentes de $Z'_1 : Z'_2$ correspondent à des positions différentes du point Z.

3) *Quand une droite passe par deux points réels, elle est dans une infinité de plans réels.*

4) *Quand une droite est dans deux plans réels, elle passe par une infinité de points réels.*

Il suffit de démontrer le premier de ces théorèmes. Soient $X(X_1, X_2, X_3, X_4)$, $Y(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)$ deux points dont les coordonnées ont des valeurs réelles. Les deux points étant distincts, on a

$$\begin{Vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 \end{Vmatrix} \neq 0$$

et les équations

$$\xi_1 X_1 + \xi_2 X_2 + \xi_3 X_3 + \xi_4 X_4 = 0,$$
$$\xi_1 Y_1 + \xi_2 Y_2 + \xi_3 Y_3 + \xi_4 Y_4 = 0$$

admettent une infinité de solutions pour $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$. On peut calculer deux de ces quatre inconnues dès qu'on a donné des valeurs aux deux autres; il y a donc une infinité de solutions réelles distinctes, ce qui démontre le théorème, chaque solution réelle étant formée des coordonnées d'un plan réel passant par la droite XY.

2° Droite réelle.

1) Il résulte des théorèmes précédents qu'il n'y a pas de distinction à faire entre une droite définie par deux points réels et une droite définie par deux plans réels, dans les deux cas, la droite est dite réelle.

1) *L'intersection de deux plans imaginaires conjugués est une droite réelle.*

2) *La droite qui joint deux points imaginaires conjugués est une droite réelle.*

3) *Tout plan imaginaire passe par une droite réelle.*

4) *Tout point imaginaire est sur une droite réelle.*

3° Droite imaginaire.

1) *Toute droite qui n'est pas réelle est dite imaginaire.*

Les plans ξ', ξ'', η', η'' étant des plans réels, on considère les plans imaginaires ξ, η définis par les équations

(1) $\qquad \xi'_x + i\xi''_x = 0, \qquad \eta'_x + i\eta''_x = 0.$

Si les plans ξ', ξ'', η', η'' passent par la même droite, cette droite réelle est l'intersection $\xi\eta$ des plans imaginaires ξ, η.

Si les plans ξ', ξ'', η', η'' n'ont qu'un point réel commun, ce point est le seul point réel de la droite $\xi\eta$ et on dit que cette droite est une droite imaginaire de première espèce.

Si les plans ξ', ξ'', η', η'' sont les faces d'un tétraèdre, la droite $\xi\eta$ ne contient aucun point réel et on dit qu'elle est une droite imaginaire de seconde espèce.

Les points X', X'', Y', Y'' étant des points réels, on considère les points imaginaires X, Y définis par les équations

(2) $\qquad \xi_{X'} + i\xi_{X''} = 0, \qquad \xi_{Y'} + i\xi_{Y''} = 0.$

Si les points X', X'', Y', Y'' sont en ligne droite, cette droite réelle est la droite XY joignant les points imaginaires X, Y.

Si les points X', X'', Y', Y'' ne sont que dans un plan réel, ce plan est le seul plan réel contenant la droite XY et on dit que cette droite est une droite imaginaire de première espèce.

Si les points X', X'', Y', Y'' sont les sommets d'un tétraèdre, la droite XY n'est dans aucun plan réel et on dit qu'elle est une droite imaginaire de seconde espèce.

2) **Théorème.** *Toute droite imaginaire dite de première espèce comme contenant un point réel est aussi de première espèce comme située dans un plan réel, et réciproquement.*
Soient A le point réel de la droite imaginaire d ; B un point imaginaire de cette droite ; C le point imaginaire conjugué du point B ; d' la droite BC. Cette droite d' est réelle et différente de la droite imaginaire d ; elle ne passe donc pas par le point A et elle détermine un plan réel ξ avec ce point. La droite d ayant deux points A, B dans le plan ξ est entièrement dans ce plan ; de plus, le plan ξ est le seul plan réel passant par la droite d puisque cette droite est imaginaire ; il répond donc à la question.
La réciproque se démontre de la même manière.

16. **Transformation des coordonnées.** Ayant d'abord pris un trièdre coordonné réel, on a défini des points, des plans et des droites imaginaires, des points, un plan et des droites impropres ; on a admis que les formules de transformation des coordonnées établies pour des éléments réels rapportés à deux trièdres coordonnés réels s'appliqueraient aux éléments imaginaires ou impropres rapportés à ces trièdres ; il en a résulté que les définitions et les propriétés des éléments nouveaux considérés seuls ou avec des éléments réels et propres sont indépendantes du choix du trièdre coordonné pourvu que ce dernier soit réel. – On peut généraliser davantage l'emploi des formules de transformation des coordonnées. Trois droites quelconques, réelles ou imaginaires, issues d'un point propre réel ou imaginaire et non situées dans un même plan, sont considérées comme les arêtes d'un trièdre et les plans qu'elles déterminent deux à deux sont les faces de ce trièdre. On peut prendre un pareil trièdre pour trièdre coordonné et pour y arriver en partant du trièdre réel considéré d'abord, on convient encore d'employer les formules (X) ou (ξ) des numéros 3 et 6. On détermine les coefficients a_{ij} en appliquant ces formules aux points et aux plans qui servent à définir le nouveau trièdre par rapport au trièdre primitif, ou à d'autres points et d'autres plans dont on connaîtrait les coordonnées dans les deux trièdres. De cette manière, les éléments des figures conservent leurs positions relatives, la quatrième coordonnée d'un point impropre reste nulle et les trois premières coordonnées du plan de l'infini sont encore nulles ; mais la distinction entre les éléments réels ou imaginaires ne peut plus se déduire de ce que les coordonnées de ces éléments sont réelles ou imaginaires. – Dans tout trièdre coordonné, on adopte pour coordonnées cartésiennes d'un point quelconque les quotients des trois premières coordonnées homogènes du point par la quatrième. Lorsque le point est un point impropre, une au moins de ses coordonnées cartésiennes est infinie. Si les points A, B sont situés sur l'axe x, leur distance AB est, par définition, le nombre réel ou imaginaire

$$AB = \frac{B_1}{B_4} - \frac{A_1}{A_4};$$

Cette distance est infinie quand A_4 ou $B_4 = 0$; si A, B, C sont trois points quelconques de l'axe x,

$$AB + BC + CA = 0$$

et

$$\frac{AC}{CB} = -1$$

lorsque le point C est à l'infini.

17. **Coordonnées homogènes de la droite.**

1° Le trièdre coordonné étant un trièdre quelconque, on considère la droite d = ξη intersection des plans distincts ξ, η définis par les équations

2° Le trièdre coordonné étant un trièdre quelconque, on considère la droite d = XY joignant les points définis par les équations

(1) $\xi_1 X_1 + \xi_2 X_2 + \xi_3 X_3 + \xi_4 X_4 = 0,$ $\eta_1 X_1 + \eta_2 X_2 + \eta_3 X_3 + \eta_4 X_4 = 0,$

Les plans ξ, η étant distincts, on a

(3) $$\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \end{vmatrix} \neq 0$$

On désigne par h un nombre quelconque différent de zéro et on pose

(5) $$\delta_{ij} = h \begin{vmatrix} \xi_i & \xi_j \\ \eta_i & \eta_j \end{vmatrix}$$

de sorte que

(7) $$\delta_{ij} = -\delta_{ji}.$$

Les six nombres

(9) $$\delta_{12}, \delta_{13}, \delta_{14}, \delta_{34}, \delta_{42}, \delta_{23},$$

dont un au moins n'est pas nul s'appellent les coordonnées homogènes tangentielles de la droite d ou $\xi\eta$.

On a identiquement

(11) $$\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \end{vmatrix} = 0$$

et les six coordonnées δ_{ij} de toute droite vérifient l'équation

(13) $$\delta_{12}\delta_{34} + \delta_{13}\delta_{42} + \delta_{14}\delta_{23} = 0$$

(2) $\xi_1 X_1 + \xi_2 X_2 + \xi_3 X_3 + \xi_4 X_4 = 0,$ $\xi_1 Y_1 + \xi_2 Y_2 + \xi_3 Y_3 + \xi_4 Y_4 = 0.$

Les points X, Y étant distincts, on a

(4) $$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 \end{vmatrix} \neq 0.$$

On désigne par h un nombre quelconque différent de zéro et on pose

(6) $$D_{ij} = h \begin{vmatrix} X_i & X_j \\ Y_i & Y_j \end{vmatrix}$$

de sorte que

(8) $$D_{ij} = -D_{ji}.$$

Les six nombres

(10) $$D_{12}, D_{13}, D_{14}, D_{34}, D_{42}, D_{23}$$

dont un au moins n'est pas nul, s'appellent les coordonnées homogènes ponctuelles de la droite d ou XY.

On a identiquement

(12) $$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 \\ X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 \end{vmatrix} = 0$$

et les six coordonnées D_{ij} de toute droite vérifient l'équation

(14) $$D_{12}D_{34} + D_{13}D_{42} + D_{14}D_{23} = 0.$$

3° **Théorème.** Si δ_{ij} et D_{ij} sont les coordonnées homogènes tangentielles et ponctuelles d'une même droite $d \equiv \xi\eta \equiv XY$ dans un même trièdre coordonné, on a

(15) $$\delta_{12} : \delta_{13} : \delta_{14} : \delta_{34} : \delta_{42} : \delta_{23} = D_{34} : D_{42} : D_{23} : D_{12} : D_{13} : D_{14}.$$

En effet, on a

$$\xi_1 X_1 + \xi_2 X_2 + \xi_3 X_3 + \xi_4 X_4 = 0, \quad \eta_1 X_1 + \eta_2 X_2 + \eta_3 X_3 + \eta_4 X_4 = 0$$

et

$$\xi_1 Y_1 + \xi_2 Y_2 + \xi_3 Y_3 + \xi_4 Y_4 = 0, \quad \eta_1 Y_1 + \eta_2 Y_2 + \eta_3 Y_3 + \eta_4 Y_4 = 0.$$

En éliminant des coordonnées X_i, Y_i de même indice, X_1 et Y_1 par exemple, entre ces deux systèmes d'équations, on trouve

$$\delta_{12} X_2 + \delta_{13} X_3 + \delta_{14} X_4 = 0,$$

$$\delta_{12} Y_2 + \delta_{13} Y_3 + \delta_{14} Y_4 = 0$$

et on déduit de là

$$\delta_{12} : \delta_{13} : \delta_{14} = D_{34} : D_{42} : D_{23},$$

ce qui démontre le théorème.

4° Corollaires. - La présence du facteur arbitraire k dans les formules (5) et (6), par lesquelles on a défini les coordonnées δ_{ij} et D_{ij}, permet de remplacer des valeurs d'abord adoptées pour ces coordonnées par d'autres proportionnelles. On peut donc énoncer les deux propriétés suivantes comme conséquences du théorème qu'on vient de démontrer.

1) Les rapports mutuels des coordonnées homogènes tangentielles d'une droite sont indépendants des plans menés par cette droite pour les calculer.

2) Les rapports mutuels des coordonnées homogènes ponctuelles d'une droite sont indépendants des points pris sur cette droite pour les calculer.

5° Théorèmes.

1) Etant donnés un trièdre coordonné et six nombres δ_{ij} vérifiant la relation

$$(1) \qquad \delta_{12}\delta_{34}+\delta_{13}\delta_{42}+\delta_{14}\delta_{23}=0,$$

être tous nuls, ces six nombres sont les coordonnées homogènes tangentielles d'une droite déterminée.

2) Etant donnés un trièdre coordonné et six nombres D_{ij} vérifiant la relation

$$(2) \qquad D_{12}D_{34}+D_{13}D_{42}+D_{14}D_{23}=0,$$

sans être tous nuls, ces six nombres sont les sans coordonnées homogènes ponctuelles d'une droite déterminée.

Il suffit de démontrer le premier théorème. On considère les quatre équations

$$(3) \qquad \begin{aligned} 0.X_1+\delta_{12}X_2+\delta_{13}X_3+\delta_{14}X_4&=0,\\ \delta_{21}X_1+0.X_2+\delta_{23}X_3+\delta_{24}X_4&=0,\\ \delta_{31}X_1+\delta_{32}X_2+0.X_3+\delta_{34}X_4&=0,\\ \delta_{41}X_1+\delta_{42}X_2+\delta_{43}X_3+0.X_4&=0.\end{aligned}$$

Un au moins des six nombres δ_{ij} n'étant pas nul, deux au moins de ces équations représentent des plans distincts; on va démontrer que l'intersection de ces deux plans est la droite dont il s'agit. Pour fixer les idées, supposons $\delta_{12}\neq 0$. Les deux premières équations sont distinctes et si on élimine entre elles la coordonnée X_3 ou la coordonnée X_4, on obtient, grâce à la relation (1), la troisième ou la quatrième équation ; celles-ci se réduisent donc à des identités ou représentent des plans passant par l'intersection d des plans représentés par les deux premières équations. D'autre part, les coordonnées homogènes tangentielles δ'_{ij} de la droite d, calculées à l'aide des éléments du tableau

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} 0 & \delta_{12} & \delta_{13} & \delta_{14}\\ \delta_{21} & 0 & \delta_{23} & \delta_{24}\end{vmatrix},$$

ont pour valeurs respectives

$$\begin{aligned} \delta'_{12}&=-\delta_{12}\delta_{21}=\delta_{12}\delta_{12},\\ \delta'_{13}&=-\delta_{13}\delta_{21}=\delta_{12}\delta_{13},\\ \delta'_{14}&=-\delta_{14}\delta_{21}=\delta_{12}\delta_{14},\\ \delta'_{34}&=\delta_{13}\delta_{24}-\delta_{14}\delta_{23}=-\delta_{13}\delta_{42}-\delta_{14}\delta_{23}=\delta_{12}\delta_{34} \text{ (à cause de (1))}\\ \delta'_{42}&=-\delta_{12}\delta_{24}=\delta_{12}\delta_{42},\\ \delta'_{23}&=\delta_{12}\delta_{23};\end{aligned}$$

elles sont égales aux six nombres donnés δ_{ij} multipliés par un même nombre δ_{12} qui n'est pas nul et leurs rapports mutuels sont égaux à ceux des six nombres donnés; le théorème est donc démontré.

6° Théorème. Pour que les droites a, b rapportées à un même trièdre coordonné soient dans un même plan ou passent par un même point, il faut et il suffit que leurs coordonnées vérifient l'une ou l'autre des relations équivalentes

(1) $$A_{12}B_{34}+A_{13}B_{42}+A_{14}B_{23}+A_{34}B_{12}+A_{42}B_{13}+A_{23}B_{14}=0,$$

(2) $$\alpha_{12}\beta_{34}+\alpha_{13}\beta_{42}+\alpha_{14}\beta_{23}+\alpha_{34}\beta_{12}+\alpha_{42}\beta_{13}+\alpha_{23}\beta_{14}=0.$$

Les deux relations sont équivalentes en vertu du théorème démontré ci-dessus au 3°. Il suffit donc de considérer la première. Soient X, Y deux points quelconques de la droite a; Z, T deux points quelconques de la droite b. Pour que les droites a, b soient dans un même plan, il faut et il suffit qu'il en soit ainsi des points X, Y, Z, T, ou bien, il faut et il suffit que

$$|X \quad Y \quad Z \quad T| = 0.$$

Mais, en appliquant le théorème de Laplace, aux mineurs du second ordre du déterminant écrit dans le premier membre, on trouve que cette condition se transforme en

$$(X_1Y_2-X_2Y_1)(Z_3T_4-Z_4T_3)+\cdots\cdots+\cdots\cdots=0,$$

et le théorème résulte de ce qu'on peut faire

$$X_1Y_2-X_2Y_1=A_{12},\cdots\cdots \quad \text{et} \quad Z_3T_4-Z_4T_3=B_{34},\cdots\cdots$$

7° Remarque. Soient $\overline{AB}$ un vecteur placé arbitrairement sur la droite d; x_1, y_1, z_1 et x_2, y_2, z_2 les coordonnées des points A, B dans un trièdre trirectangle positif $Oxyz$. Les coordonnées de la droite d au point o sont (voir le cours de géométrie vectorielle)

$$\overline{OC}=\overline{AB}=(x_2-x_1)\,\overline{1}_x+(y_2-y_1)\,\overline{1}_y+(z_2-z_1)\,\overline{1}_z \quad \text{et} \quad \overline{OD}=\mathcal{M}_o\,\overline{AB}=\begin{vmatrix}\overline{1}_x & \overline{1}_y & \overline{1}_z\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}.$$

Les coordonnées de la droite d dans le trièdre $Oxyz$ sont donc

$$X=x_2-x_1,\qquad Y=y_2-y_1,\qquad Z=z_2-z_1,$$
$$L=y_1z_2-z_1y_2,\qquad M=z_1x_2-x_1z_2,\qquad N=x_1y_2-y_1x_2.$$

Mais les coordonnées homogènes des points A, B sont $x_1, y_1, z_1, 1$ et $x_2, y_2, z_2, 1$ de sorte que les coordonnées homogènes ponctuelles dans le trièdre $Oxyz$ se tirent du tableau

$$\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\end{vmatrix}$$

et valent

$$D_{12}=x_1y_2-y_1x_2,\ D_{13}=x_1z_2-z_1x_2,\ D_{14}=x_1-x_2,\ D_{34}=z_1-z_2,\ D_{42}=y_2-y_1,\ D_{23}=y_1z_2-z_1y_2.$$

On voit ainsi que

$$D_{12}=N,\qquad D_{13}=-M,\qquad D_{14}=-X,\qquad D_{34}=-Z,\qquad D_{42}=Y,\qquad D_{23}=L$$

de sorte que les coordonnées d'une droite en géométrie vectorielle sont un cas particulier des coordonnées homogènes ponctuelles de cette droite.

Chapitre II: Les coordonnées binaires.

§ I: Les coordonnées binaires dans la ponctuelle et dans la feuillée.

18. Théorèmes:

1) Si A, B sont deux points distincts et X un point arbitraire de la ponctuelle x rapportée

2) Si α, β sont deux plans distincts et ξ un plan arbitraire de la feuillée x, rapportée à

à un trièdre coordonné quelconque, il existe des nombres X'_1, X'_2 tels qu'on ait

(X') $\quad X_i = X'_1 A_i + X'_2 B_i$,

pour $i = 1.2.3.4$, et

(1) $\quad |X'_1| + |X'_2| \neq 0.$

un trièdre coordonné quelconque, il existe des nombres ξ'_1, ξ'_2 tels qu'on ait

(ξ') $\quad \xi_i = \xi'_1 \alpha_i + \xi'_2 \beta_i$,

pour $i = 1.2.3.4$ et

(2) $\quad |\xi'_1| + |\xi'_2| \neq 0.$

Il suffit de démontrer le premier théorème. Soient L, M deux points pris arbitrairement en dehors de la droite x et $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ des nombres quelconques. On a identiquement, en n'écrivant que la diagonale principale du déterminant,

$$|A_1 \quad B_2 \quad X_3 \quad L_4 \quad \xi_M| = 0$$

ou

$$|BXLM|.\xi_A - |AXLM|.\xi_B + |ABLM|.\xi_X - |ABXM|.\xi_L + |ABXL|.\xi_M = 0.$$

Mais, par hypothèse,

$$|ABLM| \neq 0, \quad |ABXM| = 0, \quad |ABXL| = 0,$$

et l'identité se réduit à

$$|BXLM|.\xi_A - |AXLM|.\xi_B + |ABLM|.\xi_X = 0,$$

On en tire

$$\xi_X = X'_1 \xi_A + X'_2 \xi_B,$$

en posant

$$X'_1 = -\frac{|BXLM|}{|ABLM|}, \qquad X'_2 = \frac{|AXLM|}{|ABLM|} .$$

Les nombres $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ étant des nombres quelconques, on a donc déjà, pour $i = 1, 2, 3, 4$,

$$X_i = X'_1.A_i + X'_2 B_i.$$

D'autre part, les conditions

$$X'_1 = 0 \text{ ou } |BXLM| = 0, \qquad X'_2 = 0 \text{ ou } |AXLM| = 0$$

expriment que le point X coïncide avec le point B ou avec le point A ; elles ne peuvent pas exister simultanément et on a

$$|X'_1| + |X'_2| \neq 0,$$

ce qui achève de démontrer le théorème.

N.B. - Une autre démonstration du même théorème est donnée au n°12, 2°.

2° Réciproques.

1) Réciproquement, les formules (X') donnent les coordonnées homogènes d'un point de la ponctuelle x quelles que soient les valeurs des paramètres X'_1, X'_2 pourvu que la condition (1) soit remplie.

2) Réciproquement, les formules (ξ') donnent les coordonnées homogènes d'un plan de la feuillée x quelles que soient les valeurs des paramètres ξ'_1, ξ'_2, pourvu que la condition (2) soit remplie.

Les points A, B étant distincts, on a

$$\begin{Vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{Vmatrix} \neq 0.$$

Si les formules (X') donnaient

$$X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = 0,$$

On aurait donc

$$X'_1 = X'_2 = 0,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.
Les valeurs données pour X_1, X_2, X_3, X_4 par les formules (X') sont donc les coordonnées d'un point X et ce point est sur la droite AB, ce qui démontre le théorème, parce qu'on a

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \end{vmatrix} = 0.$$

3° Définitions.

1) Quand on remplace des valeurs données d'abord à X'_1, X'_2 dans les formules (X') par d'autres proportionnelles, les nombres X_1, X_2, X_3, X_4 varient dans le même rapport et le point X ne change pas. On considère tous les systèmes de valeurs proportionnelles de X'_1 et X'_2 correspondant à un même point X comme équivalents; on conserve n'importe lequel de ces systèmes et les valeurs de X'_1 et X'_2 ainsi adoptées s'appellent les coordonnées binaires du point X sur la ponctuelle x.
En faisant

$$X'_1 = 1 \text{ et } X'_2 = 0 \quad \text{ou} \quad X'_1 = 0 \text{ et } X'_2 = 1,$$

on a

$$X_1 = A_1, \quad X_2 = A_2, \quad X_3 = A_3, \quad X_4 = A_4$$

ou

$$X_1 = B_1, \quad X_2 = B_2, \quad X_3 = B_3, \quad X_4 = B_4$$

et le point X coïncide avec le point A ou le point B.
Lorsque

$$X'_1 = 1 \quad \text{et} \quad X'_2 = 1,$$

les formules (X') donnent, pour $i = 1, 2, 3, 4$, les coordonnées homogènes

$$C_i = A_i + B_i$$

d'un point C de la ponctuelle x. Le point est différent des points A, B; car, s'il était confondu avec le point A, on aurait

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ A_1 + B_1 & A_2 + B_2 & A_3 + B_3 & A_4 + B_4 \end{vmatrix} = 0$$

d'où

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{vmatrix} = 0$$

et les points A, B seraient confondus, ce qui est contraire à l'hypothèse.

3) Les points A, B, C sont appelés les points fondamentaux des coordonnées binaires sur la ponctuelle

2) Quand on remplace des valeurs données d'abord à ξ'_1, ξ'_2 dans les formules (ξ') par d'autres proportionnelles, les nombres $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ varient dans le même rapport et le plan ξ ne change pas. On considère tous les systèmes de valeurs proportionnelles de ξ'_1 et ξ'_2 correspondant à un même plan ξ comme équivalents; on conserve n'importe lequel de ces systèmes et les valeurs de ξ'_1 et ξ'_2 ainsi adoptées s'appellent les coordonnées binaires du plan ξ dans la feuillée x.
En faisant

$$\xi'_1 = 1 \text{ et } \xi'_2 = 0 \quad \text{ou} \quad \xi'_1 = 0 \text{ et } \xi'_2 = 1,$$

on a

$$\xi_1 = \alpha_1, \quad \xi_2 = \alpha_2, \quad \xi_3 = \alpha_3, \quad \xi_4 = \alpha_4$$

ou

$$\xi_1 = \beta_1, \quad \xi_2 = \beta_2, \quad \xi_3 = \beta_3, \quad \xi_4 = \beta_4$$

et le plan ξ coïncide avec le plan α ou le plan β.
Lorsque

$$\xi'_1 = 1 \quad \text{et} \quad \xi'_2 = 1,$$

les formules (ξ') donnent, pour $i = 1, 2, 3, 4$, les coordonnées homogènes

$$\gamma_i = \alpha_i + \beta_i$$

d'un plan γ de la feuillée x. Le plan est différent des plans α, β; car s'il était confondu avec le plan α, on aurait

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_1 + \beta_1 & \alpha_2 + \beta_2 & \alpha_3 + \beta_3 & \alpha_4 + \beta_4 \end{vmatrix} = 0$$

d'où

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{vmatrix} = 0$$

et les plans α, β seraient confondus, ce qui est contraire à l'hypothèse.

4) Les plans α, β, γ sont appelés les plans fondamentaux des coordonnées binaires dans la feuillée x.

elle x. Les points A, B ont été pris arbitrairement; mais il est facile de montrer qu'après avoir pris ces deux points comme on aura voulu, on peut fixer le choix de leurs coordonnées homogènes pour que le point C occupe également telle place qu'on voudra sur la ponctuelle x.

Les plans α, β ont été pris arbitrairement; mais il est facile de montrer qu'après avoir pris ces deux plans comme on aura voulu, on peut fixer le choix de leurs coordonnées homogènes pour que le plan γ occupe également telle place qu'on voudra dans la feuillée x.

Il suffit de faire la démonstration pour la ponctuelle x. Si A_1, A_2, A_3, A_4 et B_1, B_2, B_3, B_4 sont les coordonnées homogènes particulières des points A, B de la ponctuelle x, ceux-ci sont les deux premiers points fondamentaux des coordonnées binaires dès qu'on écrit

$$X_i = X'_1 k_1 A_i + X'_2 k_2 B_i,$$

pour $i = 1, 2, 3, 4$, quelles que soient les valeurs, toutes deux différentes de zéro, données à k_1 et k_2. Un troisième point C de la ponctuelle x, pour lequel on a adopté les coordonnées homogènes C_1, C_2, C_3, C_4 sera le troisième point fondamental de ces de ces coordonnées binaires, si on a, en outre,

$$C_i = k_1 A_i + k_2 B_i,$$

pour $i = 1, 2, 3, 4$, et on a ainsi un système de quatre équations linéaires, non homogènes, pour calculer k_1 et k_2. Les points A, B étant distincts, et les points ABC appartenant à la ponctuelle x, on a

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{vmatrix} = 0;$$

Le déterminant principal étant du second ordre et les déterminants caractéristiques étant nuls, le système à résoudre admet une solution et n'en admet qu'une seule. La propriété résulte alors de ce que cette solution est formée de valeurs de k_1 et k_2 différentes de zéro, car si on avait

$$k_1 = 0 \text{ et } k_2 = 0, \qquad k_1 \neq 0 \text{ et } k_2 = 0, \qquad k_1 = 0 \text{ et } k_2 \neq 0,$$

le point C n'existerait pas ou serait confondu avec l'un des points A, B.

4° Théorèmes.

3) Le rapport des coordonnées binaires X'_1, X'_2 du point X est indépendant de la position des points L, M pris en dehors de la ponctuelle x pour établir les formules (X').

4) Le rapport des coordonnées binaires ξ'_1, ξ'_2 du plan ξ est indépendant de la position des plans λ μ pris en dehors de la feuillée pour établir les formules (ξ').

Il suffit de démontrer le théorème de gauche. On a posé

$$X'_1 = -|B\,X\,L\,M| : |A\,B\,L\,M| \qquad \text{et} \qquad X'_2 = |A\,X\,L\,M| : |A\,B\,L\,M|.$$

On a donc

$$X'_1 : X'_2 = -\,|B\,X\,L\,M| : |A\,X\,L\,M|.$$

Mais si X_{ij} et Y_{ij} sont les coordonnées homogènes ponctuelles des droites x et $y \equiv LM$, il existe des nombres k, k', k'' dont le troisième n'est pas nul et dont les deux autres sont nuls ou différents de zéro comme X'_1 et X'_2, et pour lesquels on a

$$X_{ij} = k\,(A_i X_j - A_j X_i) = k'\,(B_i X_j - B_j X_i) \qquad \text{et} \qquad Y_{ij} = k''(L_i M_j - L_j M_i).$$

Dès lors,

$$|B\,X\,L\,M| = \frac{1}{k' k''}\,(X_{12} Y_{34} + \text{------}) \qquad \text{et} \qquad |A\,X\,L\,M| = \frac{1}{k k''}\,(X_{12} Y_{34} + \text{--------})$$

tandis qu'on a

$$X_{12}Y_{34}+X_{13}Y_{42}+X_{14}Y_{23}+X_{34}Y_{12}+X_{42}Y_{13}+X_{23}Y_{14}\neq 0\,;$$

il en résulte

$$X'_1 : X'_2 = -k : l'$$

et cette valeur de $X'_1 : X'_2$ ne dépend pas de la droite y ou des points L, M qui définissent cette droite.

5° Théorèmes.

1) Les coordonnées binaires X'_1, X'_2 du point X ne sont pas altérées par un changement du trièdre coordonné adopté pour établir les formules (X').

2) Les coordonnées binaires ξ'_1, ξ'_2 du plan ξ ne sont pas altérées par un changement du trièdre coordonné adopté pour établir les formules (ξ').

Il suffit de démontrer le premier théorème. Soient $X_{01}, X_{02}, X_{03}, X_{04}$ les coordonnées homogènes du point X dans un nouveau trièdre coordonné et liées aux premières par les formules

$$X_{0i} = a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + a_{i3}X_3 + a_{i4}X_4$$

pour $i = 1, 2, 3, 4$. Il résulte des formules (X') qu'on a

$$X_{0i} = X'_1\left(a_{i1}A_1 + a_{i2}A_2 + a_{i3}A_3 + a_{i4}A_4\right) + X'_2\left(a_{i1}B_1 + a_{i2}B_2 + a_{i3}B_3 + a_{i4}B_4\right)\,;$$

ou, ce qui démontre le théorème,

$$X_{0i} = X'_1 A_{0i} + X'_2 B_{0i}\,,$$

car

$$a_{i1}A_1 + a_{i2}A_2 + a_{i3}A_3 + a_{i4}A_4 = A_{0i} \qquad \text{et} \qquad a_{i1}B_1 + a_{i2}B_2 + a_{i3}B_3 + a_{i4}B_4 = B_{0i}.$$

6° Conclusion.

1) Trois points A, B, C pris arbitrairement sur une ponctuelle x définissent sur celle-ci un système de coordonnées binaires dont on dit qu'ils sont les éléments fondamentaux. Tout autre point X de la ponctuelle x est déterminé par le rapport de ses coordonnées binaires X'_1, X'_2 et ce rapport est ∞, 0, ou 1, lorsque le point X coïncide avec le point A, le point B, ou le point C. – On dit que les formules (X') fournissent une représentation paramétrique ou sont les équations paramétriques de la ponctuelle x.

2) Trois plans α, β, γ pris arbitrairement dans une feuillée x définissent dans celle-ci un système de coordonnées binaires dont on dit qu'ils sont les éléments fondamentaux. Tout autre plan ξ de la feuillée x est déterminé par le rapport de ses coordonnées binaires ξ'_1, ξ'_2 et ce rapport est ∞, 0, ou 1, lorsque le plan ξ coïncide avec le plan α, le plan β, ou le plan γ. – On dit que les formules (ξ') fournissent une représentation paramétrique ou sont les équations paramétriques de la feuillée x.

19. Du rapport anharmonique de quatre points d'une ponctuelle ou de quatre plans d'une feuillée.

1°. Définitions

1) La valeur du rapport anharmonique

$$(X, Y, Z, T) \text{ ou } \lambda\mu(\xi, \eta, \zeta, \tau)$$

des points X, Y, Z, T déterminés par les plans ξ, η, ζ, τ sur la ponctuelle ayant pour support la droite $d \equiv \lambda\mu$, est

$$\frac{|\xi\zeta\lambda\mu|}{|\xi\eta\lambda\mu|} : \frac{|\xi\tau\lambda\mu|}{|\tau\eta\lambda\mu|}\,,$$

les notations

$$|\xi\zeta\lambda\mu| \ldots\ldots$$

2) La valeur du rapport anharmonique

$$(\xi, \eta, \zeta, \tau) \text{ ou } LM(X, Y, Z, T)$$

des plans ξ, η, ζ, τ déterminés par les points X, Y, Z, T dans la feuillée ayant pour support la droite $d \equiv LM$, est

$$\frac{|XZLM|}{|ZYLM|} : \frac{|XTLM|}{|TYLM|}\,,$$

les notations

$$|XZLM| \ldots\ldots$$

désignant les déterminants des coordonnées homogènes des plans $\xi, \zeta, \lambda, \mu, \ldots$ dans un même trièdre coordonné.

désignant les déterminants des coordonnées homogènes des points X, Z, L, M, ... dans un même trièdre coordonné.

2° Théorèmes

1) La valeur du rapport anharmonique des points X, Y, Z, T, définie ci-dessus (1°, 1), est indépendante du trièdre coordonné.

2) La valeur du rapport anharmonique des plans ξ, η, ζ, τ, définie ci-dessus (1°, 2) est indépendante du trièdre coordonné.

Il suffit de démontrer le premier théorème. Soient $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ et $\xi_{01}, \xi_{02}, \xi_{03}, \xi_{04}$ les coordonnées homogènes du point X dans deux trièdres coordonnés et liées entre elles par les formules

$$\xi_{01} = a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + a_{13}\xi_3, \ldots \quad \ldots$$

dont le déterminant $|a_{11}\ a_{22}\ a_{33}\ a_{44}|$ n'est pas nul. On a

$$|\xi_0\ \zeta_0\ \lambda_0\ \mu_0| = |\xi\ \zeta\ \lambda\ \mu| \cdot |a_{11}\ a_{22}\ a_{33}\ a_{44}|,$$

d'où

$$\frac{|\xi_0\zeta_0\lambda_0\mu_0|}{|\zeta_0\eta_0\lambda_0\mu_0|} : \frac{|\xi_0\tau_0\lambda_0\mu_0|}{|\tau_0\eta_0\lambda_0\mu_0|} = \frac{|\xi\zeta\lambda\mu|}{|\zeta\eta\lambda\mu|} : \frac{|\xi\tau\lambda\mu|}{|\tau\eta\lambda\mu|}.$$

3) La valeur du rapport anharmonique des points X, Y, Z, T donnée ci-dessus (1°, 1) est indépendante des plans λ, μ menés par le support d de la ponctuelle à laquelle ces points appartiennent.

4) La valeur du rapport anharmonique des plans ξ, η, ζ, τ donnée ci-dessus (1°, 2) est indépendante des points L, M pris sur le support d de la feuillée à laquelle ces plans appartiennent.

Il suffit de démontrer le premier théorème. La valeur donnée au (1°, 1) pour le rapport anharmonique des points X, Y, Z, T est une fonction homogène de degré zéro des coordonnées homogènes tangentielles δ_{ij} de la droite d. Elle est donc indépendante des plans λ, μ, les δ_{ij} variant dans le même rapport quand on change les plans menés par la droite d pour les calculer.

5) La valeur du rapport anharmonique des points X, Y, Z, T donnée au (1°, 1) ne change pas quand on remplace les plans ξ, η, ζ, τ par d'autres passant par les mêmes points.

6) La valeur du rapport anharmonique des plans ξ, η, ζ, τ donnée au (1°, 2) ne change pas quand on remplace les points X, Y, Z, T par d'autres situés dans les mêmes plans.

Il suffit de démontrer le premier théorème. Soit ξ' un plan différent du plan ξ mené par le point X. Ce point étant l'intersection des plans ξ, λ, μ aussi bien que des plans ξ', λ, μ, on a

$$X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = |\xi\lambda\mu|_1 : |\xi\lambda\mu|_2 : |\xi\lambda\mu|_3 : |\xi\lambda\mu|_4$$
$$= |\xi'\lambda\mu|_1 : |\xi'\lambda\mu|_2 : |\xi'\lambda\mu|_3 : |\xi'\lambda\mu|_4$$

d'où

$$|\xi\zeta\lambda\mu| : |\xi\tau\lambda\mu| = \Sigma\, \zeta_i\, |\xi\lambda\mu|_i : \Sigma\, \tau_i\, |\xi\lambda\mu|_i = \Sigma\, \zeta_i X_i : \Sigma\, \tau_i X_i$$

et

$$|\xi'\zeta\lambda\mu| : |\xi'\tau\lambda\mu| = \Sigma\, \zeta_i\, |\xi'\lambda\mu|_i : \Sigma\, \tau_i\, |\xi'\lambda\mu|_i = \Sigma\, \zeta_i X_i : \Sigma\, \tau_i X_i .$$

on a donc

$$\frac{|\xi\zeta\lambda\mu|}{|\zeta\eta\lambda\mu|} : \frac{|\xi\tau\lambda\mu|}{|\tau\eta\lambda\mu|} = \frac{|\xi'\zeta\lambda\mu|}{|\zeta\eta\lambda\mu|} : \frac{|\xi'\tau\lambda\mu|}{|\tau\eta\lambda\mu|}.$$

N.B. Ces six théorèmes justifient les définitions 1°, 1 et 1°, 2.

C.P

3° Théorème.

Quatre plans issus d'une même droite et les quatre points d'intersection de ces plans par une droite quelconque ont le même rapport anharmonique ; ou, ce qui est la même chose, quatre points pris sur une même droite et les quatre plans projetant ces points d'une droite quelconque ont le même rapport anharmonique.

Soient ξ, η, ζ, τ quatre plans passant par la droite LM et X, Y, Z, T les points où ces plans coupent la droite $\lambda\mu$. Il s'agit de démontrer que

$$(X, Y, Z, T) = (\xi, \eta, \zeta, \tau).$$

En appliquant la définition (1°, 1), on a la formule

$$(X,Y,Z,T) = \frac{|\xi\zeta\lambda\mu|}{|\zeta\eta\lambda\mu|} : \frac{|\xi\tau\lambda\mu|}{|\tau\eta\lambda\mu|}.$$

Le second membre est homogène et de degré zéro à la fois par rapport aux coordonnées homogènes ξ_i du plan ξ et par rapport aux déterminants $|\zeta\lambda\mu|_i$ formés avec les coordonnées homogènes des plans ζ, λ, μ. Mais les coordonnées homogènes ξ_i du plan ξ sont proportionnelles aux déterminants $|XLM|_i$ formés avec les coordonnées homogènes des points X, L, M contenus dans le plan ξ, et les déterminants $|\zeta\lambda\mu|_i$ sont proportionnels aux coordonnées homogènes Z_i du point d'intersection Z des plans ζ, λ, μ. On peut donc faire.

$$|\xi\zeta\lambda\mu| = \Sigma\,\xi_i|\zeta\lambda\mu|_i = \Sigma\,|XLM|_i Z_i = |XZLM|.$$

Il en résulte que

$$(X,Y,Z,T) = \frac{|XZLM|}{|ZYLM|} : \frac{|XTLM|}{|TYLM|},$$

ou, en vertu de la définition (1°, 2)

$$(X,Y,Z,T) = (\xi, \eta, \zeta, \tau).$$

4° Théorèmes.

1) Si X'_1 et X'_2, Y'_1 et Y'_2, Z'_1 et Z'_2, T'_1 et T'_2 sont les coordonnées binaires des points X, Y, Z, T sur la ponctuelle $d \equiv \lambda, \mu$, on a

$$(X,Y,Z,T) = \frac{|X'Z'|}{|Z'Y'|} : \frac{|X'T'|}{|T'Y'|}$$

2) Si ξ'_1 et ξ'_2, η'_1 et η'_2, ζ'_1 et ζ'_2, τ'_1 et τ'_2 sont les coordonnées des plans ξ, η, ζ, τ dans la feuillée $d \equiv LM$, on a

$$(\xi,\eta,\zeta,\tau) = \frac{|\xi'\zeta'|}{|\zeta'\eta'|} : \frac{|\xi'\tau'|}{|\tau'\eta'|}$$

Il suffit de démontrer le premier théorème. Il résulte des calculs effectués dans la démonstration précédente qu'ayant pris arbitrairement les points L, M en dehors de la droite $d \equiv \lambda\mu$,

$$(X,Y,Z,T) = \frac{|XZLM|}{|ZYLM|} : \frac{|XTLM|}{|TYLM|}.$$

Mais si A, B sont les deux premiers points fondamentaux des coordonnées binaires sur la ponctuelle $d \equiv \lambda\mu$, on a

$$|XZLM| = |X'Z'| \cdot |ABLM|$$

et on en déduit immédiatement la propriété à démontrer.

5° Corollaires.

1) La valeur qu'on trouve pour (X,Y,Z,T) par application du théorème précédent est indépendante du système des coordonnées binaires adoptées sur la

2) La valeur qu'on trouve pour (ξ,η,ζ,τ) par application du théorème précédent est indépendante du système des coordonnées

ponctuelle $d \equiv \lambda\mu$.

3) Si X'_1 et X'_2 sont les coordonnées binaires du point X sur la ponctuelle $d \equiv \lambda\mu$ rapportée aux points fondamentaux A, B, C, on a

$$(A, B, C, X) = \frac{X'_1}{X'_2}.$$

binaires adoptées dans la feuillée $d \equiv LM$.

4) Si ξ'_1 et ξ'_2 sont les coordonnées binaires du plan ξ dans la feuillée $d \equiv LM$ rapportée aux plans fondamentaux α, β, γ, on a

$$(\alpha, \beta, \gamma, \xi) = \frac{\xi'_1}{\xi'_2}$$

6° Théorèmes. Quand le support de la ponctuelle $d \equiv \lambda\mu$ est une droite propre, la valeur du rapport anharmonique des quatre points X, Y, Z, T de cette ponctuelle est

$$(X, Y, Z, T) = \frac{XZ}{ZY} : \frac{XT}{TY}.$$

Si L, M sont des points extérieurs à la droite $d \equiv \lambda\mu$, on a

$$(X, Y, Z, T) = \frac{|XZLM|}{|ZYLM|} : \frac{|XTLM|}{|TYLM|}.$$

Mais lorsque la droite $d \equiv \lambda\mu$ coïncide avec l'axe x du trièdre coordonné auquel on a rapporté la figure,

$$|XZLM| = \begin{vmatrix} X_1 & 0 & 0 & X_4 \\ Z_1 & 0 & 0 & Z_4 \\ L_1 & L_2 & L_3 & L_4 \\ M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_1 & X_4 \\ Z_1 & Z_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} L_2 & L_3 \\ M_2 & M_3 \end{vmatrix}$$

ou

$$XZLM = X_4 Z_4 \left(\frac{X_1}{X_4} - \frac{Z_1}{Z_4} \right) (L_2 M_3 - L_3 M_2) = -X_4 Z_4 (L_2 M_3 - L_3 M_2) . XZ.$$

De même,

$$|ZYLM| = -Y_4 Z_4 (L_2 M_3 - L_3 M_2) . ZY.$$

Donc

$$\frac{|XZLM|}{|ZYLM|} = \frac{X_4}{Y_4} \cdot \frac{XZ}{ZY} \quad \text{et} \quad \frac{|XTLM|}{|TYLM|} = \frac{X_4}{Y_4} \cdot \frac{XT}{TY}$$

puis

$$(X, Y, Z, T) = \frac{XZ}{ZY} : \frac{XT}{TY}.$$

Corollaire. Si $\dot{I}, O, P, X$ sont le point impropre, deux points propres tels que $OP = 1$ et un point propre quelconque de la droite propre $d \equiv \lambda\mu$, on a

$$(\dot{I}, O, P, X) = OX.$$

En effet, le point $\dot{I}$ étant à l'infini, on a

$$(I, O, P, X) = \frac{IP}{PO} : \frac{IX}{XO} = \frac{OX}{OP} : \frac{IX}{IP} = \frac{OX}{1} : 1 = OX.$$

N.B. On voit par là que l'abscisse d'un point sur un axe est un cas particulier des coordonnées binaires.

§II : Les coordonnées binaires dans le faisceau.

20. Soient $a, b, c, d, \ldots$ les droites d'un faisceau ayant le point S pour support dans le plan σ; s une droite menée arbitrairement par le point S en dehors du plan σ. Le faisceau peut être considéré comme une section faite par le plan σ dans la feuillée ayant la droite s comme support et

dont les plans $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ passent respectivement par les droites $a, b, c, d, \ldots\ldots$ On dit que la feuillée projette le faisceau de la droite s. Si les plans α, β, γ sont les plans fondamentaux des coordonnées binaires dans la feuillée, on a, quel que soit le trièdre coordonné,

$$(1) \qquad \delta_{ij} = \begin{vmatrix} \delta_i & \sigma_i \\ \delta_j & \sigma_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta'_1\alpha_i + \delta'_2\beta_i & \sigma_i \\ \delta'_1\alpha_j + \delta'_2\beta_j & \sigma_j \end{vmatrix} = \delta'_1\alpha_{ij} + \delta'_2\beta_{ij}.$$

Les coordonnées tangentielles des droites du faisceau S sont donc exprimées par des formules analogues à celles qui donnent les coordonnées des plans de la feuillée s. Les nombres δ'_1, δ'_2 sont appelés les coordonnées binaires de la droite a dans le faisceau S par rapport aux droites fondamentales a, b, c, de coordonnées binaires 1 et 0, 0 et 1, 1 et 1, contenues dans les plans fondamentaux α, β, γ de la feuillée s, comme le prouve la formule (1).

21. On peut aussi couper le faisceau S par une droite t menée arbitrairement dans le plan σ et ne passant pas par le point S. On obtient une ponctuelle comme section du faisceau et on dit que celui-ci projette cette ponctuelle. Si $A, B, C, D, \ldots\ldots$ sont les points où la droite t coupe les droites $a, b, c, d, \ldots\ldots$ et si les points A, B, C sont les points fondamentaux des coordonnées binaires sur la ponctuelle t, on a, quel que soit le trièdre coordonné,

$$(2) \qquad D_{ij} = \begin{vmatrix} D_i & S_i \\ D_j & S_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} D'_1 A_i + D'_2 B_i & S_i \\ D'_1 A_j + D'_2 B_j & S_j \end{vmatrix} = D'_1 A_{ij} + D'_2 B_{ij}.$$

Cette formule amène à dire que les nombres D'_1, D'_2 sont également les coordonnées binaires de la droite d par rapport aux mêmes droites fondamentales a, b, c. Mais pour que cette définition puisse être admise en même temps que la précédente, il faut que

$$(3) \qquad \delta'_1 : \delta'_2 = D'_1 : D'_2$$

Or $\delta'_1 : \delta'_2$ et $D'_1 : D'_2$ sont respectivement le rapport anharmonique des quatre plans $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et celui des quatre points A, B, C, D, et ces deux rapports anharmoniques sont égaux parce que la ponctuelle t est une section de la feuillée s.

22. **Corollaires.** *De l'égalité (1) découle cette conséquence : Quand on coupe quatre droites d'un faisceau par une transversale quelconque du plan du faisceau le rapport anharmonique des points d'intersection est constant, et sa valeur est la même que celle du rapport anharmonique des plans projetant les quatre droites considérées d'une droite quelconque menée par le support du faisceau.*

Définition. La valeur commune des deux rapports anharmoniques s'appelle le rapport anharmonique des quatre droites considérées dans le faisceau.

§ III : De la transformation des coordonnées binaires.

23. **Formules de transformation.** Il existe pour chacune des formes fondamentales de première espèce des coordonnées binaires ayant la même signification dans les trois formes : le quotient des coordonnées binaires d'un élément quelconque est égal au rapport anharmonique du groupe de quatre éléments formé des trois éléments pris pour éléments fondamentaux et de l'élément quelconque considéré. De plus, chacune des trois formes peut se déduire des deux autres par projection ou section de telle manière que si les éléments fondamentaux se correspondent ainsi, deux autres éléments quelconques qui se correspondent également, ont les mêmes coordonnées binaires.

Etant donnés deux systèmes de coordonnées binaires dans une même forme à laquelle on peut convenir d'appliquer les notations des ponctuelles, soient A, B, C les éléments fondamentaux du premier système ; D, E, F ceux du second système ; X_1 et X_2, X'_1 et X'_2 les coordonnées binaires d'un

même élément quelconque X. On a

$$X'_1 : X'_2 = (D,E,F,X) = \frac{|DF|}{|FE|} : \frac{|DX|}{|XE|} = \frac{|DF|\cdot|XE|}{|FE|\cdot|DX|},$$

ou

$$X'_1 : X'_2 = \frac{E_2 . |DF| . X_1 - E_1 . |DF| . X_2}{D_2 . |EF| . X_1 - D_1 . |EF| . X_2} .$$

On peut donc écrire

(1) $$X'_1 = a X_1 + b . X_2 \qquad \text{et} \qquad X'_2 = c x_1 + d x_2,$$

en posant

$$a = E_2 . |DF|, \quad b = -E_1 . |DF|, \quad c = D_2 . |EF|, \quad d = -D_1 . |EF|$$

et on a

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = |DF| . |EF| . |ED| \neq 0$$

Toute transformation entre des coordonnées binaires revient donc à une substitution linéaire ayant un module différent de zéro.

§ IV: Propriétés du rapport anharmonique de quatre éléments d'une forme fondamentale de première espèce.

24. Notations. – Sauf avis contraire, on emploiera les notations relatives aux ponctuelles et les raisonnements seront applicables aux trois formes. On désignera par X_1 et X_2 les coordonnées binaires d'un élément quelconque X.

25. Théorème. *Le rapport anharmonique de quatre éléments d'une forme fondamentale de première espèce ne change pas quand on permute deux éléments pourvu qu'on permute aussi les deux autres.*

Il suffit de démontrer que

$$(A,B,C,D) = (B,A,D,C) = (C,D,A,B) = (D,C,B,A).$$

Or on a

$$(B,A,D,C) = \frac{|BD|}{|DA|} : \frac{|BC|}{|CA|} = \frac{|AC|}{|CB|} : \frac{|AD|}{|DB|} = (A,B,C,D),$$

$$(C,D,A,B) = \frac{|CA|}{|AD|} : \frac{|CB|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|CB|} : \frac{|AD|}{|DB|} = (A,B,C,D),$$

$$(D,C,B,A) = \frac{|DB|}{|BC|} : \frac{|DA|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|CB|} : \frac{|AD|}{|DB|} = (A,B,C,D)$$

26. Théorème. *Quand on permute entre eux le troisième et le quatrième élément, le rapport anharmonique prend la valeur inverse.*

En effet,

$$(A,B,C,D) = \frac{|AC|}{|CB|} : \frac{|AD|}{|DB|} \quad \text{et} \quad (A,B,D,C) = \frac{|AD|}{|DB|} : \frac{|AC|}{|CB|} ;$$

donc

$$(A,B,C,D) . (A,B,D,C) = 1.$$

27. **Théorème.** Quand on permute l'un avec l'autre le second et le troisième élément, le nouveau rapport anharmonique est le complément du premier à l'unité.

On a identiquement

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$|AB| \cdot |CD| + |AC| \cdot |DB| + |AD| \cdot |BC| = 0.$$

on en tire

$$\frac{|AC| \cdot |DB|}{|CB| \cdot |AD|} + \frac{|AB| \cdot |DC|}{|BC| \cdot |AD|} = 1 \quad \text{ou} \quad (A,B,C,D) + (A,C,B,D) = 1.$$

28. **Corollaire.** Les rapports anharmoniques des vingt-quatre permutations de quatre éléments d'une forme fondamentale de première espèce peuvent s'exprimer en fonction de l'un quelconque d'entre eux.

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
(A,B,C,D) &= (B,A,D,C) = (C,D,A,B) = (D,C,B,A) = k,\\
(A,B,D,C) &= (B,A,C,D) = (D,C,A,B) = (C,D,B,A) = 1:k,\\
(A,C,B,D) &= (C,A,D,B) = (B,D,A,C) = (D,B,C,A) = 1-k,\\
(A,C,D,B) &= (C,A,B,D) = (D,B,A,C) = (B,D,C,A) = 1:(1-k),\\
(A,D,B,C) &= (D,A,C,B) = (B,C,A,D) = (C,B,D,A) = (k-1):k,\\
(A,D,C,B) &= (D,A,B,C) = (C,B,A,D) = (B,C,D,A) = k:(k-1).
\end{aligned}$$

29. **Théorème.** Quand on a

$$(A,B,C,D) = (A,B,C,E)$$

et que les éléments A, B, C sont différents deux à deux, les éléments D et E sont confondus.

On peut supposer que les éléments A, B, C sont les éléments fondamentaux des coordonnées binaires, la relation donnée se réduit à

$$D_1 : D_2 = E_1 : E_2$$

et les éléments D, E coïncident.

30. On peut se proposer de rechercher si deux des valeurs trouvées au n° 28 peuvent être égales. Il suffit d'égaler la première valeur successivement à chacune des autres.

1° L'équation $k = 1:k$ donne $k = \pm 1$. – La solution $k = 1$ ne peut exister lorsque les éléments A, B, C, D sont différents deux à deux. – Lorsque $k = -1$, on dit que les éléments A, B, C, D forment un groupe harmonique et les six valeurs des rapports anharmoniques sont $-1, -1, 2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}$.

2° L'équation $k = 1 - k$ donne $k = \frac{1}{2}$ et les quatre éléments A, D, B, C forment un groupe harmonique.

3° L'équation $k = 1 : (1-k)$ donne $k = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{-3})$. Les valeurs de k sont les racines cubiques imaginaires de l'unité négative. En posant $\varepsilon = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{-3})$, les six valeurs des rapports anharmoniques sont

$$\varepsilon;\ -\varepsilon^2, -\varepsilon^2, \varepsilon, \varepsilon, -\varepsilon^2 \quad \text{ou} \quad -\varepsilon^2, \varepsilon, \varepsilon, -\varepsilon^2, -\varepsilon^2, \varepsilon;$$

dans les deux cas, elles sont égales trois par trois et on dit que les éléments A, B, C, D forment un groupe équianharmonique.

4° L'équation $k = (k-1) : k$ donne les mêmes résultats.
5° L'équation $k = k : (k-1)$ est vérifiée par $k = 0$ et $k = 2$. – La solution $k = 0$ ne peut exister lorsque les éléments A, B, C, D sont distincts. – Lorsque $k = 2$, les éléments A, C, D, B forment un groupe harmonique.

31. Corollaire 1. Lorsque les éléments A, B, C, D forment un groupe harmonique, il en est de même de toutes leurs permutations dans lesquelles A est à côté de B et C à côté de D.
Cela résulte des raisonnements qui précèdent, car on a vu qu'en faisant $k = -1$, on a

$$(A,B,C,D) = (B,A,D,C) = (C,D,A,B) = (D,C,B,A) = (A,B,D,C) = (B,A,C,D) = (D,C,A,B) = (C,D,B,A) = -1.$$

32. Corollaire 2. Pour que quatre éléments distincts A, B, C, D forment un groupe harmonique, il est nécessaire et suffisant qu'on ait

$$(A,B,C,D) = (A,B,D,C).$$

Cette propriété est une conséquence de la précédente et du 1° du n° 30.

33. Propriétés harmoniques du quadrilatère complet. 1) Soient E, F les points où se coupent les côtés opposés du quadrilatère plan ABCD. On dit que les trois couples de points A et C, B et D, E et F sont les couples de sommets d'un quadrilatère complet et que les droites AC, BD, EF en sont les diagonales.
2) Théorème. Chaque diagonale d'un quadrilatère complet est coupée harmoniquement par les deux autres.
Soient G, H les points où la diagonale EF est rencontrée par les deux autres AC, BD et K le point où celles-ci se coupent. On a

$$(E,F,G,H) = A(E,F,G,H) = (B,D,K,H),$$
$$(E,F,H,G) = C(E,F,H,G) = (D,B,H,K).$$

Mais

$$(B,D,K,H) = (D,B,H,K),$$

donc

$$(E,F,G,H) = (E,F,H,G)$$

et les quatre points E, F, G, H forment un groupe harmonique.

34. Théorèmes relatifs aux groupes harmoniques de quatre points d'une ponctuelle propre. 1° Pour que quatre points distincts d'une ponctuelle propre forment un groupe harmonique, il faut et il suffit que

$$\frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AB}.$$

1) La condition est nécessaire, car si

$$(A,B,C,D) = -1,$$

on a successivement

$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = -1, \quad AC.DB + AD.CB = 0, \quad AC(AB - AD) + AD(AB - AC) = 0,$$
$$2AC.AD = AD.AB + AC.AB \quad \text{et} \quad \frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}.$$

2) La condition est suffisante comme le prouvent les calculs précédents faits en sens inverse et aussi de ce que la condition est linéaire en AD, alors qu'étant donnés les éléments A, B, C il n'y a qu'un point D tel que le groupe A, B, C, D soit harmonique.
2° Pour que quatre points distincts A, B, C, D d'une ponctuelle propre forment un groupe harmonique, il faut et il suffit qu'on ait

$$MA^2 = MB^2 = MC.MD,$$

le point M étant le milieu de la distance AB.
1) Condition nécessaire. La relation $(A,B,C,D) = -1$ ou $\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = -1$

donne successivement

$$AC.DB + AD.CB = 0, \qquad (MC - MA)(MB - MD) + (MD - MA)(MB - MC) = 0,$$
$$(MC - MA)(MA + MD) + (MD - MA)(MA + MC) = 0, \qquad MA^2 = MC.MD.$$

2) Condition suffisante. On peut le démontrer en refaisant les calculs précédents en sens inverse, mais on peut aussi le déduire de ce que la relation proposée est linéaire en MD.

3° Corollaire. Si les quatre points A, B, C, D sont réels, les points C, D sont d'un même côté du point M, l'un intérieur, l'autre extérieur au segment AB.

4° Construction du point D du groupe harmonique A, B, C, D, connaissant les points A, B, C. Par les points A, B, on mène les axes équipollents x, y. Une droite quelconque menée par le point C coupe x et y aux points E, F. Sur y, on prend $BG = -BF$ et on trace la droite EG, elle coupe la droite AB au point D.

N.B. Cette construction exige l'emploi de la règle et du compas, ou, ce qui revient au même, de la règle et de l'équerre. Elle peut cependant être considérée comme un cas particulier de la suivante qui se fait avec la règle seule et qui se déduit des propriétés harmoniques du quadrilatère complet. Les points E, F étant pris arbitrairement sur une droite quelconque menée par le point C, les droites EA et FB, EB et FA se coupent en des points G, H d'une droite passant par le point D.

Chapitre III : Les coordonnées ternaires.

§ I : Les coordonnées ternaires en général.

Coordonnées ternaires d'un point dans un système plan et d'un plan dans une gerbe. – 25. 1° Théorèmes.

1) Si A, B, C, X sont trois points non en ligne droite et un quatrième point arbitraire d'un même système plan ϖ rapporté à un trièdre coordonné quelconque, il existe des nombres X''_1, X''_2, X''_3 pour lesquels on a

$$(X'') \qquad X_i = X''_1 A_i + X''_2 B_i + X''_3 C_i,$$

où $i = 1, 2, 3, 4$, et

$$(1) \qquad |X''_1| + |X''_2| + |X''_3| \neq 0.$$

2) Si $\alpha, \beta, \gamma, \xi$ sont trois plans n'ayant pas une droite commune et un quatrième plan arbitraire d'une même gerbe P rapportée à un trièdre coordonné quelconque, il existe des nombres $\xi''_1, \xi''_2, \xi''_3$ pour lesquels on a

$$(\xi'') \qquad \xi_i = \xi''_1 A_i + \xi''_2 B_i + \xi''_3 C_i,$$

où $i = 1, 2, 3, 4$, et

$$(2) \qquad |\xi''_1| + |\xi''_2| + |\xi''_3| \neq 0.$$

Il suffit de démontrer le premier théorème. Soient L un point pris arbitrairement en dehors du plan ϖ et $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ quatre nombres quelconques. On a identiquement

$$|A_1 \quad B_2 \quad C_3 \quad X_4 \quad \xi_L| = 0$$

ou

$$|BCXL|.\xi_A - |ACXL|.\xi_B + |ABXL|.\xi_C - |ABCL|.\xi_X + |ABCX|.\xi_L = 0.$$

Mais, par hypothèse,

$$|ABCL| \neq 0 \quad \text{et} \quad |ABCX| = 0;$$

l'identité se réduit à

$$|BCXL|.\xi_A - |ACXL|.\xi_B + |ABXL|.\xi_C - |ABCL|.\xi_X = 0.$$

On en tire

$$\xi_X = X''_1 \xi_A + X''_2 \xi_B + X''_3 \xi_C$$

en posant

$$X''_1 = \frac{|BCXL|}{|ABCL|}, \qquad X''_2 = -\frac{|ACXL|}{|ABCL|}, \qquad X''_3 = \frac{|ABXL|}{|ABCL|}.$$

Les nombres $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ étant des nombres quelconques, on a donc déjà, pour $i = 1.2.3.4$

$$X_i = X''_1 A_i + X''_2 B_i + X''_3 C_i .$$

D'autre part, les conditions

$$X''_1 = 0 \text{ ou } |B\,C\,X\,L| = 0, \qquad X''_2 = 0 \text{ ou } |A\,C\,X\,L| = 0, \qquad X''_3 = 0 \text{ ou } |A\,B\,X\,L| = 0$$

expriment que le point X est sur l'un ou l'autre des côtés du triangle ABC. Le point X ne pouvant se trouver à la fois sur les trois côtés du triangle, il faut que l'un au moins des trois nombres X''_1, X''_2, X''_3 ne soit pas nul, ce qui justifie la condition (1).

2° Réciproques

1) Réciproquement, les formules (X'') donnent les coordonnées homogènes d'un point X du système plan ϖ quelles que soient les valeurs des paramètres X''_1, X''_2, X''_3, pourvu que la condition (1) soit remplie.

2) Réciproquement, les formules (ξ'') donnent les coordonnées homogènes d'un plan ξ de la gerbe P quelles que soient les valeurs des paramètres $\xi''_1, \xi''_2, \xi''_3$, pourvu que la condition (2) soit remplie.

Les points A, B, C n'étant pas en ligne droite, on a

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Si les formules (X'') donnaient

$$X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = 0 ,$$

on aurait

$$X''_1 = 0, \quad X''_2 = 0, \quad X''_3 = 0,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

Les valeurs fournies pour X_1, X_2, X_3, X_4 par les formules (X'') sont donc les coordonnées d'un point X et ce point est dans le plan ϖ, car on a

$$|A \quad B \quad C \quad X| = 0.$$

3° Définitions.

1) Quand on remplace des valeurs données d'abord à X''_1, X''_2, X''_3 dans les formules (X'') par d'autres proportionnelles, les nombres X_1, X_2, X_3, X_4, varient dans le même rapport et le point X ne change pas. On considère tous les systèmes de valeurs proportionnelles de X''_1, X''_2, X''_3 correspondant à un même point X comme équivalents, on conserve n'importe lequel de ces systèmes et on dit que les valeurs de X''_1, X''_2, X''_3 ainsi adoptées sont les coordonnées ternaires du point X dans le système plan ϖ. Les coordonnées ternaires des points A, B, C sont

1, 0, 0 ; 0, 1, 0 ; 0, 0, 1.

En faisant

$$X''_1 = 1, \qquad X''_2 = 1, \qquad X''_3 = 1,$$

les formules (X'') donnent, pour $i = 1, 2, 3, 4$,

2) Quand on remplace des valeurs données d'abord à $\xi''_1, \xi''_2, \xi''_3$ dans les formules (ξ'') par d'autres proportionnelles, les nombres $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ varient dans le même rapport et le plan ξ ne change pas. On considère tous les systèmes de valeurs proportionnelles de $\xi''_1, \xi''_2, \xi''_3$ correspondant à un même plan ξ comme équivalents, on conserve n'importe lequel de ces systèmes et on dit que les valeurs de $\xi''_1, \xi''_2, \xi''_3$ ainsi adoptées sont les coordonnées ternaires du plan ξ dans la gerbe P. Les coordonnées ternaires des plans α, β, γ sont

1, 0, 0 ; 0, 1, 0 ; 0, 0, 1.

En faisant

$$\xi''_1 = 1, \qquad \xi''_2 = 1, \qquad \xi''_3 = 1,$$

les formules (ξ'') donnent, pour $i = 1, 2, 3, 4$,

les coordonnées homogènes

$$D_i = A_i + B_i + C_i$$

d'un point D du système plan ϖ. Ce point est différent des points A, B, C et n'est pas situé sur un des côtés du triangle A B C; en effet, si le point D était situé sur la droite BC, on aurait

$$|D\ B\ C|_i = 0 \text{ ou } |A+B+C\ \ B\ \ C|_i = 0,$$

et, par suite, $|A\ B\ C|_i = 0$, ce qui est absurde, les points A, B, C n'étant pas en ligne droite.

les coordonnées homogènes

$$\delta_i = \alpha_i + \beta_i + \gamma_i$$

d'un plan δ de la gerbe P. Ce plan est différent des plans α, β, γ et ne passe pas par une des arêtes du trièdre $\alpha\beta\gamma$; en effet, si le plan δ passait par la droite $\beta\gamma$, on aurait

$$|\delta\ \beta\ \gamma|_i = 0 \text{ ou } |\alpha+\beta+\gamma\ \beta\ \gamma|_i = 0$$

et, par suite, $|\alpha\ \beta\ \gamma|_i = 0$, ce qui est absurde, les plans α, β, γ n'ayant pas une droite commune.

3) Les points A, B, C, D sont appelés les points fondamentaux des coordonnées ternaires dans le système plan ϖ. Les points A, B, C ont été pris arbitrairement; mais il est facile de montrer qu'après avoir pris ces trois points comme on aura voulu, on peut fixer le choix de leurs coordonnées homogènes pour que le point D occupe également telle place qu'on voudra dans le système plan ϖ, à l'exception des points des côtés du triangle ABC.

4) Les plans α, β, γ, δ sont appelés les plans fondamentaux des coordonnées ternaires dans la gerbe P. Les plans α, β, γ ont été pris arbitrairement; mais il est facile de montrer qu'après avoir pris ces trois plans comme on aura voulu, on peut fixer le choix de leurs coordonnées homogènes pour que le plan δ occupe encore telle place qu'on voudra dans la gerbe P, à l'exception des plans passant par les arêtes du trièdre α, β, γ.

Il suffit de faire la démonstration pour le système plan ϖ. Soient A_i, B_i, C_i, $(i = 1,2,3,4)$, des coordonnées homogènes particulières des points A, B, C du système plan ϖ; si ces points ne sont pas en ligne droite, ils sont les trois premiers points fondamentaux des coordonnées ternaires dès qu'on écrit

$$X_i = X''_1 k_1 A_i + X''_2 k_2 B_i + X''_3 k_3 C_i,$$

pour $i = 1,2,3,4$, quelles que soient les valeurs, toutes différentes de zéro, données à k_1, k_2 et k_3. Un quatrième point D extérieur aux côtés du triangle ABC dans le plan ϖ et pour lequel on a adopté les coordonnées homogènes D_1, D_2, D_3, D_4, sera le quatrième point fondamental de ces coordonnées ternaires, si on a, en outre,

$$D_i = k_1 A_i + k_2 B_i + k_3 C_i,$$

pour $i = 1,2,3,4$; on a ainsi un système de quatre équations linéaires, non homogènes, pour calculer k_1, k_2, k_3. Les points A, B, C n'étant pas en ligne droite et les points A, B, C, D appartenant au plan ϖ, on a

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{et} \quad |A\ \ B\ \ C\ \ D| = 0;$$

le déterminant principal étant du troisième ordre et le déterminant caractéristique étant nul, le système à résoudre admet une solution et n'en admet qu'une seule. La propriété résulte alors de ce que cette solution est formée de valeurs de k_1, k_2, k_3 toutes différentes de zéro; en effet, si on avait $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, le point D n'existerait pas et si on avait k_1 ou k_2 ou $k_3 = 0$, le point D serait sur l'un des côtés du triangle A.B.C.

4° Théorèmes.

1) Les rapports mutuels des coordonnées ternaires X''_1, X''_2, X''_3 du point X sont indépendants de la position du point L pris en dehors du plan ϖ pour établir les formules (X'').

2) Les rapports mutuels des coordonnées ternaires $\xi''_1, \xi''_2, \xi''_3$ du plan ξ sont indépendants de la position du plan λ pris en dehors de la gerbe P pour établir les formules (ξ'').

Il suffit de démontrer le premier théorème. On a posé

$$X''_1 = |BCXL| : |ABCL|, \qquad X''_2 = -|ACXL| : |ABCL|, \qquad X''_3 = |ABXL| : |ABCL|.$$

On a donc

$$X''_1 : X''_2 : X''_3 = |BCXL| : -|ACXL| : |ABXL|.$$

Mais si les nombres $\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3, \varpi_4$ sont les coordonnées homogènes du plan ϖ, il existe des nombres h, h', h'', tous différents de zéro ou séparément nuls en même temps que X''_1, X''_2, X''_3 et tels que

$$\varpi_i = h\,|BCX|_i = h'\,|ACX|_i = h''\,|ABX|_i,$$

pour $i = 1, 2, 3, 4$.

Dès lors, on a

$$X''_1 : X''_2 : X''_3 = \frac{1}{h}\sum \varpi_i L_i : -\frac{1}{h'}\sum \varpi_i L_i : \frac{1}{h''}\sum \varpi_i L_i = \frac{1}{h} : -\frac{1}{h'} : \frac{1}{h''},$$

ce qui démontre le théorème.

5° Théorèmes. 1) Les coordonnées ternaires X''_1, X''_2, X''_3 du point X ne sont pas altérées par un changement du trièdre coordonné adopté pour établir les formules (X'').

2) Les coordonnées ternaires $\xi''_1, \xi''_2, \xi''_3$ du plan ξ ne sont pas altérées par un changement du trièdre coordonné adopté pour établir les formules (ξ'').

Il suffit de démontrer le premier théorème dont la démonstration ne diffère pas de celle faite dans le cas des coordonnées binaires au n°18 (5°). – 6° Conclusion :

1) Quatre points A, B, C, D pris arbitrairement dans un système plan ϖ, lieu de points, définissent sur celui-ci un système de coordonnées ternaires dont on dit qu'ils sont les points fondamentaux ; il faut cependant que trois quelconques des points A, B, C, D ne soient pas en ligne droite, de sorte que les quatre points sont les sommets d'un quadrangle non dégénéré. Tout autre point X du système plan ϖ est déterminé par les rapports de ses coordonnées ternaires X''_1, X''_2, X''_3. Les coordonnées ternaires des points A, B, C, D sont $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,1)$. – On dit que les formules (X'') fournissent une représentation paramétrique du système plan ϖ.

2) Quatre plans $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ pris arbitrairement dans une gerbe P, lieu de plans, définissent dans celle-ci un système de coordonnées ternaires dont on dit qu'ils sont les plans fondamentaux ; il faut cependant que trois quelconques des plans α, β, γ n'aient pas une droite commune, de sorte que les quatre plans sont les faces d'un angle tétraèdre non dégénéré. Tout autre plan ξ de la gerbe P est déterminé par les rapports de ses coordonnées ternaires $\xi''_1, \xi''_2, \xi''_3$. Les coordonnées ternaires des plans $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,1)$. – On dit que les formules (ξ'') fournissent une représentation paramétrique de la gerbe P.

36. 1° Théorèmes.

1) La valeur du rapport anharmonique du faisceau

$$S(X, Y, Z, T)$$

dans le système plan ϖ est

$$\frac{|X''Z''S''|}{|Z''Y''S''|} : \frac{|X''T''S''|}{|T''Y''S''|}.$$

2) La valeur du rapport anharmonique du faisceau

$$\sigma(\xi, \eta, \zeta, \tau)$$

dans la gerbe P est

$$\frac{|\xi''\zeta''\sigma''|}{|\zeta''\eta''\sigma''|} : \frac{|\xi''\tau''\sigma''|}{|\tau''\eta''\sigma''|}.$$

Il suffit de démontrer le premier théorème. Soit V un point quelconque pris en dehors du plan ϖ. On a

$$S(X,Y,Z,T) = SV(X,Y,Z,T) = \frac{|XZSV|}{|ZYSV|} : \frac{|XTSV|}{|TYSV|};$$

et le théorème résulte donc de ce que

$$|XZSV| = |X''_1A + X''_2B + X''_3C \quad Z''_1A + Z''_2B + Z''_3C \quad S''_1A + S''_2B + S''_3C \quad V| = |X''Z''S''| \cdot |ABCV|$$

$$\text{et } |ABCV| \neq 0$$

2° Corollaires.

1) Si X''_1, X''_2, X''_3 sont les coordonnées ternaires du point X du système plan ϖ par rapport aux points fondamentaux A, B, C, D, on a

$$A(B,C,D,X) = X''_2 : X''_3,$$

$$B(C,A,D,X) = X''_3 : X''_1,$$

$$C(A,B,D,X) = X''_1 : X''_2.$$

2) Si $\xi''_1, \xi''_2, \xi''_3$ sont les coordonnées ternaires du plan ξ de la gerbe P par rapport aux plan fondamentaux $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, on a

$$\alpha(\beta,\gamma,\delta,\xi) = \xi''_2 : \xi''_3,$$

$$\beta(\gamma,\alpha,\delta,\xi) = \xi''_3 : \xi''_1,$$

$$\gamma(\alpha,\beta,\delta,\xi) = \xi''_1 : \xi''_2.$$

Coordonnées ternaires de la droite dans le système plan et dans la gerbe.

37. 1° Théorèmes.

1) Si a, b, c, x sont trois droites non concourantes et une quatrième droite quelconque d'un même système plan ϖ rapporté à un trièdre coordonné quelconque, il existe des nombres $\xi''_1, \xi''_2, \xi''_3$ pour lesquels on a

(x'') $$\xi_{ij} = \xi''_1\alpha_{ij} + \xi''_2\beta_{ij} + \xi''_3\gamma_{ij}$$

avec

(1) $$|\xi''_1| + |\xi''_2| + |\xi''_3| \neq 0.$$

2) Si a, b, c, x sont trois droites non situées dans un même plan et une quatrième droite arbitraire d'une même gerbe P rapportée à un trièdre coordonné quelconque, il existe des nombres X''_1, X''_2, X''_3 pour lesquels on a

$(x'')_1$ $$X_{ij} = X''_1A_{ij} + X''_2B_{ij} + X''_3C_{ij}$$

avec

(2) $$|X''_1| + |X''_2| + |X''_3| \neq 0.$$

Il suffit de démontrer le premier théorème. En projetant les droites du système plan ϖ d'un point extérieur P pris arbitrairement, on obtient une gerbe de plans. Soient $\alpha, \beta, \gamma, \xi$ les plans correspondant aux droites a, b, c, x; $\xi''_1, \xi''_2, \xi''_3$ les coordonnées ternaires du plan ξ dans un système dont les plans fondamentaux sont les plans α, β, γ et un quatrième plan δ; d la droite $\varpi\delta$, intersection des plans ϖ, δ. La droite x étant l'intersection des plans ϖ et ξ, ses coordonnées homogènes tangentielles sont

$$\xi_{ij} = \begin{vmatrix} \xi_i & \varpi_i \\ \xi_j & \varpi_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi''_1\alpha_i + \xi''_2\beta_i + \xi''_3\gamma_i & \varpi_i \\ \xi''_1\alpha_j + \xi''_2\beta_j + \xi''_3\gamma_j & \varpi_j \end{vmatrix} = \xi''_1\alpha_{ij} + \xi''_2\beta_{ij} + \xi''_3\gamma_{ij}$$

et on sait (36, 1°, 2) que $\xi''_1, \xi''_2, \xi''_3$ vérifient la condition (1).

2° Réciproques.

1) Réciproquement, les formules (x'') donnent les coordonnées homogènes tangentielles d'une droite du système plan ϖ quelles que soient les valeurs des paramètres $\xi''_1, \xi''_2, \xi''_3$ pourvu que la condition (1) soit remplie.

2) Réciproquement, les formules $(x'')_1$ donnent les coordonnées homogènes ponctuelles d'une droite de la gerbe P quelles que soient les valeurs des paramètres X''_1, X''_2, X''_3, pourvu que la condition (2) soit remplie.

Il suffit de démontrer le premier théorème. La condition (1) étant remplie, les nombres $\xi''_1, \xi''_2, \xi''_3$ sont les coordonnées ternaires d'un plan ξ de la gerbe P par rapport aux plans fondamentaux $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Les coordonnées homogènes du plan ξ sont $(i = 1, 2, 3, 4)$.

$$\zeta_i = \zeta''_1\alpha_i + \zeta''_2\beta_i + \zeta''_3\gamma_i.$$

Dès lors, en considérant un quelconque des nombres ζ_{ij}, on a d'abord.

$$\zeta_{ij} = \zeta''_1\alpha_{ij} + \zeta''_2\beta_{ij} + \zeta''_3\gamma_{ij} = \zeta''_1\begin{vmatrix}\alpha_i & \varpi_i\\ \alpha_j & \varpi_j\end{vmatrix} + \zeta''_2\begin{vmatrix}\beta_i & \varpi_i\\ \beta_j & \varpi_j\end{vmatrix} + \zeta''_3\begin{vmatrix}\gamma_i & \varpi_i\\ \gamma_j & \varpi_j\end{vmatrix}$$

puis

$$\zeta_{ij} = \begin{vmatrix}\zeta''_1\alpha_i + \zeta''_2\beta_i + \zeta''_3\gamma_i & \varpi_i\\ \zeta''_1\alpha_j + \zeta''_2\beta_j + \zeta''_3\gamma_j & \varpi_j\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\zeta_i & \varpi_i\\ \zeta_j & \varpi_j\end{vmatrix}$$

et ce nombre est l'une des coordonnées homogènes tangentielles de la droite $x \equiv \varpi\,\zeta$, intersection des plans ϖ, ζ.

Corollaires.

1) Si α_{ij}, β_{ij}, γ_{ij} sont les coordonnées homogènes tangentielles de trois droites non concourantes d'un même plan, on a

$$(3)\qquad \begin{vmatrix}\alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{34} & \alpha_{42} & \alpha_{23}\\ \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{14} & \beta_{34} & \beta_{42} & \beta_{23}\\ \gamma_{12} & \gamma_{13} & \gamma_{14} & \gamma_{34} & \gamma_{42} & \gamma_{23}\end{vmatrix} \neq 0$$

2) Si A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} sont les coordonnées homogènes ponctuelles de trois droites concourantes non situées dans un même plan, on a

$$(4)\qquad \begin{vmatrix}A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{34} & A_{42} & A_{23}\\ B_{12} & B_{13} & B_{14} & B_{34} & B_{42} & B_{23}\\ C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{34} & C_{42} & C_{23}\end{vmatrix} \neq 0.$$

Il suffit de démontrer la première propriété. – Si tous les déterminants du troisième ordre tirés du tableau (3) étaient nuls, il y aurait des valeurs des paramètres ζ''_1, ζ''_2, ζ''_3 qui vérifieraient la condition (1) et pour lesquelles les six nombres ζ_{ij} seraient nuls; il y aurait donc un plan de la gerbe P qui couperait le plan ϖ suivant une droite dont les six coordonnées homogènes tangentielles seraient nulles, ce qui est impossible.

3° Définitions

1) Les formules (x'') fournissent une représentation paramétrique du système plan ϖ considéré comme lieu de droites et on dit que les nombres ζ''_1, ζ''_2, ζ''_3 sont les coordonnées ternaires de la droite x à laquelle ils correspondent, par rapport aux droites fondamentales a, b, c, d dont les coordonnées ternaires sont (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) et (1, 1, 1).

2) Les formules $(x'')_1$ fournissent une représentation paramétrique de la gerbe P considéré comme lieu de droites et on dit que les nombres X''_1, X''_2, X''_3 sont les coordonnées ternaires de la droite x à laquelle ils correspondent, par rapport aux droites fondamentales a, b, c, d dont les coordonnées ternaires sont (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), et (1, 1, 1).

38. Théorèmes.

1) La valeur du rapport anharmonique de la ponctuelle

$$s\,(x, y, z, t)$$

du système plan ϖ est

$$\frac{|\zeta''\,\mathfrak{z}''\,\sigma''|}{|\mathfrak{z}''\,\eta''\,\sigma''|} : \frac{|\zeta''\,\tau''\,\sigma''|}{|\tau''\,\eta''\,\sigma''|}.$$

2) La valeur du rapport anharmonique de la feuillée

$$s\,(x, y, z, t)$$

de la gerbe P est

$$\frac{|X''\,Z''\,S''|}{|Z''\,Y''\,S''|} : \frac{|X''\,T''\,S''|}{|T''\,Y''\,S''|}.$$

Il suffit de démontrer le premier théorème. – Le rapport anharmonique de la ponctuelle $s(x, y, z, t)$ du système plan ϖ est égal à celui du faisceau $\sigma\,(\zeta, \eta, \mathfrak{z}, \tau)$ déterminé dans la gerbe P par les plans passant par les droites s, x, y, z, t du système plan ϖ. La propriété actuelle est donc justifiée par celle du n° 37, 2°, 2.

Corollaires.

1) Si ζ''_1, ζ''_2, ζ''_3 sont les coordonnées ternaires de la droite x du système plan ϖ par rapport aux droites fondamentales a, b, c, d, on a

2) Si X''_1, X''_2, X''_3 sont les coordonnées ternaires de la droite x de la gerbe P, par rapport aux droites fondamentales a, b, c, d, on a

$$a(b,c,d,x) = \xi''_2 : \xi''_3,$$
$$b(c,a,d,x) = \xi''_3 : \xi''_1,$$
$$c(a,b,d,x) = \xi''_1 : \xi''_2.$$

$$a(b,c,d,x) = X''_2 : X''_3,$$
$$b(c,a,d,x) = X''_3 : X''_1,$$
$$c(a,b,d,x) = X''_1 : X''_2.$$

Remarques.

1) Il résulte de la propriété précédente que les coordonnées ternaires de la droite x dans le système plan ϖ ne dépendent que de la position de cette droite par rapport aux droites fondamentales; elles ne dépendent pas du trièdre coordonné auquel on a rapporté la figure, ni de la gerbe P par laquelle on a projeté le système plan ϖ pour établir les formules (x'').

2) Il résulte de la propriété précédente que les coordonnées ternaires de la droite x dans la gerbe P ne dépendent que de la position de cette droite par rapport aux droites fondamentales: elles ne dépendent pas du trièdre coordonné auquel on a rapporté la figure, ni du système plan ϖ par lequel on a coupé la gerbe P pour établir les formules $(x'')_1$.

Coordonnées ternaires dans le système plan ϖ lieu de droites et de points, et dans la gerbe P lieu de plans et de droites. – 39. 1° Théorèmes.

1) Un système plan ϖ étant considéré comme lieu de points et de droites, on peut placer les éléments fondamentaux des deux systèmes de coordonnées ternaires pour que la condition

(1) $$\xi''_1 X''_1 + \xi''_2 X''_2 + \xi''_3 X''_3 = 0$$

exprime que le point $X(X''_1, X''_2, X''_3)$ est sur la droite $x(\xi''_1, \xi''_2, \xi''_3)$.

2) Une gerbe P étant considérée comme lieu de plans et de droites, on peut placer les éléments fondamentaux des deux systèmes de coordonnées ternaires pour que la condition

(2) $$\xi''_1 X''_1 + \xi''_2 X''_2 + \xi''_3 X''_3 = 0$$

exprime que le plan $\xi(\xi''_1, \xi''_2, \xi''_3)$ passe par la droite $x(X''_1, X''_2, X''_3)$.

Il suffit de démontrer le premier théorème ou, ce qui revient au même, de résoudre la question suivante: ayant déjà rapporté le point X du système plan ϖ aux points fondamentaux A, B, C, D, à quelles droites fondamentales a, b, c, d faut-il ensuite rapporter la droite x du système plan ϖ pour que la condition (1) exprime que le point X est sur la droite x?

Dire que les points A, B, C, D sont les points fondamentaux de coordonnées ternaires dans le système plan ϖ, c'est dire qu'ayant rapporté la figure à un trièdre coordonné arbitraire, on a fixé le choix des coordonnées homogènes $A_i, B_i, C_i, (i=1,2,3,4)$, des points A, B, C pour que les coordonnées homogènes du point D soient

$$D_i = A_i + B_i + C_i$$

et celles du point X

$$X_i = X''_1 A_i + X''_2 B_i + X''_3 C_i.$$

Soit P un point quelconque extérieur au plan ϖ. Les plans $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \xi$ qui projettent du point P les droites a, b, c, d, x du système plan ϖ forment une gerbe de plans. Si les plans $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont les plans fondamentaux de coordonnées ternaires dans cette gerbe, les coordonnées ternaires du plan ξ sont égales à celles de la droite x. En désignant par $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i, \xi_i$ les coordonnées homogènes des plans $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \xi$ dans le trièdre coordonné auquel on a rapporté la figure, on a

$$\delta_i = \alpha_i + \beta_i + \gamma_i$$

et

$$\xi_i = \xi''_1 \alpha_i + \xi''_2 \beta_i + \xi''_3 \gamma_i.$$

Pour que la droite x passe par le point X, il est nécessaire et suffisant que ce dernier soit dans le plan ξ, c'est-à-dire qu'on ait

$$\xi_1 X_1 + \xi_2 X_2 + \xi_3 X_3 + \xi_4 X_4 = 0,$$

ou, à cause des valeurs précédentes de X_i et ξ_i,

$$\xi''_1 X''_1 \alpha_A + \xi''_1 X''_2 \alpha_B + \xi''_1 X''_3 \alpha_C$$
$$+ \xi''_2 X''_1 \beta_A + \xi''_2 X''_2 \beta_B + \xi''_2 X''_3 \beta_C$$
$$+ \xi''_3 X''_1 \gamma_A + \xi''_3 X''_2 \gamma_B + \xi''_3 X''_3 \gamma_C = 0.$$

En plaçant les droites a, b, c sur les côtés BC, CA, AB du triangle ABC, les plans α, β, γ passent respectivement par les points B et C, C et A, A et B. On a donc

$$\alpha_A \neq 0, \alpha_B = 0, \alpha_C = 0, \qquad \beta_A = 0, \beta_B \neq 0, \beta_C = 0, \qquad \gamma_A = 0, \gamma_B = 0, \gamma_C \neq 0.$$

et la valeur précédente se réduit déjà à

$$\xi''_1 X''_1 \alpha_A + \xi''_2 X''_2 \beta_B + \xi''_3 X''_3 \gamma_C = 0.$$

En même temps, les coordonnées homogènes des plans $\alpha \equiv PBC$, $\beta \equiv PCA$, $\gamma \equiv PAB$ sont

$$\alpha_i = k. |PBC|_i \qquad \beta_i = k'. |PCA|_i, \qquad \gamma_i = k''. |PAB|_i .$$

On a

$$\alpha_A = k. |ABCP|, \qquad \beta_B = k'. |ABCP|, \qquad \gamma_C = k''. |ABCP| .$$

On aura donc

$$\alpha_A = \beta_B = \gamma_C \neq 0,$$

et le problème sera résolu, en donnant à k, k' et k'' la même valeur non nulle, la valeur 1 par exemple.

Ayant ainsi fixé le choix des coordonnées homogènes des plans α, β, γ, le plan δ sera fixé par ses coordonnées homogènes

$$\delta_i = |PBC|_i + |PCA|_i + |PAB|_i ,$$

et ce plan coupe le plan ϖ suivant la droite d qui répond à la question.

2° Théorèmes.

1) Si E, F, G sont les points où la droite d coupe les côtés du triangle ABC ou a, b, c, les faisceaux

$$A(B, C, D, E), \ B(C, A, D, F), \ C(A, B, D, G)$$

sont harmonique, ou, ce qui revient au même, si e, f, g sont les droites joignant le point D aux sommets du triangle ABC ou abc, les ponctuelles

$$a(b, c, d, e), \ b(c, a, d, f), \ c(a, b, d, g)$$

sont harmoniques.

2) Si $\varepsilon, \varphi, \theta$ sont les plans déterminés par la droite d et les arêtes du trièdre $\alpha\beta\gamma$ ou abc, les faisceaux

$$\alpha(\beta, \gamma, \delta, \varepsilon), \beta(\gamma, \alpha, \delta, \varphi), \gamma(\alpha, \beta, \delta, \theta)$$

sont harmoniques, ou, ce qui revient au même, si e, f, g sont les intersections du plan δ et des faces du trièdre $\alpha\ \beta\ \gamma$ ou $a\,b\,c$, les feuillées

$$a(b, c, d, e), \ b(c, a, d, f), \ c(a, b, d, g)$$

sont harmoniques.

Il suffit de démontrer la première partie du premier théorème. Le point E étant sur les droites a, d dont les coordonnées ternaires sont $1, 0, 0$ et $1, 1, 1$, on a

$$E''_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad E''_1 + E''_2 + E''_3 = 0.$$

On peut donc faire

$$E''_1 = 0, \qquad E''_2 = 1, \qquad E''_3 = -1$$

et on a

$$A(B, C, D, E) = E''_2 : E''_3 = -1.$$

3° Remarque. Cette propriété permet de construire la droite d dans le système plan ϖ sans

utiliser la gerbe P et une propriété analogue permet de résoudre le problème analogue dans la gerbe P sans utiliser un système plan ϖ.

4° Définitions.

1) La droite d s'appelle la polaire du point D et celui-ci le pôle de la droite d par rapport au triangle ABC ou abc.

2) La droite d s'appelle la polaire du plan δ et celui-ci le plan polaire de la droite d par rapport au trièdre $\alpha\beta\gamma$ ou abc.

5° Conclusion.

Quand on rapporte un système plan ϖ à un triangle ABC ou abc, le triangle de référence ou fondamental, à un point D qui n'est situé sur aucun des côtés du triangle et à la polaire d de ce point pour le triangle,

1) Tout point X du système plan ϖ est déterminé par les rapports de ses coordonnées ternaires X''_1, X''_2, X''_3 et

$$A(B,C,D,X) = X''_2 : X''_3,$$
$$B(C,A,D,X) = X''_3 : X''_1,$$
$$C(A,B,D,X) = X''_1 : X''_2,$$

2) Toute droite x du plan ϖ est déterminée par les rapports de ses coordonnées $\xi''_1, \xi''_2, \xi''_3$ et

$$a(b,c,d,x) = \xi''_2 : \xi''_3,$$
$$b(c,a,d,x) = \xi''_3 : \xi''_1,$$
$$c(a,b,d,x) = \xi''_1 : \xi''_2;$$

3) La condition par laquelle on exprime que la droite x passe par le point X est

$$\xi''_1 X''_1 + \xi''_2 X''_2 + \xi''_3 X''_3 = 0.$$

Quand on rapporte une gerbe P à un trièdre $\alpha\beta\gamma$ ou abc, le trièdre de référence ou fondamental, à un plan δ qui ne passe par aucune des arêtes du trièdre et à la polaire d de ce plan pour le triangle,

1) Tout plan ξ de la gerbe P est déterminé par les rapports de ses coordonnées ternaires $\xi''_1, \xi''_2, \xi''_3$ et

$$\alpha(\beta,\gamma,\delta,\xi) = \xi''_2 : \xi''_3,$$
$$\beta(\gamma,\alpha,\delta,\xi) = \xi''_3 : \xi''_1,$$
$$\gamma(\alpha,\beta,\delta,\xi) = \xi''_1 : \xi''_2;$$

2) Toute droite x de la gerbe P est déterminée par les rapports de ses coordonnées ternaires X''_1, X''_2, X''_3 et on a

$$a(b,c,d,x) = X''_2 : X''_3,$$
$$b(c,a,d,x) = X''_3 : X''_1,$$
$$c(a,b,d,x) = X''_1 : X''_2;$$

3) La condition par laquelle on exprime que le plan ξ passe par la droite x est

$$\xi''_1 X''_1 + \xi''_2 X''_2 + \xi''_3 X''_3 = 0.$$

N.B. Comme dans le cas des formes fondamentales de première espèce, les deux formes fondamentales de seconde espèce peuvent se déduire l'une de l'autre par projection ou par section ; lorsque les éléments fondamentaux d'un système plan ϖ sont sur ceux d'une gerbe P, ses points et ses droites ont les mêmes coordonnées ternaires que les droites ou les plans de la gerbe P sur lesquels ils se trouvent.

§ II : Les formes fondamentales de première espèce considérées dans le système plan et la gerbe.

40. – La ponctuelle dans le système plan et le faisceau dans la gerbe.

Soient A_1, A_2, A_3 et B_1, B_2, B_3 les coordonnées ternaires de deux points particuliers A, B d'une droite x d'un système plan ϖ que l'on a rapporté à des coordonnées ternaires.

L'équation de la droite x est

Soient A_1, A_2, A_3 et B_1, B_2, B_3 les coordonnées ternaires de deux droites particulières a, b d'un plan ξ d'une gerbe P que l'on a rapportée à des coordonnées ternaires

L'équation du plan ξ est

$$|X \quad A \quad B| = 0.$$

Toute position du point X sur la droite x est donc associée à deux nombres X'_1, X'_2 qui ne sont pas nuls en même temps et pour lesquels on a

Toute position de la droite x dans le plan ξ est donc associée à deux nombres X'_1, X'_2 qui ne sont pas nuls en même temps et pour lesquels on a

$$X_1 = X'_1 A_1 + X'_2 B_1, \qquad X_2 = X'_1 A_2 + X'_2 B_2, \qquad X_3 = X'_1 A_3 + X'_2 B_3.$$

En faisant $X'_1 = X'_2 = 1$, on obtient les coordonnées ternaires d'un point C de la droite x,

En faisant $X'_1 = X'_2 = 1$, on obtient les coordonnées ternaires d'une droite c du plan ξ,

$$C_1 = A_1 + B_1, \qquad C_2 = A_2 + B_2, \qquad C_3 = A_3 + B_3.$$

Si le point D est un point quelconque pris en dehors de la droite x dans le plan ϖ, on a

$$(A,B,C,X) = D(A,B,C,X);$$

le rapport anharmonique (A,B,C,X) est donc égal à

Si la droite d est une droite quelconque prise en dehors du plan ξ dans la gerbe P, on a

$$(a,b,c,x) = d(a,b,c,x);$$

le rapport anharmonique (a,b,c,x) est donc égal à

$$\frac{|ACD|}{|CBD|} : \frac{|AXD|}{|XBD|}.$$

Mais

$$|AXD| = |A \quad X'_1 A + X'_2 B \quad D| = X'_2 |ABD|, \qquad |ACD| = |ABD|,$$

$$|XBD| = |X'_1 A + X'_2 B \quad B \quad D| = X'_1 |ABD|, \qquad |CBD| = |ABD|$$

on a donc

$$(A,B,C,X) = X'_1 : X'_2$$

et X'_1, X'_2 sont les coordonnées binaires du point X sur la ponctuelle x rapportée aux points fondamentaux A, B, C.

on a donc

$$(a,b,c,x) = X'_1 : X'_2$$

et X'_1, X'_2 sont les coordonnées binaires de la droite x dans le faisceau P du plan ξ par rapport aux droites fondamentales a, b, c.

41. Le faisceau dans le système plan et la feuillée dans la gerbe.

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ et $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ les coordonnées ternaires de deux droites particulières a, b passant par le point X dans le système plan ϖ que l'on a rapporté à des coordonnées ternaires.

L'équation du point X est

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ et $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ les coordonnées ternaires de deux plans particuliers α, β passant par la droite x dans la gerbe P que l'on a rapportée à des coordonnées ternaires.

L'équation de la droite x est

$$|\xi \quad \alpha \quad \beta| = 0.$$

Toute droite x menée par le point X dans le plan ϖ est donc associée à deux nombres ξ'_1, ξ'_2 qui ne sont pas nuls en même temps et pour lesquels on a

Tout plan ξ mené par la droite x dans la gerbe P est donc associé à deux nombres ξ'_1, ξ'_2 qui ne sont pas nuls en même temps et pour lesquels on a

$$\xi_1 = \xi'_1 \alpha_1 + \xi'_2 \beta_1, \qquad \xi_2 = \xi'_1 \alpha_2 + \xi'_2 \beta_2, \qquad \xi_3 = \xi'_1 \alpha_3 + \xi'_2 \beta_3.$$

En faisant $\xi'_1 = \xi'_2 = 1$, on obtient les coordonnées ternaires d'une droite c passant par le point X dans le plan ϖ,

En faisant $\xi'_1 = \xi'_2 = 1$, on obtient les coordonnées ternaires d'un plan γ passant par la droite x dans la gerbe P,

$$\gamma_1 = \alpha_1 + \beta_1, \qquad \gamma_2 = \alpha_2 + \beta_2, \qquad \gamma_3 = \alpha_3 + \beta_3.$$

Si la droite d est une droite quelconque ne passant pas par le point X dans le plan ϖ, on a

$$(a,b,c,x) = d(a,b,c,x);$$

le rapport anharmonique (a,b,c,x) est donc égal à

Si le plan δ est un plan quelconque ne passant pas par la droite x dans la gerbe P, on a

$$(\alpha,\beta,\gamma,\xi) = \delta(\alpha,\beta,\gamma.\xi);$$

le rapport anharmonique $(\alpha,\beta,\gamma,\xi)$ est donc égal à

$$\frac{|\alpha\,\gamma\,\delta|}{|\gamma\,\beta\,\delta|} : \frac{|\alpha\,\zeta\,\delta|}{|\zeta\,\beta\,\delta|}.$$

Mais

$$|\alpha\,\zeta\,\delta| = |\alpha \quad \zeta'_1\alpha + \zeta'_2\beta \quad \delta| = \zeta'_2 \cdot |\alpha\,\beta\,\delta|, \qquad |\alpha\,\gamma\,\delta| = |\alpha\,\beta\,\delta|,$$

$$|\zeta\,\beta\,\delta| = |\zeta'_1\alpha + \zeta'_2\beta \quad \beta \quad \delta| = \zeta'_1 \cdot |\alpha\,\beta\,\delta|, \qquad |\gamma\,\beta\,\delta| = |\alpha\,\beta\,\delta|.$$

on a donc

$$(a, b, c, x) = \zeta'_1 : \zeta'_2$$

et ζ'_1, ζ'_2 sont les coordonnées binaires de la droite x dans le faisceau X rapporté aux droites fondamentales a, b, c.

on a donc

$$(\alpha, \beta, \gamma, \zeta) = \zeta'_1 : \zeta'_2$$

et ζ'_1, ζ'_2 sont les coordonnées binaires du plan ζ dans la feuillée x rapportée aux plans fondamentaux α, β, γ.

§ III : Pôles et polaires dans le triangle et le trièdre.

42. Notations.

Soient X_1, X_2, X_3 et $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ les coordonnées ternaires d'un point X et d'une droite x dans un système plan ϖ rapporté à des éléments fondamentaux formés d'un triangle, d'un point et de sa polaire pour le triangle;

Soient X_1, X_2, X_3 et $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ les coordonnées ternaires d'une droite x et d'un plan ζ dans une gerbe P rapportée à des éléments fondamentaux formés d'un trièdre, d'un plan et de sa polaire pour le trièdre;

$$\alpha_X = 0, \qquad \beta_X = 0, \qquad \gamma_X = 0, \qquad \delta_X = 0$$

les équations des côtés d'un triangle $ABC \equiv abc$ et d'une droite d du système plan ϖ;

les équations des faces du trièdre $abc \equiv \alpha\beta\gamma$ et d'un plan δ de la gerbe P;

$$\zeta_A = 0, \qquad \zeta_B = 0, \qquad \zeta_C = 0, \qquad \zeta_D = 0$$

les équations des sommets du même triangle et d'un point D appartenant au système plan ϖ.

les équations des arêtes du même trièdre et d'une droite d appartenant à la gerbe P.

43. Problèmes.

1° Connaissant les équations

2° Connaissant les équations

$$\alpha_X = 0, \qquad \beta_X = 0, \qquad \gamma_X = 0,$$

des côtés du triangle $ABC \equiv abc$ et les coordonnées D_1, D_2, D_3 du point D, on demande l'équation de la polaire d du point D par rapport au triangle $ABC \equiv abc$.

Soit E le point de rencontre des droites d et $a \equiv BC$. Le faisceau $A(B, C, D, E)$ est harmonique. Les équations des droites AD, AE sont donc

des faces du trièdre $abc \equiv \alpha\beta\gamma$ et les coordonnées D_1, D_2, D_3 de la droite d, on demande l'équation du plan polaire δ de la droite d par rapport au trièdre $abc \equiv \alpha\beta\gamma$.

Soit e la droite de rencontre des plans δ et $\alpha \equiv bc$. La feuillée $a(b, c, d, e)$ est harmonique. Les équations des plans ad, ae sont donc

$$\frac{\beta_X}{\beta_D} - \frac{\gamma_X}{\gamma_D} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\beta_X}{\beta_D} + \frac{\gamma_X}{\gamma_D} = 0,$$

dès lors, l'équation demandée de la droite d est

dès lors, l'équation demandée du plan δ est

$$\frac{\alpha_X}{\alpha_D} + \frac{\beta_X}{\beta_D} + \frac{\gamma_X}{\gamma_D} = 0.$$

44. Problèmes.

1° Connaissant les équations

2° Connaissant les équations

$$\zeta_A = 0, \qquad \zeta_B = 0, \qquad \zeta_C = 0,$$

des sommets du triangle $ABC \equiv abc$ et les coor=

des arêtes du trièdre $abc \equiv \alpha\beta\gamma$ et les coordonnées

données $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ de la droite d, on demande l'équation du pôle D de la droite d par rapport au triangle $ABC \equiv abc$.
Soit e la droite qui joint le point D au sommet A du triangle $ABC \equiv abc$. La ponctuelle $a(b, c, d, e)$ est harmonique. Les équations des points ad, ae sont donc

$\delta_1, \delta_2, \delta_3$ du plan δ, on demande l'équation de la polaire d du plan δ par rapport au trièdre $abc \equiv \alpha\beta\gamma$.
Soit ε le plan déterminé par la droite d et l'arête a du trièdre $abc \equiv \alpha\beta\gamma$. Le faisceau $\alpha(\beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$ est harmonique. Les équations des droites $\alpha\delta$, $\alpha\varepsilon$ sont donc

$$\frac{\xi_B}{\delta_B} - \frac{\xi_C}{\delta_C} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\xi_B}{\delta_B} + \frac{\xi_C}{\delta_C} = 0;$$

dès lors, l'équation demandée du point D est

dès lors, l'équation demandée de la droite d est

$$\frac{\xi_A}{\delta_A} + \frac{\xi_B}{\delta_B} + \frac{\xi_C}{\delta_C} = 0.$$

§ IV : De la transformation des coordonnées ternaires.

45. Il suffit de considérer le cas des coordonnées ternaires des points d'un système plan ; les autres cas se traiteraient d'une manière analogue. – Soient X_1, X_2, X_3 et X'_1, X'_2, X'_3 les coordonnées ternaires d'un même point X du système plan ϖ rapporté aux points fondamentaux A, B, C, D ou A', B', C', D' ; (a_{11}, a_{12}, a_{13}), (a_{21}, a_{22}, a_{23}), (a_{31}, a_{32}, a_{33}), (d_1, d_2, d_3) les coordonnées ternaires des points A', B', C', D' par rapport aux points fondamentaux A, B, C, D. – On a d'abord

$$A'(B', C', D', X) = X'_2 : X'_3.$$

Mais on peut évaluer la valeur de ce rapport anharmonique en fonction des coordonnées ternaires rapportées aux points fondamentaux A, B, C, D. Si $|\alpha_{11} \ \ \alpha_{22} \ \ \alpha_{33}|$ est le déterminant adjoint du déterminant $|a_{11} \ \ a_{22} \ \ a_{33}|$ on trouve que

$$A'(B', C', D', X) = \frac{\Sigma\alpha_{3i} d_i}{\Sigma\alpha_{2i} d_i} : \frac{\Sigma\alpha_{3i} X_i}{\Sigma\alpha_{2i} X_i}.$$

on a donc

$$\frac{X'_2}{X'_3} = \frac{\Sigma\alpha_{2i} X_i}{\Sigma\alpha_{2i} d_i} : \frac{\Sigma\alpha_{3i} X_i}{\Sigma\alpha_{3i} d_i}$$

et les formules cherchées peuvent s'écrire

$$X'_1 = A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + A_{13}X_3, \qquad X'_2 = A_{21}X_1 + A_{22}X_2 + A_{23}X_3, \qquad X'_3 = A_{31}X_1 + A_{32}X_2 + A_{33}X_3,$$

en posant

$$A_{ij} = \alpha_{ij} : \Sigma_j \alpha_{ij} d_j.$$

Une transformation de coordonnées ternaires est donc une substitution linéaire à module différent de zéro.

§ V : Cas particuliers des coordonnées ternaires dans le système plan.

46. **Coordonnées homogènes.** 1° Soient Ox, Oy des axes coordonnés quelconques dans le plan ϖ. On considère dans ce plan des coordonnées ternaires dont les points fondamentaux sont : le point A à l'infini sur l'axe x, le point B à l'infini sur l'axe y, le point C confondu avec le point O, le point D de coordonnées cartésiennes 1, 1. Soient X et Y, P''_1, P''_2 et P''_3, P_1, P_2 et P_3 les coordonnées cartésiennes, les coordonnées ternaires et les coordonnées homogènes d'un point quelconque P ; E, F les points où la droite BC coupe les droites AD, AP. On a

$$P_1 : P_2 : P_3 = X : Y : 1, \qquad P''_2 : P''_3 = A(B, C, D, P) = (B, O, E, F) = Y : 1, \qquad P''_1 : P''_2 = X : 1,$$

d'où

$$P''_1 : P''_2 : P''_3 = P_1 : P_2 : P_3$$

de sorte que les coordonnées homogènes d'un point dans un plan sont un cas particulier des coordonnées ternaires.

2° Les droites fondamentales des coordonnées ternaires considérées sont : la droite a sur l'axe y, la droite b sur l'axe x, la droite c à l'infini, la droite d d'équation

$$X''_1 + X''_2 + X''_3 = 0 \quad \text{ou} \quad X_1 + X_2 + X_3 = 0 \quad \text{ou} \quad x + y + 1 = 0$$

et de coordonnées à l'origine $(-1, -1)$. Soient p''_1, p''_2, p''_3 et p_1, p_2, p_3 les coordonnées ternaires ou homogènes d'une droite quelconque p. Les équations de cette droite dans les mêmes systèmes de coordonnées sont

$$p''_1 X''_1 + p''_2 X''_2 + p''_3 X''_3 = 0 \quad \text{et} \quad p_1 X_1 + p_2 X_2 + p_3 X_3 = 0;$$

mais, à cause de la conclusion du 1°, la première équation, en passant des coordonnées ternaires aux coordonnées homogènes, devient

$$p''_1 X_1 + p''_2 X_2 + p''_3 X_3 = 0;$$

on a donc

$$p''_1 : p''_2 : p''_3 = p_1 : p_2 : p_3$$

et les coordonnées homogènes d'une droite dans un plan sont, comme celles d'un point, un cas particulier des coordonnées ternaires.

47. **Coordonnées normales.** — 1° Les coordonnées ternaires dans un plan prennent le nom de coordonnées normales lorsque les points fondamentaux A, B, C, D sont les sommets d'un triangle et le centre de la circonférence inscrite. Soient P''_1, P''_2, P''_3 et P_1, P_2, P_3 les coordonnées normales d'un point quelconque P et les distances de ce point aux côtés du triangle ABC, les distances ayant le signe + pour le point D ; E, F les points où les droites AD, AP coupent la droite BC. On a

$$P''_2 : P''_3 = A(B, C, D, P) = (B, C, E, F) = \frac{BE}{EC} : \frac{BF}{FC} = \frac{\sin C}{\sin B} : \frac{F_3 \sin C}{F_2 \sin B} = \frac{F_2}{F_3} = P_2 : P_3$$

d'où

$$P''_1 : P''_2 : P''_3 = P_1 : P_2 : P_3.$$

Les coordonnées normales d'un point sont donc proportionnelles aux distances (coordonnées normales absolues) du point aux côtés du triangle de référence.

2° Les droites fondamentales dans les coordonnées normales sont les côtés a, b, c du triangle ABC et une droite d dont les équations en coordonnées normales et en coordonnées normales absolues sont

$$X''_1 + X''_2 + X''_3 = 0 \quad \text{et} \quad X_1 + X_2 + X_3 = 0.$$

cette droite d coupe le côté BC du triangle ABC en un point G tel que

$$G_2 + G_3 = 0 \quad \text{ou} \quad G_2 = -G_3;$$

elle passe donc par les pieds des bissectrices extérieures du triangle ABC, ce qui se justifie aussi par le fait que la droite d est la polaire du point D dans le triangle ABC. — Soient p''_1, p''_2, p''_3 et p_1, p_2, p_3 les coordonnées normales d'une droite quelconque p et les distances de cette droite aux sommets du triangle ABC ; H le point où la droite p coupe BC. On a

$$p''_2 : p''_3 = a(b, c, d, p) = (C, B, G, H) = \frac{CG}{GB} : \frac{CH}{HB} = -\frac{\sin B}{\sin C} : -\frac{p_3}{p_2} = p_2 \sin B : p_3 \sin C,$$

d'où

$$p''_1 : p''_2 : p''_3 = p_1 \sin A : p_2 \sin B : p_3 \sin C$$

et ainsi les coordonnées normales d'une droite sont proportionnelles aux distances des sommets du triangle à la droite et aux sinus des angles du triangle.

48. **Coordonnées barycentriques.** — 1° Les coordonnées ternaires prennent le nom de coordonnées barycentriques lorsque les points fondamentaux A, B, C, D sont les sommets et le barycentre d'un triangle. Soient

P''_1, P''_2, P''_3 et P_1, P_2, P_3 les coordonnées barycentriques et les coordonnées normales absolues d'un point quelconque P; E, F les points où la droite BC est rencontrée par les droites AD, AP. On a

$$P''_2 : P''_3 = A(B,C,D,P) = (B,C,E,F) = \frac{BE}{EC} : \frac{BF}{FC} = \frac{FC}{BF} = \frac{F_2 \sin B}{F_3 \sin C} = \frac{P_2 \sin B}{P_3 \sin C} = \text{aire } PCA : \text{aire } PAB$$

d'où

$$P''_1 : P''_2 : P''_3 = P_1 \sin A : P_2 \sin B : P_3 \sin C = \text{aire } PBC : \text{aire } PCA : \text{aire } PAB.$$

Les coordonnées barycentriques du point P dans le triangle ABC sont donc proportionnelles aux aires des triangles PBC, PCA, PAB.

2° Les droites fondamentales dans le cas des coordonnées barycentriques sont les côtés du triangle ABC et la droite d à l'infini du plan du triangle. Soient p''_1, p''_2, p''_3 et p_1, p_2, p_3 les coordonnées barycentriques d'une droite quelconque p et les distances des sommets du triangle ABC à cette droite; G le point à l'infini de la droite BC et H le point où cette droite coupe la droite p. On a

$$p''_2 : p''_3 = a(b,c,d,p) = (C,B,G,H) = \frac{CG}{GB} : \frac{CH}{HB} = -1 : \frac{p_3}{p_2} = p_2 : p_3,$$

d'où

$$p''_1 : p''_2 : p''_3 = p_1 : p_2 : p_3$$

et ainsi les coordonnées barycentriques d'une droite sont proportionnelles aux distances des sommets du triangle fondamental à cette droite.

49. Coordonnées ternaires générales comparées aux coordonnées normales absolues.

1° Théorème. *Les coordonnées ternaires d'un point P dans le système ayant les points A, B, C, D pour points fondamentaux sont proportionnelles aux coordonnées normales absolues du point P et inversement proportionnelles aux coordonnées normales absolues du point D dans le triangle ABC.*

Soient P''_1, P''_2, P''_3 et P_1, P_2, P_3 les coordonnées ternaires du point P dans le système A, B, C, D et ses coordonnées normales absolues dans le triangle ABC; E, F les points où les droites AD, AP coupent la droite BC. On a

$$P''_2 : P''_3 = A(B,C,D,P) = (B,C,E,F) = \frac{BE}{EC} : \frac{BF}{FC} = \frac{E_3}{E_2} : \frac{F_3}{F_2} = \frac{D_3}{D_2} : \frac{P_3}{P_2} = \frac{P_2}{D_2} : \frac{P_3}{D_3},$$

d'où

$$P''_1 : P''_2 : P''_3 = \frac{P_1}{D_1} : \frac{P_2}{D_2} : \frac{P_3}{D_3}.$$

2° Théorème. *Les coordonnées ternaires d'une droite p dans le système ayant les droites a, b, c, d pour droites fondamentales sont proportionnelles aux distances des sommets du triangle abc à la droite p et inversement proportionnelles aux distances des sommets du triangle abc à la droite d.*

Soient p''_1, p''_2, p''_3 et p_1, p_2, p_3 les coordonnées ternaires de la droite p dans le système a, b, c, d et les distances des sommets du triangle abc à la droite p; G, H les points où les droites d, p coupent la droite a. On a

$$p''_2 : p''_3 = a(b,c,d,p) = (C,B,G,H) = \frac{CG}{GB} : \frac{CH}{HB} = \frac{d_3}{d_2} : \frac{p_3}{p_2} = \frac{p_2}{d_2} : \frac{p_3}{d_3},$$

d'où

$$p''_1 : p''_2 : p''_3 = \frac{p_1}{d_1} : \frac{p_2}{d_2} : \frac{p_3}{d_3}.$$

Chapitre IV: Les coordonnées quaternaires

§I: Les coordonnées quaternaires en général.

Coordonnées quaternaires d'un point ou d'un plan dans un espace à trois dimensions considéré comme lieu de points ou de plans. – 50. 1° Théorèmes.

1) Si A, B, C, D, X sont quatre points non situés dans

2) Si α, β, γ, δ, ζ sont quatre plans ne passant

un même plan et un cinquième point arbitraire d'un espace à trois dimensions rapporté à un trièdre coordonné quelconque, il existe des nombres $X'''_1, X'''_2, X'''_3, X'''_4$ pour lesquels on a

$$(X''') \quad X_i = X'''_1 A_i + X'''_2 B_i + X'''_3 C_i + X'''_4 D_i,$$

où $i = 1,2,3,4$, et

$$(1) \quad |X'''_1| + |X'''_2| + |X'''_3| + |X'''_4| \neq 0$$

pas par un même point et un cinquième plan arbitraire d'un espace à trois dimensions rapporté à un trièdre coordonné quelconque, il existe des nombres $\xi'''_1, \xi'''_2, \xi'''_3, \xi'''_4$ pour lesquels on a

$$(\xi''') \quad \xi_i = \xi'''_1 \alpha_i + \xi'''_2 \beta_i + \xi'''_3 \gamma_i + \xi'''_4 \delta_i,$$

où $i = 1,2,3,4$, et

$$(2) \quad |\xi'''_1| + |\xi'''_2| + |\xi'''_3| + |\xi'''_4| \neq 0$$

Il suffit de démontrer le premier théorème. Soient $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ des nombres quelconques. On a identiquement

$$|A_1 \; B_2 \; C_3 \; D_4 \; \xi_X| = 0$$

ou

$$|BCDX| . \xi_A - |ACDX| . \xi_B + |ABDX| . \xi_C - |ABCX| . \xi_X = 0.$$

Mais, par hypothèse,

$$|ABCD| \neq 0$$

et l'identité peut s'écrire

$$\xi_X = X'''_1 \xi_A + X'''_2 \xi_B + X'''_3 \xi_C + X'''_4 \xi_D,$$

en posant

$$X'''_1 = -\frac{|BCDX|}{|ABCD|}, \quad X'''_2 = \frac{|ACDX|}{|ABCD|}, \quad X'''_3 = -\frac{|ABDX|}{|ABCD|} \quad X'''_4 = \frac{|ABCX|}{|ABCD|}.$$

Les nombres $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ étant des nombres quelconques, on a donc déjà, pour $i = 1,2,3,4$,

$$X_i = X'''_1 A_i + X'''_2 B_i + X'''_3 C_i + X'''_4 D_i.$$

d'autres part, les conditions

$$X'''_1 = 0 \text{ ou } |BCDX| = 0, \quad X'''_2 = 0 \text{ ou } |ACDX| = 0, \quad X'''_3 = 0 \text{ ou } |ABDX| = 0, \quad X'''_4 = 0 \text{ ou } |ABCX| = 0$$

expriment que le point X est dans l'une ou l'autre des faces du tétraèdre ABCD. Le point X ne pouvant se trouver à la fois dans les quatre faces, un au moins des nombres $X'''_1, X'''_2, X'''_3, X'''_4$ n'est pas nul, ce qui justifie la condition (1).

2° Réciproques.

1) Réciproquement, les formules (X''') donnent les coordonnées homogènes d'un point de l'espace considéré, quelles que soient les valeurs des paramètres X'''_i, pourvu que la condition (1) soit remplie.

2) Réciproquement, les formules (ξ''') donnent les coordonnées homogènes d'un plan de l'espace considéré, quelles que soient les valeurs des paramètres ξ'''_i, pourvu que la condition (2) soit remplie.

Il suffit de démontrer le premier théorème. Comme on a

$$|ABCD| \neq 0,$$

si les formules (X''') donnaient

$$X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = 0,$$

on aurait

$$X'''_1 = X'''_2 = X'''_3 = X'''_4 = 0$$

et la condition (1) ne serait pas remplie, ce qui est contraire à l'hypothèse.

3° Définitions

1) Quand on remplace des valeurs données d'abord à $X'''_1, X'''_2, X'''_3, X'''_4$ dans les formules (X''') par d'autres proportionnelles, les nombres X_1, X_2, X_3, X_4 va-

2) Quand on remplace des valeurs données d'abord à $\xi'''_1, \xi'''_2, \xi'''_3, \xi'''_4$ dans les formules (ξ''') par d'autres proportionnelles, les nombres $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ varient dans

-rient dans le même rapport et le point X ne change pas. On considère tous les systèmes de valeurs proportionnelles de $X'''_1, X'''_2, X'''_3, X'''_4$ correspondant à un même point X comme équivalents; on conserve n'importe lequel de ces systèmes et on dit que les valeurs de $X'''_1, X'''_2, X'''_3, X'''_4$ ainsi adoptées sont les coordonnées quaternaires du point X. Les coordonnées quaternaires des points A, B, C, D sont

1,0,0,0 ; 0,1,0,0 ; 0,0,1,0 ; 0,0,0,1.

En faisant

$$X'''_1 = X'''_2 = X'''_3 = X'''_4 = 1,$$

les formules (X''') donnent, pour $i = 1,2,3,4$, les coordonnées homogènes

$$E_i = A_i + B_i + C_i + D_i$$

d'un point E. Le point est différent des points A, B, C, D et il n'est situé sur aucune arête ni sur aucune face du tétraèdre ABCD; en effet, si le point E était situé sur la face BCD, on aurait

$$|EBCD| = 0 \text{ ou } |A+B+C+D \;\; B \;\; C \;\; D| = 0 \text{ ou } |ABCD| = 0$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

3) Les points A, B, C, D, E sont appelés les points fondamentaux des coordonnées quaternaires X'''_i. Les points A, B, C, D ont été pris arbitrairement; mais il est facile de montrer qu'après avoir pris ces quatre points comme on aura voulu, on peut fixer le choix de leurs coordonnées homogènes pour que le point E occupe également telle place qu'on voudra à l'exception des points des faces du tétraèdre ABCD.

le même rapport et le plan ξ ne change pas. On considère tous les systèmes de valeurs proportionnelles de $\xi'''_1, \xi'''_2, \xi'''_3, \xi'''_4$ correspondant à un même plan ξ comme équivalents; on conserve n'importe lequel de ces systèmes et on dit que les valeurs de $\xi'''_1, \xi'''_2, \xi'''_3, \xi'''_4$ ainsi adoptées sont les coordonnées quaternaires du plan ξ. Les coordonnées quaternaires des plans $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont

1,0,0,0 ; 0,1,0,0 ; 0,0,1,0 ; 0,0,0,1.

En faisant

$$\xi'''_1 = \xi'''_2 = \xi'''_3 = \xi'''_4 = 1,$$

les formules (ξ''') donnent, pour $i = 1,2,3,4$, les coordonnées homogènes

$$\varepsilon_i = \alpha_i + \beta_i + \gamma_i + \delta_i$$

d'un plan ε. Ce plan est différent des plans $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et il ne passe par aucune arête ni par aucun sommet du tétraèdre $\alpha\beta\gamma\delta$, en effet, si le plan ε passait par le sommet $\beta\gamma\delta$, on aurait

$$|\varepsilon\beta\gamma\delta| = 0 \text{ ou } |\alpha+\beta+\gamma+\delta \;\; \beta \;\; \gamma \;\; \delta| = 0 \text{ ou } |\alpha\beta\gamma\delta| = 0$$

ce qui est contraire à l'hypotèse.

4) Les plans $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ sont appelés les plans fondamentaux des coordonnées quaternaires ξ'''_i. Les plans $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ont été pris arbitrairement; mais il est facile de montrer qu'après avoir pris ces quatre plans comme on aura voulu, on peut fixer le choix de leurs coordonnées homogènes pour que le plan ε occupe également telle place qu'on voudra, mais ne passant pas par un sommet du tétraèdre $\alpha\beta\gamma\delta$.

Il suffit de faire la démonstration de la propriété de gauche. Soient A_i, B_i, C_i, D_i $(i = 1,2,3,4)$ des coordonnées homogènes particulières des points A, B, C, D; si ces points ne sont pas dans un plan, ils sont les quatre premiers points fondamentaux des coordonnées quaternaires dès qu'on écrit

$$X_i = X'''_1 k_1 A_i + X'''_2 k_2 B_i + X'''_3 k_3 C_i + X'''_4 k_4 D_i ,$$

pour $i = 1,2,3,4$, quelles que soient les valeurs, toutes différentes de zéro, données à k_1, k_2, k_3, k_4. Un cinquième point E extérieur aux faces du tétraèdre ABCD et pour lequel on a adopté les coordonnées homogènes E_1, E_2, E_3, E_4, sera le cinquième point fondamental de ces coordonnées quaternaires, si on a, en outre,

$$E_i = k_1 A_i + k_2 B_i + k_3 C_i + k_4 D_i ,$$

pour $i = 1,2,3,4$; on a ainsi un système de quatre équations linéaires, non homogènes, pour calculer k_1, k_2, k_3, k_4. Les points A, B, C, D n'étant pas dans un plan, on a

$$|ABCD| \neq 0$$

et le système admet une solution et une seule. La propriété résulte alors de ce que cette solution est formée de valeurs de k_1, k_2, k_3, k_4 toutes différentes de zéro, en effet, si on avait $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$, le point E n'existerait pas et, si on avait k_1 ou k_2 ou k_3 ou $k_4 = 0$, le point E serait sur une des faces du tétraèdre ABCD.

4° Théorèmes.

1) Les coordonnées quaternaires $X'''_1, X'''_2, X'''_3, X'''_4$ du

2) Les coordonnées quaternaires $\xi'''_1, \xi'''_2, \xi'''_3, \xi'''_4$ du

point X ne sont pas altérées par un changement du trièdre coordonné adopté pour établir les formules (X''').

plan ξ ne sont pas altérées par un changement du trièdre coordonné adopté pour établir les formules (ξ''').

Il suffit de démontrer le premier théorème dont la démonstration ne diffère pas de celle faite dans le cas des coordonnées binaires (n°18, 5°).

5° Conclusion.

1) Cinq points A, B, C, D, E pris arbitrairement dans un espace à trois dimensions, lieu de points, définissent pour cet espace un système de coordonnées quaternaires dont on dit qu'ils sont les points fondamentaux; il faut cependant que quatre quelconques des points A, B, C, D, E ne soient pas dans un même plan. Tout autre point X de l'espace considéré est déterminé par les rapports de ses coordonnées quaternaires $X'''_1, X'''_2, X'''_3, X'''_4$. Les coordonnées quaternaires des points A, B, C, D, E sont (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1), (1,1,1,1). – On dit que les formules (X''') fournissent une représentation paramétrique d'un espace à trois dimensions comme lieu de points.

2) Cinq plans $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ pris arbitrairement dans un espace à trois dimensions, lieu de plans, définissent pour cet espace un système de coordonnées quaternaires dont on dit qu'ils sont les plans fondamentaux; il faut cependant que quatre quelconques des plans $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ ne passent pas par un même point. Tout autre plan ξ de l'espace considéré est déterminé par les rapports de ses coordonnées quaternaires $\xi'''_1, \xi'''_2, \xi'''_3, \xi'''_4$. Les coordonnées quaternaires des plans $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0) (0,0,0,1), (1,1,1,1). – On dit que les formules (ξ''') fournissent une représentation paramétrique d'un espace à trois dimensions comme lieu de plans.

51. 1° Théorèmes

1) La valeur du rapport anharmonique de la feuillée

$$PS(X, Y, Z, T)$$

est égale à

$$\frac{|X''' Z''' P''' S'''|}{|Z''' Y''' P''' S'''|} : \frac{|X''' T''' P''' S'''|}{|T''' Y''' P''' S'''|}.$$

2) La valeur du rapport anharmonique de la ponctuelle

$$\varpi\sigma(\xi, \eta, \zeta, \tau)$$

est égale à

$$\frac{|\xi''' \zeta''' \varpi''' \sigma'''|}{|\zeta''' \eta''' \varpi''' \sigma'''|} : \frac{|\xi''' \tau''' \varpi''' \sigma'''|}{|\tau''' \eta''' \varpi''' \sigma'''|}.$$

Il suffit de démontrer le premier théorème. En employant des coordonnées homogènes,

$$PS(X, Y, Z, T) = \frac{|XZPS|}{|ZYPS|} : \frac{|XTPS|}{|TYPS|}$$

et le théorème résulte de ce que, en vertu des formules (X'''),

$$|XZPS| = |X''' Z''' P''' S'''| \cdot |ABCD|$$

tandis que par hypothèse $|ABCD| \neq 0$.

2° Corollaires

1) Si $X'''_1, X'''_2, X'''_3, X'''_4$ sont les coordonnées quaternaires du point X par rapport aux points A, B, C, D, E, on a

$$AB(C, D, E, X) = X'''_3 : X'''_4$$

et cinq autres formules analogues pour les feuillées dont les supports sont les cinq arêtes du tétraèdre ABCD autres que AB.

2) Si $\xi'''_1, \xi'''_2, \xi'''_3, \xi'''_4$ sont les coordonnées quaternaires du plan ξ par rapport aux plans $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, on a

$$\alpha\beta(\gamma, \delta, \varepsilon, \xi) = \xi'''_3 : \xi'''_4$$

et cinq autres formules analogues pour les ponctuelles dont les supports sont les cinq arêtes du tétraèdre $\alpha\beta\gamma\delta$ autres que $\alpha\beta$.

3) Si les droites AE, AX coupent le plan BCD aux points F et Y, les trois nombres X'''_2, X'''_3, X'''_4 sont les coordonnées ternaires du point Y par rapport aux points B, C, D, F.

4) Si les droites $\alpha\varepsilon$, $\alpha\xi$ déterminent avec le point $\beta\gamma\delta$ les plans φ et η, les trois nombres $\xi'''_2, \xi'''_3, \xi'''_4$ sont les coordonnées ternaires du plan η par rapport aux plans $\beta, \gamma, \delta, \varphi$.

La propriété de gauche résulte de ce qu'on a

$$B(C, D, F, Y) = AB(C, D, E, X) = X'''_3 : X'''_4.$$

Coordonnées quaternaires du point et du plan dans un espace considéré comme lieu de points et de plans. 52. 1° Théorème.

Un espace à trois dimensions étant considéré comme lieu de points et de plans, on peut placer les éléments fondamentaux des deux systèmes de coordonnées quaternaires pour que la condition

$$(1) \qquad \xi'''_1 X'''_1 + \xi'''_2 X'''_2 + \xi'''_3 X'''_3 + \xi'''_4 X'''_4 = 0$$

exprime que le point $X(X'''_1, X'''_2, X'''_3, X'''_4)$ est dans le plan $\xi(\xi'''_1, \xi'''_2, \xi'''_3, \xi'''_4)$.

La démonstration de ce théorème consiste à résoudre la question suivante: Ayant déjà rapporté le point X d'un espace à trois dimensions aux points fondamentaux A, B, C, D, E, à quels plans fondamentaux $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ faut-il rapporter le plan ξ de cet espace pour que la condition (1) exprime que le point X est dans le plan ξ ?

Dire que les points A, B, C, D, E sont les points fondamentaux des coordonnées quaternaires, revient à dire qu'ayant rapporté l'espace considéré à un trièdre coordonné arbitraire, on a ensuite fixé le choix des coordonnées homogènes $A_i, B_i, C_i, D_i, (i = 1, 2, 3, 4)$, des points A, B, C, D pour que les coordonnées homogènes des points E, X soient

$$E_i = A_i + B_i + C_i + D_i \qquad \text{et} \qquad X_i = X'''_1 A_i + X'''_2 B_i + X'''_3 C_i + X'''_4 D_i .$$

De même, si les plans $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ sont les plans fondamentaux d'un second système de coordonnées quaternaires, on a

$$\varepsilon_i = \alpha_i + \beta_i + \gamma_i + \delta_i \qquad \text{et} \qquad \xi_i = \xi'''_1 \alpha_i + \xi'''_2 \beta_i + \xi'''_3 \gamma_i + \xi'''_4 \delta_i .$$

Pour que le point X soit dans le plan ξ, il faut et il suffit qu'on ait

$$\xi_1 X_1 + \xi_2 X_2 + \xi_3 X_3 + \xi_4 X_4 = 0,$$

ou, en remplaçant X_i et ξ_i par leurs valeurs,

$$\begin{aligned} &\xi'''_1 X'''_1 \alpha_A + \xi'''_1 X'''_2 \alpha_B + \xi'''_1 X_3 \alpha_C + \xi'''_1 X'''_4 \alpha_D \\ &+ \xi'''_2 X'''_1 \beta_A + \xi'''_2 X'''_2 \beta_B + \xi'''_2 X'''_3 \beta_C + \xi'''_2 X'''_4 \beta_D \\ &+ \xi'''_3 X'''_1 \gamma_A + \xi'''_3 X'''_2 \gamma_B + \xi'''_3 X'''_3 \gamma_C + \xi'''_3 X'''_4 \gamma_D \\ &+ \xi'''_4 X'''_1 \delta_A + \xi'''_4 X'''_2 \delta_B + \xi'''_4 X'''_3 \delta_C + \xi'''_4 X'''_4 \delta_D = 0 \end{aligned}$$

En plaçant les plans $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sur les faces du tétraèdre $ABCD$ opposées aux sommets A, B, C, D, on a

$$\alpha_A \neq 0, \quad \alpha_B = 0, \quad \alpha_C = 0, \quad \alpha_D = 0, \qquad \beta_A = 0, \quad \beta_B \neq 0, \quad \beta_C = 0, \quad \beta_D = 0,$$
$$\gamma_A = 0, \quad \gamma_B = 0, \quad \gamma_C \neq 0, \quad \gamma_D = 0, \qquad \delta_A = 0, \quad \delta_B = 0, \quad \delta_C = 0, \quad \delta_D \neq 0 .$$

et la relation précédente se réduit déjà à

$$\xi'''_1 X'''_1 \alpha_A + \xi'''_2 X'''_2 \beta_B + \xi'''_3 X'''_3 \gamma_C + \xi'''_4 X'''_4 \delta_D = 0.$$

En même temps, les coordonnées homogènes des plans $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont

$$\alpha_i = k\,|BCD|_i, \qquad \beta_i = k'\,|CDA|_i, \qquad \gamma_i = k''\,|DAB|_i, \qquad \delta_i = k'''\,|ABC|_i .$$

On aura donc

$$\alpha_A = \beta_B = \gamma_C = \delta_D ,$$

et le problème sera résolu, en donnant à k, k', k'', k''' les valeurs $+1, -1, +1, -1$ pour lesquelles

$$\alpha_A = \beta_B = \gamma_C = \delta_D = |ABCD| \neq 0.$$

Ayant ainsi fixé le choix des coordonnées homogènes des plans $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, le plan ε est déterminé par ses coordonnées homogènes

$$\varepsilon_i = |BCD|_i - |CDA|_i + |DAB|_i - |ABC|_i .$$

2° Théorème.

Si F est le point où le plan ε coupe la droite CD et φ le plan qui projette le point E de la droite $\gamma\delta$, la

feuillée $AB(C,D,E,F)$ et la ponctuelle $\alpha\beta(\gamma,\delta,\varepsilon,\varphi)$ sont harmoniques.
Il suffit de démontrer la première partie du théorème. Le point F étant situé sur la droite CD et dans le plan ε, on a

$$F'''_1 = 0, \quad F'''_2 = 0, \quad F'''_1 + F'''_2 + F'''_3 + F'''_4 = 0.$$

On peut donc faire

$$F'''_1 = 0 \quad F'''_2 = 0 \quad F'''_3 = 1 \quad F'''_4 = -1.$$

et on a

$$AB(C,D,E,F) = F'''_3 : F'''_4 = -1.$$

3° Définition. Le point E s'appelle le pôle du plan ε et celui-ci, le plan polaire du point E par rapport au tétraèdre ABCD ou $\alpha\beta\gamma\delta$.
4° Corollaire. Le plan ε coupe toute face du tétraèdre $ABCD \equiv \alpha\beta\gamma\delta$ suivant une droite qui est, par rapport au triangle des sommets du tétraèdre situés dans cette face, la polaire du point d'intersection avec la droite joignant le sommet opposé du tétraèdre au point E; de même la droite AE est la polaire dans le trièdre $\beta\gamma\delta$ du plan que le point A détermine avec la droite $\alpha\varepsilon$.

Coordonnées quaternaires de la droite. — 53. 1°. Considérons la droite $p \equiv XY \equiv \xi\eta$ rapportée aux éléments fondamentaux A, B, C, D, E ou $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$. Dans le système des coordonnées homogènes, la droite p admet deux systèmes de coordonnées

$$p_{ij} = X_i Y_j - X_j Y_i, \qquad \varpi_{ij} = \xi_i \eta_j - \xi_j \eta_i$$

où i et $j = 1,2,3,4$ et $i \neq j$.
Or

$$X_i = X'''_1 A_i + X'''_2 B_i + X'''_3 C_i + X'''_4 D_i \quad \text{et} \quad \xi_i = \xi'''_1 \alpha_i + \xi'''_2 \beta_i + \xi'''_3 \gamma_i + \xi'''_4 \delta_i.$$

Donc

$$p_{ij} = \begin{vmatrix} X_i & Y_i \\ X_j & Y_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_i & B_i & C_i & D_i \\ A_j & B_j & C_j & D_j \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X'''_1 & X'''_2 & X'''_3 & X'''_4 \\ Y'''_1 & Y'''_2 & Y'''_3 & Y'''_4 \end{vmatrix}$$

et

$$\varpi_{ij} = \begin{vmatrix} \xi_i & \eta_i \\ \xi_j & \eta_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_i & \beta_i & \gamma_i & \delta_i \\ \alpha_j & \beta_j & \gamma_j & \delta_j \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi'''_1 & \xi'''_2 & \xi'''_3 & \xi'''_4 \\ \eta'''_1 & \eta'''_2 & \eta'''_3 & \eta'''_4 \end{vmatrix}$$

Les déterminants à quatre éléments tirés des tableaux

$$\begin{vmatrix} A_i & B_i & C_i & D_i \\ A_j & B_j & C_j & D_j \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \alpha_i & \beta_i & \gamma_i & \delta_i \\ \alpha_j & \beta_j & \gamma_j & \delta_j \end{vmatrix}$$

sont les coordonnées d'indices ij des arêtes du tétraèdre $ABCD \equiv \alpha\beta\gamma\delta$ en coordonnées homogènes; ceux tirés des tableaux

$$\begin{vmatrix} X'''_1 & X'''_2 & X'''_3 & X'''_4 \\ Y'''_1 & Y'''_2 & Y'''_3 & Y'''_4 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \xi'''_1 & \xi'''_2 & \xi'''_3 & \xi'''_4 \\ \eta'''_1 & \eta'''_2 & \eta'''_3 & \eta'''_4 \end{vmatrix}$$

sont pour le système des coordonnées quaternaires des quantités analogues aux p_{ij} et ϖ_{ij} des coordonnées homogènes; on les désigne par p'''_{ij} et ϖ'''_{ij} et on dit qu'elles sont les coordonnées quaternaires ponctuelles et tangentielles de la droite $p \equiv XY \equiv \xi\eta$.

2° Remarques. 1) On aurait pu définir les coordonnées quaternaires p'''_{ij}, ϖ'''_{ij} par des considérations analogues à celles faites pour les coordonnées homogènes (n° 17). Les nouvelles coordonnées vérifient donc les relations

$$p'''_{12} p'''_{34} + p'''_{13} p'''_{42} + p'''_{14} p'''_{23} = 0 \qquad \varpi'''_{12} \varpi'''_{34} + \varpi'''_{13} \varpi'''_{42} + \varpi'''_{14} \varpi'''_{23} = 0$$

$$p'''_{12} : p'''_{13} : p'''_{14} : p'''_{34} : p'''_{42} : p'''_{23} = \varpi'''_{34} : \varpi_{42} : \varpi'''_{23} : \varpi'''_{12} : \varpi'''_{13} : \varpi'''_{14}.$$

Les coordonnées P'''_{ij} conservent les mêmes rapports mutuels quand on remplace les points X, Y par d'autres sur la droite p, de même que les quantités ϖ'''_{ij} quand on remplace les plans ξ, η par d'autres passant par la droite p.
2) Les nombres P'''_{ij}, ϖ'''_{ij} ont une signification géométrique qui les rattache à la notion du rapport anharmonique. Les rapports des nombres P'''_{ij} ne dépendant pas de la position des points X, Y sur la droite p, on peut mettre Y à la rencontre de la droite et du plan $BCD \equiv \alpha$. De cette manière, les nombres P'''_{ij} sont les déterminants à quatre éléments tirés du tableau

$$\begin{vmatrix} X'''_1 & X'''_2 & X'''_3 & X'''_4 \\ 0 & Y'''_2 & Y'''_3 & Y'''_4 \end{vmatrix}$$

Il en résulte immédiatement

$$P'''_{12} : P'''_{13} : P'''_{14} = Y'''_2 : Y'''_3 : Y'''_4 .$$

Mais si la droite AE coupe le plan $BCD \equiv \alpha$ au point F, Y'''_2, Y'''_3, Y'''_4 sont les coordonnées ternaires du point Y dans le plan α rapporté aux points fondamentaux B, C, D, F; on a donc

$$AB(C, D, E, Y) = B(C, D, E, Y) = Y'''_3 : Y'''_4 = P'''_{13} : P'''_{14} .$$

De la même manière, si le plan η coïncide avec le plan Ap et si le plan φ est le plan du point A et de la droite $\alpha\varepsilon$, on a

$$\alpha\beta(\gamma, \delta, \varepsilon, \eta) = \beta(\gamma, \delta; \varphi, \eta) = \eta'''_3 : \eta'''_4 = \varpi'''_{13} : \varpi'''_{14} .$$

car $\eta'''_{12}, \eta'''_{13}, \eta'''_{13}$ sont les coordonnées ternaires du plan η dans la gerbe A rapportée aux plans fondamentaux $\beta, \gamma, \delta, \varphi$.
3) On observe que tous les systèmes de formules qui définissent les coordonnées quaternaires en fonction des coordonnées homogènes sont des systèmes d'équations de substitutions linéaires à modules différents de zéro. On peut donc employer les formules habituelles de la théorie des formes. Ainsi, on pourra écrire

$$X_i = a_{i1} X'''_1 + a_{i2} X'''_2 + a_{i3} X'''_3 + a_{i4} X'''_4$$

avec

$$a = | a_{11} \quad a_{22} \quad a_{33} \quad a_{44} | \neq 0 .$$

Si

$$\alpha = | \alpha_{11} \quad \alpha_{22} \quad \alpha_{33} \quad \alpha_{44} |$$

est le déterminant adjoint du déterminant a, on aura

$$a X'''_i = \alpha_{1i} X_1 + \alpha_{2i} X_2 + \alpha_{3i} X_3 + \alpha_{4i} X_4 .$$

En identifiant ξ_X avec $\xi'''_{X'''}$, on aura ensuite

$$\xi'''_i = a_{1i} \xi_1 + a_{2i} \xi_2 + a_{3i} \xi_3 + a_{4i} \xi_4 ,$$
$$a \xi_i = \alpha_{i1} \xi'''_1 + \alpha_{i2} \xi'''_2 + \alpha_{i3} \xi'''_3 + \alpha_{i4} \xi'''_4 .$$

Pour écrire les formules relatives aux coordonnées homogènes ou quaternaires des droites, on désigne par a^{rs}_{ij} et α^{rs}_{ij} les déterminants des quatre éléments communs aux colonnes i, j et aux lignes r, s des déterminants a, α.
Si P_{ij}, ϖ_{ij} et P'''_{ij}, ϖ'''_{ij} sont les coordonnées homogènes et tangentielles de la droite $p \equiv XY \equiv \xi\eta$, on a d'abord

$$P_{ij} = \begin{vmatrix} X_i & Y_i \\ X_j & Y_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & a_{i4} \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} & a_{j4} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X'''_1 & X'''_2 & X'''_3 & X'''_4 \\ Y'''_1 & Y'''_2 & Y'''_3 & Y'''_4 \end{vmatrix}$$

et trois autres formules analogues donnant ϖ_{ij}, P'''_{ij}, ϖ'''_{ij}. On a ensuite

$$P_{ij} = a^{12}_{ij} P'''_{12} + a^{13}_{ij} P'''_{13} + a^{14}_{ij} P'''_{14} + a^{34}_{ij} P'''_{34} + a^{42}_{ij} P'''_{42} + a^{23}_{ij} P'''_{23} ,$$
$$P'''_{ij} = \alpha^{ij}_{12} P_{12} + \alpha^{ij}_{13} P_{13} + \alpha^{ij}_{14} P_{14} + \alpha^{ij}_{34} P_{34} + \alpha^{ij}_{42} P_{42} + \alpha^{ij}_{23} P_{23} ,$$

$$\varpi_{ij} = \alpha_{ij}^{12}\varpi_{12}''' + \alpha_{ij}^{13}\varpi_{13}''' + \alpha_{ij}^{14}\varpi_{14}''' + \alpha_{ij}^{34}\varpi_{34}''' + \alpha_{ij}^{42}\varpi_{42}''' + \alpha_{ij}^{23}\varpi_{23}''',$$
$$\varpi_{ij}''' = a_{12}^{ij}\varpi_{12} + a_{13}^{ij}\varpi_{13} + a_{14}^{ij}\varpi_{14} + a_{34}^{ij}\varpi_{34} + a_{42}^{ij}\varpi_{42} + a_{23}^{ij}\varpi_{23}.$$

Ces dernières formules définissent quatre systèmes de substitutions linéaires dont les modules, égaux à a^3 et a^9, sont différents de zéro.

4) On pourrait refaire à l'aide des coordonnées quaternaires tous les calculs et tous les raisonnements qu'on a faits avec les coordonnées homogènes pour établir les théories des coordonnées binaires et ternaires dans les formes fondamentales de première et de seconde espèce.

§ II : Pôles et polaires dans le tétraèdre.

54. **Notations.** On désigne par x_1, x_2, x_3, x_4 et $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ les coordonnées quaternaires d'un point X et d'un plan ξ par rapport à des éléments fondamentaux associés comme on a fait au n° 53, par

$$\alpha_X = 0, \quad \beta_X = 0, \quad \gamma_X = 0, \quad \delta_X = 0, \quad \varepsilon_X = 0,$$
$$\xi_A = 0, \quad \xi_B = 0, \quad \xi_C = 0, \quad \xi_D = 0, \quad \xi_E = 0,$$

les équations des faces et des sommets d'un tétraèdre $\alpha\beta\gamma\delta \equiv ABCD$, d'un plan ε et d'un point E.

55. **Problème.** *Connaissant les équations $\alpha_X = 0$, $\beta_X = 0$, $\gamma_X = 0$, $\delta_X = 0$ des faces du tétraèdre $ABCD \equiv \alpha\beta\gamma\delta$ et les coordonnées E_1, E_2, E_3, E_4 du point E, on demande l'équation du plan polaire ε de ce point par rapport au tétraèdre.*

Soit F le point où le plan ε coupe l'arête CD du tétraèdre. La feuillée $AB(C, D, E, F)$ est harmonique et les équations des plans ABE, ABF sont

$$\frac{\gamma_X}{\gamma_E} - \frac{\delta_X}{\delta_E} = 0, \qquad \frac{\gamma_X}{\gamma_E} + \frac{\delta_X}{\delta_E} = 0.$$

Il en résulte que l'équation du plan ε est

$$\frac{\alpha_X}{\alpha_E} + \frac{\beta_X}{\beta_E} + \frac{\gamma_X}{\gamma_E} + \frac{\delta_X}{\delta_E} = 0.$$

56. **Problème.** *Connaissant les équations $\xi_A = 0$, $\xi_B = 0$, $\xi_C = 0$, $\xi_D = 0$ des sommets du tétraèdre $ABCD \equiv \alpha\beta\gamma\delta$ et les coordonnées $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ du plan ε, on demande l'équation du pôle E de ce plan par rapport au tétraèdre.*

Soit φ le plan qui passe par l'arête CD du tétraèdre et le point E. La ponctuelle $\alpha\beta(\gamma, \delta, \varepsilon, \varphi)$ est harmonique et les équations des points $\alpha\beta\varepsilon$, $\alpha\beta\varphi$ sont

$$\frac{\xi_C}{\varepsilon_C} - \frac{\xi_D}{\varepsilon_D} = 0, \qquad \frac{\xi_C}{\varepsilon_C} + \frac{\xi_D}{\varepsilon_D} = 0.$$

L'équation du point E est donc

$$\frac{\xi_A}{\varepsilon_A} + \frac{\xi_B}{\varepsilon_B} + \frac{\xi_C}{\varepsilon_C} + \frac{\xi_D}{\varepsilon_D} = 0.$$

§ III : De la transformation des coordonnées quaternaires.

57. Il suffira de considérer le cas du point. Les raisonnements seront applicables au plan et les formules servant à définir les deux systèmes de coordonnées de la droite serviront à établir les formules de transformation pour la droite.

Soient x_i, x'_i, $(i = 1, 2, 3, 4)$, les coordonnées quaternaires du point X par rapport aux points fonda=

mentaux A, B, C, D, E et A', B', C', D', E'; $a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, a_{i4}$ les coordonnées quaternaires des points A', B', C', D' et e_1, e_2, e_3, e_4 celles du point E' dans le premier système; $|\alpha_{11}\,\alpha_{22}\,\alpha_{33}\,\alpha_{44}|$ le déterminant adjoint de $|a_{11}\,a_{22}\,a_{33}\,a_{44}|$.
En égalant deux valeurs du rapport anharmonique A'B' (C', D', E', X), on a

$$X'_3 : X'_4 = \frac{\Sigma \alpha_{3i} X_i}{\Sigma \alpha_{3i} e_i} : \frac{\Sigma \alpha_{4i} X_i}{\Sigma \alpha_{4i} e_i};$$

les formules cherchées peuvent donc s'écrire $(i = 1, 2, 3, 4)$

$$X'_i = A_{1i} X_1 + A_{2i} X_2 + A_{3i} X_3 + A_{4i} X_4,$$

avec $|A_{11}\,A_{22}\,A_{33}\,A_{44}| \neq 0$, de sorte que toute transformation de coordonnées quaternaires revient à une substitution linéaire de module différent de zéro.

§IV: Cas particuliers de coordonnées quaternaires.

58. Les cas particuliers des coordonnées quaternaires dans un espace à trois dimensions considéré comme lieu de points ou de plans sont analogues à ceux des coordonnées ternaires dans un système plan considéré comme lieu de points ou de droites.
1° Dans le cas des coordonnées homogènes, les points fondamentaux sont les points à l'infini sur les axes coordonnés, le sommet du trièdre coordonné et le point de coordonnées cartésiennes 1, 1, 1, 1.
2° Dans le cas des coordonnées normales, les points fondamentaux sont les sommets d'un tétraèdre et le centre de la sphère inscrite.
3° Dans le cas des coordonnées barycentriques, les points fondamentaux sont les sommets et le barycentre d'un tétraèdre.

§V: Le complexe linéaire.

59. 1° Complexe. On donne le nom de complexe à l'ensemble des droites dont les coordonnées vérifient une même équation qu'on appelle l'équation du complexe. Cette équation est nécessairement homogène et si on peut l'écrire

$$\varphi(X_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{34}, X_{42}, X_{23}) = 0,$$

on peut aussi l'écrire

$$\varphi(\xi_{34}, \xi_{42}, \xi_{23}, \xi_{12}, \xi_{13}, \xi_{14}) = 0,$$

puisqu'on a trouvé que

$$X_{12} : X_{13} : X_{14} : X_{34} : X_{42} : X_{23} = \xi_{34} : \xi_{42} : \xi_{23} : \xi_{12} : \xi_{13} : \xi_{14}.$$

2° Congruence. On donne le nom de congruence à l'ensemble des droites dont les coordonnées vérifient à la fois deux équations données qu'on appelle les équations de la congruence, ou à l'ensemble des droites communes à deux complexes et on dit que toute congruence est l'intersection de deux complexes.
3° Série réglée. Une série réglée est l'ensemble des droites dont les coordonnées vérifient trois équations simultanées appelées les équations de la série réglée, ou, ce qui revient au même, aux droites communes à trois complexes ou des droites communes à un complexe et une congruence. On peut donc dire qu'une série réglée est l'intersection de trois complexes ou l'intersection d'un complexe et d'une congruence. En général, les droites d'une série réglée sont les génératrices rectilignes d'une surface réglée.
4° Complexe linéaire. Un complexe linéaire est un complexe dont l'équation est linéaire et peut donc s'écrire sous les deux formes équivalentes

(1) $$a_{12}X_{12} + a_{13}X_{13} + a_{14}X_{14} + a_{34}X_{34} + a_{42}X_{42} + a_{23}X_{23} = 0$$

et

(2) $$a_{12}\xi_{34}+a_{13}\xi_{42}+a_{14}\xi_{23}+a_{34}\xi_{12}+a_{42}\xi_{13}+a_{23}\xi_{14}=0.$$

Si l'on avait

(3) $$a_{12}a_{34}+a_{13}a_{42}+a_{14}a_{23}=0,$$

on pourrait considérer les nombres $a_{34}, a_{42}, a_{23}, a_{12}, a_{13}, a_{14}$ comme les coordonnées ponctuelles d'une droite a; les conditions (1) et (2) exprimeraient que toute droite x du complexe linéaire est dans un même plan avec la droite a; le complexe linéaire serait formé des droites s'appuyant sur une même droite a; un pareil complexe linéaire est dit singulier ou spécial; on ne s'en occupera pas et on supposera donc

(4) $$a_{12}a_{34}+a_{13}a_{42}+a_{14}a_{23}\neq 0.$$

60. Théorème. *Les droites d'un complexe linéaire qui passent par un même point sont dans un même plan et celles qui sont dans un même plan passent par un même point.*

1° Si la droite x joint les points A, X, ses coordonnées ponctuelles sont

$$X_{ij}=A_iX_j-A_jX_i.$$

Pour que cette droite appartienne au complexe linéaire défini par l'équation (1), il faut et il suffit qu'on ait

$$(-a_{12}A_2-a_{13}A_3-a_{14}A_4)X_1+(a_{12}A_1-a_{23}A_3-a_{42}A_4)X_2+(a_{13}A_1+a_{23}A_2-a_{34}A_4)X_3+(a_{14}A_1-a_{42}A_2+a_{34}A_4)X_4=0.$$

Pour donner plus de symétrie à cette équation, on y fait

$$a_{42}=-a_{24}$$

et les coefficients de l'équation s'écrivent

$$(\alpha)\quad\begin{aligned}
\alpha_1&=0.A_1-a_{12}A_2-a_{13}A_3-a_{14}A_4,\\
\alpha_2&=a_{12}A_1+0.A_2-a_{23}A_3-a_{24}A_4,\\
\alpha_3&=a_{13}A_1+a_{23}A_2+0.A_3-a_{34}A_4,\\
\alpha_4&=a_{14}A_1+a_{24}A_2+a_{34}A_3+0.A_4.
\end{aligned}$$

Si on avait

$$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0,$$

alors qu'on suppose

$$|A_1|+|A_2|+|A_3|+|A_4|\neq 0,$$

on aurait

$$\begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14}\\ a_{12} & 0 & -a_{23} & -a_{24}\\ a_{13} & a_{23} & 0 & -a_{34}\\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & 0\end{vmatrix}=0 \quad\text{ou}\quad a_{12}a_{34}+a_{13}a_{42}+a_{14}a_{23}=0,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse (4).

On a donc

$$|\alpha_1|+|\alpha_2|+|\alpha_3|+|\alpha_4|\neq 0$$

et le lieu du point X ou des droites du complexe linéaire (1) qui passent par le point A est le plan α dont les coordonnées sont les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ définis par les formules (α) en fonction des coordonnées A_1, A_2, A_3, A_4 du point A. Ce plan s'appelle le plan focal du point A pour le complexe linéaire donné.

2° La démonstration de la seconde partie du théorème est identique à la précédente en remplaçant les coordonnées ponctuelles par des coordonnées tangentielles. Si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ sont les coordonnées d'un plan donné et $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ les coordonnées d'un plan variable, les coordonnées tangentielles de la droite $\alpha\xi$ sont

$$\xi_{ij}=\alpha_i\xi_j-\alpha_j\xi_i.$$

Pour que cette droite appartienne au complexe linéaire défini par l'équation (2), il faut et il suffit qu'on ait

$$(-a_{34}\alpha_2 - a_{42}\alpha_3 - a_{23}\alpha_4)\xi_1 + (a_{34}\alpha_1 - a_{14}\alpha_3 + a_{13}\alpha_4)\xi_2 + (a_{42}\alpha_1 + a_{14}\alpha_2 - a_{12}\alpha_4)\xi_3 + (a_{23}\alpha_1 - a_{13}\alpha_2 + a_{12}\alpha_3)\xi_4 = 0.$$

on fait

$$a_{13} = -a_{31}$$

et on pose

$$(A) \qquad \begin{aligned} A_1 &= 0.\alpha_1 - a_{34}\alpha_2 - a_{42}\alpha_3 - a_{23}\alpha_4, \\ A_2 &= a_{34}\alpha_1 + 0.\alpha_2 - a_{14}\alpha_3 - a_{31}\alpha_4, \\ A_3 &= a_{42}\alpha_1 + a_{14}\alpha_2 + 0.\alpha_3 - a_{12}\alpha_4, \\ A_4 &= a_{23}\alpha_1 + a_{31}\alpha_2 + a_{12}\alpha_3 + 0.\alpha_4. \end{aligned}$$

Si on avait

$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 0,$$

alors qu'on suppose

$$|\alpha_1| + |\alpha_2| + |\alpha_3| + |\alpha_4| \neq 0,$$

on aurait

$$\begin{vmatrix} 0 & -a_{34} & -a_{42} & -a_{23} \\ a_{34} & 0 & -a_{14} & -a_{31} \\ a_{42} & a_{14} & 0 & -a_{12} \\ a_{23} & a_{31} & a_{13} & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ ou } a_{12}a_{34} + a_{13}a_{42} + a_{14}a_{23} = 0,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse, on a donc

$$|A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| \neq 0$$

et le lieu du plan ξ ou des droites du complexe linéaire (2) qui sont dans le plan α est un point A dont les coordonnées sont les nombres A_1, A_2, A_3, A_4 définis par les formules (A) en fonction des coordonnées $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ du plan α. Ce point A s'appelle le foyer du plan α pour le complexe considéré.

3° **Remarque.** Si le complexe linéaire est le même dans les deux parties du théorème et si le plan α considéré au 2° est celui qu'on a trouvé au 1°, le point A qu'on trouve au 2° est celui qu'on s'est donné au 1°, c'est à dire que tout point est le foyer de son plan focal et réciproquement. En effet, en remplaçant, dans les formules (A) les quantités α_i par les valeurs données par les formules (α) on a

$$\begin{aligned} 0.\alpha_1 - a_{34}\alpha_2 - a_{42}\alpha_3 - a_{23}\alpha_4 &= -a_{34}(a_{12}A_1 - a_{23}A_3 - a_{24}A_4) - a_{42}(a_{13}A_1 + a_{23}A_2 - a_{34}A_4) - a_{23}(a_{14}A_1 + a_{42}A_2 + a_{34}A_3) \\ &= -(a_{12}a_{34} + a_{13}a_{42} + a_{14}a_{23})A_1 = A_1 \text{ multiplié par une constante non nulle.} \end{aligned}$$

ce qui démontre la propriété.

N.B. – On dit que le complexe linéaire établit une correspondance réciproque et univoque entre les points et les plans de l'espace

61. **Théorèmes.** *Si le plan focal α du point A passe par le point B, le plan focal β du point B pour le même complexe linéaire passe par le point A ; ou bien, ce qui revient au même, si le foyer A du plan α est dans le plan β, le foyer B du plan β pour le même complexe linéaire est dans le plan α.*

Le point B étant dans le plan focal α du point A, la droite AB est une droite du complexe linéaire considéré ; cette droite appartient donc au plan focal β du point B et ainsi ce plan β passe par le point A.

N.B. Cette propriété résulte aussi de ce que l'équation du complexe linéaire mise sous les formes

$$a_{12}(X_1Y_2 - X_2Y_1) + \cdots\cdots\cdots + a_{23}(X_2Y_3 - X_3Y_2) = 0,$$
$$a_{12}(\xi_3\eta_4 - \xi_4\eta_3) + \cdots\cdots\cdots + a_{23}(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1) = 0,$$

est l'équation du plan focal ξ du point X en coordonnées courantes Y_i ou du plan focal η du point Y en coordonnées courantes X_i et l'équation du foyer X du plan ξ en coordonnées courantes η_i ou du foyer Y du plan η en coordonnées courantes ξ_i.

62. Corollaires. 1° Les plans focaux des points d'un plan passent par le foyer de ce plan.
2° Les foyers des plans passant par un point sont dans le plan focal de ce point.
3° Si un point glisse sur une droite du complexe linéaire, le plan focal du point tourne autour de cette droite et réciproquement.
4° Si un point glisse sur une droite d_1 étrangère au complexe linéaire, le plan focal du point tourne autour d'une seconde droite d_2 étrangère au complexe linéaire, et si un point glisse sur la droite d_2, le plan focal de ce point tourne autour de la droite d_1; les droites d_1, d_2 sont gauches.

Définition. Les droites d_1, d_2 sont dites conjuguées par rapport au complexe linéaire. Toute droite qui les coupe est une droite du complexe linéaire et toute droite du complexe linéaire qui coupe l'une d'elles, coupe également l'autre.

N.B. A cause du 3°, toute droite du complexe linéaire peut être considérée comme conjuguée à elle-même.

63. Théorème. Lorsque deux droites se coupent, il en est de même des droites qui leur sont respectivement conjuguées pour un même complexe linéaire.

Si les droites d_1, d'_1 se coupent, elles ont un point commun A et elles sont dans un même plan β. Dès lors, les droites d_2, d'_2 qui leur sont respectivement conjuguées sont dans le plan focal α du point A et se coupent au foyer B du plan β.

Remarque. – 1° Si les droites d_1, d'_1 appartiennent au complexe linéaire, les droites d_2, d'_2 se confondent avec elles, et le point B est confondu avec le point A et le plan β coïncide avec le plan α. Les droites menées par le point A dans le plan α sont les seules droites du complexe linéaire rencontrant à la fois les deux droites d_1 et d'_1.
2° Si la droite d_1 seule appartient au complexe linéaire, elle se confond avec la droite d_2, la droite d'_2 la coupe en un point B différent du point A et forme avec elle un plan α différent du plan β. Les droites du complexe linéaire qui coupent à la fois les deux droites d_1 et d'_1 sont celles qui passent par le point A dans le plan α et celles qui passent par le point B dans le plan β.
3° Lorsque les droites d_1, d'_1 n'appartiennent ni l'une ni l'autre au complexe linéaire, le point A est différent du point B et le plan α est différent du plan β. Les droites du complexe linéaire qui rencontrent les droites d_1, d'_1 sont celles qui passent par le point A dans le plan α et celles issues du point B dans le plan β.

64. Théorème. Si les droites d_1, d_2 sont des droites conjuguées distinctes et si d est une droite quelconque gauche aux droites d_1, d_2, les droites du complexe linéaire qui rencontrent les droites d_1, d_2 sont les génératrices rectilignes d'un même mode d'une quadrique réglée.

En effet, les droites du complexe linéaire qui rencontrent les droites d_1, d sont précisément les droites qui rencontrent à la fois les trois droites d_1, d_2, d; elles sont donc les génératrices rectilignes d'un même mode d'une quadrique réglée dont les droites d_1, d_2, d sont des génératrices rectilignes du second mode.

65. Problème. Construire le foyer d'un plan et le plan focal d'un point pour un complexe linéaire, connaissant deux couples de droites conjuguées distinctes, ou deux droites conjuguées distinctes et une droite du complexe.

1° On donne les droites conjuguées d_1 et d_2, d'_1 et d'_2. 1) Si le plan α coupe les quatre droites aux points D_1, D_2, D'_1, D'_2, les droites D_1D_2, $D'_1D'_2$ sont des droites du complexe linéaire et leur point d'intersection

est le foyer A du plan α.– 2) Inversement, étant donné le point A, on construit les droites issues de ce point qui coupent les droites d_1 et d_2, d'_1 et d'_2 ; leur plan est le plan focal du point A.

N.B.– Les droites d_1, d_2, d'_1 et d'_2, dans le cas le plus général, doivent être les génératrices rectilignes d'un même mode d'une quadrique réglée.

2° On donne les droites conjuguées d_1, d_2 et la droite d du complexe linéaire. 1) Si le plan α coupe les droites d_1, d_2 aux points D_1, D_2, son foyer A est sur la droite D_1D_2. Mais si B est le point où le plan α coupe la droite d, le plan focal β du point B est déterminé par la droite d et la droite issue du point B qui coupe les droites d_1, d_2. Le plan β coupe le plan α suivant une droite du complexe linéaire et cette droite rencontre la droite D_1D_2 au point A.– 2) Pour construire le plan focal d'un point quelconque A, on détermine d'abord la droite a qui passe par ce point et qui coupe les droites d_1, d_2 ; on observe ensuite que si le plan $\beta \equiv Ad$ coupe les droites d_1, d_2 aux points D_1, D_2, le foyer B de ce plan est l'intersection des droites d, D_1D_2. Le plan α est le plan des droites a et AB.

66. Diamètres. 1° Définition. Les diamètres d'un complexe linéaire sont les droites conjuguées des droites du plan de l'infini.

2° Corollaires. 1) *Tout diamètre d'un complexe linéaire est le lieu des foyers d'un ensemble de plans parallèles à un même plan*

Ces plans sont dits conjugués au diamètre considéré.

2) *Pour qu'une droite soit un diamètre d'un complexe linéaire, il faut et il suffit qu'elle passe par le foyer du plan de l'infini.*

Le foyer du plan de l'infini étant rejeté à l'infini, les diamètres d'un complexe linéaire forment l'ensemble des droites parallèles à une même droite.

67. Axe. 1° Définition. Parmi les diamètres d'un complexe linéaire qui sont situés à distance finie, il y en a un et il n'y en a qu'un perpendiculaire aux plans auxquels il est conjugué ; ce diamètre est l'axe du complexe linéaire.

2° Corollaires. 1) *Toute droite perpendiculaire à l'axe d'un complexe linéaire en un de ses points est une droite du complexe linéaire.*

2) *Toute droite du complexe linéaire qui est dans un plan perpendiculaire à l'axe doit couper cet axe.*

68. Plan diamétral. 1° Définition. Un plan diamétral d'un complexe linéaire est un plan dont le foyer est rejeté à l'infini.

2° Corollaires. 1) *Pour qu'un plan soit un plan diamétral, il faut et il suffit qu'il passe par le foyer du plan de l'infini, c'est-à-dire, qu'il soit parallèle aux diamètres du complexe linéaire.*

2) *Tout plan parallèle à deux droites conjuguées distinctes est un plan diamétral.*

Ce plan contient la droite du complexe linéaire qui joint les points à l'infini sur les droites conjuguées ; mais cette droite est rejetée à l'infini et le plan considéré passe avec elle par le foyer du plan de de l'infini.

3) *La perpendiculaire à deux droites conjuguées distinctes est perpendiculaire et sécante à l'axe du complexe linéaire*

69. Équation d'un complexe linéaire en coordonnées cartésiennes rectangulaires lorsque l'axe du complexe coïncide avec l'axe des z. Dans le système des coordonnées cartésiennes, une droite quelconque est définie par les coordonnées x, y, z de l'un de ses points propres et par ses coefficients directeurs λ, μ, ν, ou par les points de coordonnées homogènes $x, y, z, 1$ et $\lambda, \mu, \nu, 0$. Les coordonnées ponctuelles X_{ij} de cette droite se tirent du tableau

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ \lambda & \mu & \nu & 0 \end{vmatrix}$$

on a donc

$$X_{12}=\mu x-\lambda y,\quad X_{13}=\nu x-\lambda z,\quad X_{14}=-\lambda,\quad X_{34}=-\nu,\quad X_{42}=\mu,\quad X_{23}=\nu y-\mu z$$

et l'équation du complexe linéaire prend la forme

$$(1)\qquad A(\nu y-\mu z)+B(\lambda z-\nu x)+C(\mu x-\lambda y)+L\lambda+M\mu+N\nu=0,$$

A, B, C, L, M, N étant des constantes.

Il faut exprimer que cette équation se réduit à une identité pour $x=y=\nu=0$, les quantités λ,μ,z ayant des valeurs quelconques. On trouve ainsi que l'équation se réduit à

$$(2)\qquad \mu x-\lambda y=k\nu$$

dans laquelle k désigne une constante qu'on appelle le paramètre ou la constante du complexe linéaire.

70. Théorème. *Un complexe linéaire n'est pas altéré par un déplacement hélicoïdal parallèle à son axe.*

La propriété résulte de ce que l'équation (2) ne contient pas la variable z et de ce que le premier membre de cette équation, mis sous la forme

$$\begin{vmatrix} x & y \\ \lambda & \mu \end{vmatrix}$$

est le double de l'aire d'un triangle situé dans le plan xy.

Corollaire. *Un complexe linéaire est déterminé par la position de son axe et la valeur de son paramètre.*

71. Théorème. *Le produit de la distance d'une droite d'un complexe linéaire à l'axe de ce complexe et de la tangente de l'angle que la droite fait avec cet axe est égal au paramètre du complexe.*

Il suffit de considérer celles des droites du complexe linéaire (2) qui sont perpendiculaires aux différents points de l'axe x. Pour ces droites, l'équation se réduit à

$$\mu x=k\nu \qquad \text{ou} \qquad x\cdot\frac{\mu}{\nu}=k,$$

ce qui démontre le théorème.

Corollaires. 1° *Les distances de deux droites conjuguées quelconques à l'axe du complexe linéaire sont proportionnelles aux tangentes des angles que ces droites font avec l'axe.*

2° *Le produit de la distance d'un point à l'axe du complexe linéaire par la tangente de l'angle d'inclinaison de cet axe sur le plan focal du point est égal au paramètre du complexe.*

3° *Toutes les droites du complexe linéaire qui sont à une distance donnée de l'axe du complexe sont tangentes à des hélices circulaires de même pas tracées sur un cylindre de révolution autour de cet axe.*

72. Droites conjuguées perpendiculaires. 1° Si le point A est à distance finie et n'appartient pas à l'axe du complexe linéaire, son plan focal α n'est ni parallèle ni perpendiculaire à l'axe u du complexe. La droite conjuguée de la perpendiculaire a au plan α au point A est une droite b située à distance finie dans le plan α. Les droites situées à distance finie, a, b, sont donc des droites conjuguées et perpendiculaires.

2° Théorème. *Tout plan qui n'est ni parallèle ni perpendiculaire à l'axe du complexe linéaire, contient une infinité de droites perpendiculaires à leurs conjuguées; ces droites enveloppent une parabole dont le foyer et la tangente au sommet sont le foyer du plan et la droite conjuguée de la perpendiculaire en ce point au plan considéré.*

Soit b une droite située dans le plan α et ne passant pas par le point A. Cette droite n'appartient

pas au complexe linéaire; la droite a' qui lui est conjuguée passe par le point A et est extérieure au plan α. Le foyer du plan β des droites a, a' est le point B où se coupent les droites b, b'; le plan β passe par le point B et est perpendiculaire au plan α. Donc, pour que la droite b' du plan α soit perpendiculaire à la droite conjuguée a', il faut et il suffit qu'elle soit perpendiculaire à la droite AB, ou qu'elle soit tangente à la parabole dont le point A et la droite b sont le foyer et la tangente au sommet.

3° Théorème. Tout point à distance finie extérieur à l'axe du complexe linéaire est le sommet d'un cône du second ordre dont les génératrices rectilignes sont perpendiculaires aux droites qui leur sont conjuguées; une des génératrices rectilignes de ce cône est parallèle à l'axe du complexe, une autre est perpendiculaire au plan focal du sommet; chacune de ces deux droites est perpendiculaire à un plan cyclique du cône et leur plan est un plan de symétrie.

Le plan mené par la droite a' parallèlement à la droite b' est perpendiculaire au plan aa'; mais il est aussi un plan diamétral du complexe et passe par la parallèle u' à l'axe u du complexe menée par le point A. La propriété résulte donc de ce que toute droite b' répondant à la question pour le point A est l'intersection de deux plans perpendiculaires passant respectivement par les droites a, u'.

4° Théorème. Le lieu de la perpendiculaire commune aux droites a', b' est l'ensemble des génératrices rectilignes d'un même mode d'un paraboloïde hyperbolique équilatère dont les plans directeurs sont le plan au' et le plan ω perpendiculaire à la droite u' ou u, et les droites a, b, u sont trois génératrices rectilignes du second mode du paraboloïde.

La propriété résulte de ce que la perpendiculaire commune aux droites a', b' est dans le plan aB et est perpendiculaire et s'écarte à l'axe u du complexe linéaire.

5° Remarque. La perpendiculaire commune aux droites a' b' coupe b' au point B dont le lieu est la droite b; elle coupe a' en un point A' dont le lieu est la cubique gauche γ intersection complémentaire du cône (C) et du paraboïde (P) des droites a' et BA', ces surfaces ayant déjà en commun la droite a. Les points à l'infini de la cubique γ sont les points à l'infini des génératrices rectilignes du cône (C), différentes de a, qui sont parallèles aux plans directeurs au', ω du paraboloïde (P), ou le point à l'infini sur la droite u' et les points cycliques du plan ω. La cubique γ est donc située sur un cylindre de révolution dont les droites u, u' sont des génératrices rectilignes, la première, parce qu'elle est l'asymptote réelle de la cubique, la seconde, parce que le point A est un point de la courbe.–

Note I: La transformation homographique et la représentation géométrique des imaginaires.

13. Du rapport anharmonique de quatre nombres quelconques. 1° Définition. Le rapport anharmonique de quatre nombres quelconques a, b, c, d se représente par la notation (a, b, c, d) et sa valeur est définie par la formule

$$(1) \qquad (a,b,c,d) = \frac{a-c}{c-b} : \frac{a-d}{d-b}.$$

Le rapport anharmonique possède les propriétés générales de celui de quatre éléments d'une forme fondamentale de première espèce:

1) Si

$$(a,b,c,d) = (a,b,c,d')$$

et si les nombres a, b, c sont égaux deux à deux, les nombres d, d' sont égaux;

2) On a

$$(a,b,c,d) = (b,a,d,c) = (c,d,a,b) = (d,c,b,a);$$

3) On a

$$(a,b,c,d).(a,b,d,c) = 1 \qquad \text{et} \qquad (a,b,c,d) + (a,c,b,d) = 1;$$

4) Les vingt-quatre rapports anharmoniques correspondent aux vingt-quatre permutations des nombres

a, b, c, d peuvent s'exprimer en fonction de l'un quelconque d'entre eux.

2° Interprétation géométrique. Soient A, B, C, D les points représentant les nombres a, b, c, d dans les axes coordonnés rectangulaires Ox, Oy. On dit que (a, b, c, d) est le rapport anharmonique des points A, B, C, D et on écrit

$$(2) \qquad (a, b, c, d) = (A, B, C, D).$$

Or, les différences $a - c$, $c - b$, $a - d$, $d - b$ sont représentées par les vecteurs CA ou $-AC$, BC ou $-CB$, DA ou $-AD$, BD ou $-DB$. On a donc

$$(3) \qquad (A, B, C, D) = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB},$$

comme si les points étaient en ligne droite. Mais dans le cas actuel, le quotient $\frac{AC}{CB}$ est un vecteur dont le module est le quotient des modules des vecteurs AC, CB et dont l'argument est l'excès de l'argument du vecteur AC sur l'argument du vecteur CB. Le rapport anharmonique des points A, B, C, D est donc un vecteur dont le module est

$$(4) \qquad \frac{|AC|}{|CB|} : \frac{|AD|}{|DB|}$$

et dont l'argument est

$$\text{argt } AC - \text{argt } CB + \text{argt } AD - \text{argt } DB = (\text{argt } BD - \text{argt } BC) - (\text{argt } AD - \text{argt } AC)$$

ou

$$(5) \qquad \text{angle}(BC, BD) - \text{angle}(AC, AD).$$

3° Théorème. *Pour que le rapport anharmonique de quatre points soit réel, il faut et il suffit que ces points soient sur une droite ou sur une circonférence.*

Pour que le rapport anharmonique (A, B, C, D) soit réel, il faut et il suffit que son argument soit de la forme $k\pi$, k désignant un nombre entier réel. Il s'agit donc d'interpréter la condition

$$(6) \qquad \text{angle}(BC, BD) - (\text{angle } AC, AD) = k\pi,$$

k désignant un nombre entier réel. Trois cas sont à distinguer.

1) Si les points A, B sont d'un même côté de la droite CD, la condition précédente se réduit à l'égalité géométrique

$$(7) \qquad |\text{angle } CAD| = |\text{angle } CBD|$$

et les quatre points A, B, C, D sont sur une circonférence.

Comme, dans ce cas, le nombre entier réel k est pair, le rapport anharmonique des points A, B, C, D a une valeur réelle positive.

2) Si les points A, B sont de part et d'autre de la droite CD, la relation (6) est équivalente à l'égalité géométrique

$$(8) \qquad |\text{angle } CAD| + |\text{angle } CBD| = \pi$$

et les quatre points A, B, C, D sont sur une circonférence.

Dans ce cas, le nombre entier réel k est impair et le rapport anharmonique des points A, B, C, D a une valeur réelle négative.

3) Quand le point A est sur la droite CD, on a

$$(9) \qquad \text{angle}(AC, AD) = k\pi$$

et la condition (6) se réduisant à

$$(10) \qquad \text{angle}(BC, BD) = k\pi,$$

le point B est sur la droite CD.

4° **Remarques.** 1) Les deux premiers cas se distinguent l'un de l'autre par le signe de la valeur du rapport anharmonique comme dans le cas de quatre points réels en ligne droite : le nombre (A,B,C,D) est positif quand on peut aller du point A au point B sur la circonférence sans passer par l'un des points C, D ou en passant par ces deux points ; il est négatif, quand, pour aller du point A au point B, on passe par l'un des points C ou D.

2) Le théorème de Ptolémée relatif aux distances mutuelles de quatre points d'une circonférence peut se déduire de la notion du rapport anharmonique de ces quatre points. On peut supposer les quatre points placés dans l'ordre alphabétique sur la circonférence et si

(11) $$(A,B,C,D)=\lambda$$

on a

(12) $$(A,C,B,D)=1-\lambda$$

avec

(13) $$\lambda>0 \qquad \text{et} \qquad 1-\lambda<0.$$

En égalant les modules des deux membres dans chacune des formules (11) et (12), on a les relations

(14) $$AC.BD=\lambda.BC.AD \qquad \text{et} \qquad AB.CD=\lambda BC.AD-BC.AD$$

où AC, BD, ... désignent les valeurs absolues des distances des points A, B, C, D pris deux à deux et il suffit de retrancher ces relations membre à membre, pour obtenir la formule de Ptolémée

(15) $$AC.BD=AB.CD+BC.AD.$$

74. De la transformation homographique.

1° **Définition.** On dit que les points Z, Z' décrivent des figures homographiques quand il existe entre leurs affixes $z=OZ$, $z'=OZ'$ une correspondance biunivoque caractérisée par une équation bilinéaire

(1) $$\alpha zz'+\beta z+\gamma z'+\delta=0$$

dont les coefficients α, β, γ, δ sont des nombres quelconques.

D'une manière générale, on doit supposer que le déterminant ou le module

(2) $$\Delta=\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}$$

de cette équation n'est pas nul. – Quand Δ est nul, on a une homographie singulière et on montre sans peine que, dans ce cas, il y a, dans chaque figure, un point qui est à lui seul le point homologue de tous les points de l'autre figure.

2° **Théorème.** *Une transformation homographique est déterminée par trois couples de points homologues.*

Si a et a', b et b', c et c', d et d' sont les affixes de ces trois couples de points homologues A et A', B et B', C et C', D et D', l'équation de la transformation homographique est

(3) $$\begin{vmatrix} zz' & z & z' & 1\\ aa' & a & a' & 1\\ bb' & b & b' & 1\\ cc' & c & c' & 1\end{vmatrix}=0.$$

3° **Théorème.** *Deux figures homographiques à une troisième sont homographiques entre elles.*

Si on a, à la fois

(4) $$\alpha zz''+\beta z+\gamma z''+\delta=0 \qquad \text{et} \qquad \alpha' z'z''+\beta' z'+\gamma' z''+\delta'=0,$$

l'élimination de z'' donne

(5) $$\begin{vmatrix} \alpha z+\gamma & \beta z+\delta \\ \alpha' z'+\gamma' & \beta' z'+\delta' \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ou} \quad Azz'+Bz+Cz'+D=0,$$

en posant

(6) $$A=\alpha\beta'-\beta\alpha', \quad B=\alpha\delta'-\delta\alpha', \quad C=\gamma\beta'-\beta\gamma', \quad D=\gamma\delta'-\delta\gamma'.$$

On a

(7) $$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{vmatrix},$$

de sorte que le module de l'équation (5) est le produit des modules des équations (4).

4° **Théorème.** *Quand deux figures sont homographiques, le rapport anharmonique de quatre points quelconques de l'une est égal à celui des points homologues de l'autre.*

Soient A et A', B et B', C et C', D et D' quatre couples de points homologues de deux figures entre lesquelles existe une relation d'homographie dont l'équation est

(8) $$\alpha zz' + \beta z + \gamma z' + \delta = 0;$$

a et a', b et b', c et c', d et d' leurs affixes OA et OA', OB et OB', OC et OC', OD et OD'.

L'équation d'homographie donne

(9) $$z = -\frac{\gamma z'+\delta}{\alpha z'+\beta}.$$

On a donc

(10) $$a-c = \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\alpha a'+\beta)(\alpha c'+\beta)}(a'-c'), \qquad c-b = \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\alpha c'+\beta)(\alpha b'+\beta)}(c'-b'),$$

d'où

(11) $$\frac{a-c}{c-b} = \frac{\alpha b'+\beta}{\alpha a'+\beta}\cdot\frac{a'-c'}{c'-b'}, \qquad \frac{a-d}{d-b} = \frac{\alpha b'+\beta}{\alpha a'+\beta}\cdot\frac{a'-d'}{d'-b'},$$

et

(12) $$\frac{a-c}{c-b} : \frac{a-d}{d-b} = \frac{a'-c'}{c'-b'} : \frac{a'-d'}{d'-b'} \quad \text{ou} \quad (A,B,C,D) = (A',B',C',D').$$

5° **Corollaire:** *Quand deux figures sont homographiques, les droites et les circonférences de l'une correspondent à des droites ou à des circonférences dans l'autre.*

75. **De la transformation homographique lorsque $\alpha = 0$.** – 1° **Théorème.** *Lorsque $\alpha = 0$, les figures homographiques sont semblables.*

Soient a et b les affixes d'un point particulier du point directeur d'une droite d décrite par le point Z. L'équation de cette droite est

(1) $$z = a + bt$$

dans laquelle t est un paramètre arbitraire. En portant cette valeur de z dans la relation d'homographie

(2) $$\beta z + \gamma z' + \delta = 0,$$

on trouve que l'équation du lieu engendré par le point Z' est

(3) $$z' = -\frac{\beta a+\delta}{\gamma} - \frac{\beta b}{\gamma} t.$$

Le lieu du point Z' est donc une droite d' dont la direction est celle de la droite joignant l'origine O au point d'affixe $-\frac{\beta b}{\gamma}$; la droite d' fait donc avec l'axe x un angle égal à l'argument du point B augmenté d'un angle constant! Il en résulte que les droites de la première figure correspondent à des droites dans la seconde figure et que les angles homologues sont égaux; les deux figures sont donc des figures semblables.

2° Point double. — En faisant z' égal à z dans l'équation (2), celle-ci devient

(4) $$(\beta+\gamma)z+\delta=0.$$

Si $\beta+\gamma$ est nul, cette équation se réduit à une identité ou à une impossibilité, selon que δ est nul ou n'est pas nul. — Si $\beta+\gamma$ et δ sont nuls, l'équation (2) devient

(5) $$z=z',$$

les deux figures coïncident et la transformation homographique se réduit à la transformation identique. — Si $\beta+\gamma$ est nul et si δ n'est pas nul, l'équation (2) peut s'écrire

(6) $$z=z'+h$$

et la transformation homographique se réduit à une translation.

Si $\beta+\gamma$ n'est pas nul, l'équation (4) définit un point E d'affixe

(7) $$e=-\frac{\delta}{\beta+\gamma}$$

et ce point est le seul point qui coïncide avec le point homologue, quelle que soit celle des deux figures dans laquelle on le considère. On l'appelle le point double de l'homographie ou des figures homographiques.

Si Z et Z' sont des points homologues quelconques, il résulte des équations (2) et (7) qu'on a

(8) $$\frac{EZ}{EZ'}=C^{te};$$

le triangle EZZ' reste donc semblable à lui-même pour toutes les positions des points Z, Z' et le point E est le centre de similitude des figures engendrées par ces deux points.

Quand le module de la constante (8) est égal à l'unité, les deux figures sont égales et le point E devient un centre de rotation.

N.B. — L'équation (2) étant vérifiée pour $z=z'=\infty$, il y a un second point double à l'infini.

76. Des points limites lorsque $\alpha\neq 0$. 1° Recherche des points limites. — Les points limites des figures homographiques définies par l'équation

(1) $$\alpha zz'+\beta z+\gamma z'+\delta=0$$

sont les points M et N' dont les affixes

(2) $$m=-\frac{\gamma}{\alpha} \qquad n'=-\frac{\beta}{\alpha}$$

s'obtiennent en faisant tendre z' ou z vers l'infini.

2° Propriétés immédiates. — 1) Si le point Z décrit une droite passant par le point M, le point Z' décrit une droite passant par le point N'.

2) Si le point Z décrit une droite ne passant pas par le point M, le point Z' décrit une circonférence passant par le point N'.

3) Si le point Z décrit une circonférence passant par le point M, le point Z' décrit une droite ne passant pas par le point N'.

4) Si le point Z décrit une circonférence ne passant pas par le point M, le point Z' décrit une circonférence ne passant pas par le point N'.

3° Equation de l'homographie en fonction des points limites. Les relations (2) donnent

(3) $$\gamma=-m\alpha, \quad \beta=-n'\alpha$$

et l'équation (1) de l'homographie peut s'écrire

$$\alpha zz'-n'\alpha z-m\alpha z'+\delta=0 \quad \text{ou} \quad (z-m)(z'-n')=-\frac{\Delta}{\alpha^2} \quad \text{ou} \quad MZ.N'Z'=\nabla, \qquad (4)$$

en posant

(5) $$\nabla=-\frac{1}{\alpha^2}\Delta.$$

Cette équation (4) entraîne ces deux conséquences :

1) Les faisceaux homologues ayant les points M, N' pour supports sont égaux et de sens contraires;

2) Le produit des distances des points M, N' à deux points homologues quelconques Z, Z' est constant.

4° Cas particulier d'une transformation réelle. La transformation homographique (1) est dite réelle lorsque les nombres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont réels. Dans ce cas, les points limites M, N' sont sur l'axe x et ils sont distincts ou confondus selon qu'on a $\beta \neq \gamma$ ou $\beta = \gamma$.

Lorsque $\beta = \gamma$, l'équation d'homographie ne change pas si on permute z avec z' et on dit que l'homographie est involutive.

Quand ∇ est positif, la relation (4) donne

(6) $$\arg MZ + \arg N'Z' = 0$$

et les vecteurs MZ, N'Z' ont des directions symétriques par rapport à l'axe x.

Quand ∇ est négatif, on a

(7) $$\arg MZ + \arg N'Z' = \pi$$

et les vecteurs MZ, N'Z' font des angles supplémentaires avec l'axe x.

77. – Des points doubles quand $\alpha \neq 0$. – Recherche des points doubles. – Les points doubles de l'homographie d'équation

(1) $$\alpha z z' + \beta z + \gamma z' + \delta = 0$$

sont les points E, F dont les affixes e, f sont les racines de l'équation

(2) $$\alpha z^2 + (\beta + \gamma) z + \delta = 0.$$

Les affixes sont donc

(3) $$\left.\begin{matrix} e \\ f \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2\alpha}\left\{-(\beta+\gamma) \mp \sqrt{(\beta+\gamma)^2 - 4\alpha\delta}\right\}.$$

Les points E, F sont donc distincts ou confondus selon qu'on a

(4) $$(\beta+\gamma)^2 - 4\alpha\delta \neq 0 \quad \text{ou} \quad = 0.$$

Dans les deux cas, les affixes des points limites M, N' étant

(5) $$m = -\frac{\gamma}{\alpha}, \qquad n' = -\frac{\beta}{\alpha},$$

on a

(6) $$m + n' = -\frac{\beta+\gamma}{\alpha} = e + f,$$

d'où

(7) $$\frac{m+n'}{2} = \frac{e+f}{2}$$

de sorte que les segments rectilignes MN', EF ont le même point milieu.

2° 1) Théorème. Quand les points doubles E, F sont distincts, si Z, Z' sont deux points homologues distincts, le rapport anharmonique (E, F, Z, Z') est constant.

Soient A et A', B et B' deux couples de points homologues. Il résulte du théorème démontré au 4° du n° 74 qu'on a

(8) $$(E,F,A,B) = (E,F,A',B') \quad \text{ou} \quad \frac{EA}{AF} : \frac{EB}{BF} = \frac{EA'}{A'F} : \frac{EB'}{B'F}.$$

on en tire

(9) $$\frac{EA}{AF} : \frac{EA'}{A'F} = \frac{EB}{BF} : \frac{EB'}{B'F} \quad \text{ou} \quad (E,F,A,A') = (E,F,B,B'),$$

ce qui démontre le théorème.

2) Théorème. Réciproquement, si E, F sont deux points fixes distincts et si Z, Z' sont deux points mobiles

tels que le rapport anharmonique (E, F, Z, Z') ait une valeur constante, les points Z, Z' engendrent des figures homographiques dont les points E, F sont les points doubles.
Si ρ est la valeur constante du rapport anharmonique, la relation

(10) $$(E, F, Z, Z') = \rho$$

donne

(11) $$\frac{e-z}{z-f} : \frac{e-z'}{z'-f} = \rho \quad \text{ou} \quad (1-\rho)zz' + (e\rho - f)z + (f\rho - e)z' + (1-\rho)ef = 0 \qquad (12)$$

ce qui prouve déjà que les points Z, Z' engendrent des figures homographiques.
Lorsque $\rho = 1$, $z = z'$ quel que soit z et les deux figures sont confondues; mais si on a $\rho \neq 1$, la condition $z = z'$ n'est vérifiée que pour $z = e$ et $z = f$, et les points E, F sont les seuls points doubles des figures engendrées par les points Z et Z'.

3) Problème. *Evaluer la valeur de la constante ρ en fonction des coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ de l'équation d'homographie.*

Pour évaluer la valeur ρ de (E, F, Z, Z'), il suffit de considérer des positions particulières des points Z, Z'. Si le point Z coïncide avec le point limite M, z est égal à $-\frac{\gamma}{\alpha}$, z' est égal à l'infini et on trouve que

(13) $$\rho = \frac{e\alpha + \gamma}{f\alpha + \gamma} = \frac{K + \sqrt{D}}{K - \sqrt{D}},$$

en posant

(14) $$K = \beta - \gamma \quad \text{et} \quad D = (\beta + \gamma)^2 - 4\alpha\delta.$$

3° Cas des transformations réelles. – Une transformation homographique réelle est dite hyperbolique, parabolique ou elliptique, selon qu'on a

(15) $$D \text{ ou } (\beta+\gamma)^2 - 4\alpha\delta > 0, = 0 \quad \text{ou} \quad < 0.$$

a. – Transformation hyperbolique, $D > 0$. – 1) Les affixes des points doubles E, F ont des valeurs réelles et inégales; ces points sont sur l'axe x. Pour les construire, on écrit

(16) $$\left.\begin{matrix} e \\ f \end{matrix}\right\} = -\frac{\beta+\gamma}{2\alpha} \mp \sqrt{\left(\frac{\beta-\gamma}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\alpha^2}}.$$

Dans ces formules, $-\frac{\beta+\gamma}{2\alpha}$ est l'abscisse du milieu C de la distance MN' des points limites M, N'; la quantité $\left|\frac{\beta-\gamma}{2\alpha}\right|$ est la valeur absolue de $\frac{1}{2} MN'$ ou de CM, et $-\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\alpha^2}$ est égal à ∇. Le radical figurant dans les formules (16) est donc l'hypoténuse ou un côté de l'angle droit d'un triangle rectangle selon que ∇ est positif ou négatif. Dans le premier cas, les points E, F sont situés sur les prolongements de MN'; dans le second cas, ils sont situés entre les points M, N'.

2) Théorème. *Dans toute transformation homographique hyperbolique, les points doubles E, F et deux points homologues quelconques Z, Z' sont situés sur une même circonférence.*

Cette propriété résulte de ce que la valeur ρ du rapport anharmonique (E, F, Z, Z') est réelle.

3) Corollaire. *Toute circonférence passant par les points E, F est anallagmatique dans la tranformation considérée.*

N.B. – Cette propriété et celle trouvée au 4° du n° 76 fournissent une construction facile du point Z', connaissant le point Z.

b. Transformation elliptique, $D < 0$. – 1) Les affixes (16) des points doubles sont des quantités complexes; la partie réelle est l'abscisse du point milieu C de la distance MN' des points limites et le coefficient de $\sqrt{-1}$ est le côté de l'angle droit d'un triangle rectangle ayant $\sqrt{|\nabla|}$ pour hypoténuse et $|CM|$ pour premier côté de l'angle droit.
Les points doubles sont donc les points de rencontre de la médiatrice du segment rectiligne MN' avec la circonférence de

centre M et de rayon $\sqrt{|\nabla|}$.

2) Théorème. Dans une transformation homographique elliptique, deux points homologues quelconques Z, Z' appartiennent à une circonférence dont le centre est sur la droite EF et pour laquelle les points E, F sont des points conjugués.

En effet, la valeur (13) de ρ ou (E, F, Z, Z') est le quotient de deux imaginaires conjuguées, ou une imaginaire de module égal à l'unité. On a donc, en valeur absolue,

(17) $$|EZ.FZ'| = |FZ : EZ'| \qquad \text{ou} \qquad |ZE : ZF| = |Z'E : Z'F|,$$

ce qui démontre le théorème.

3) Corollaire. Dans une transformation homographique elliptique, toute circonférence dont le centre est sur la droite des points doubles et pour laquelle ces points sont conjugués, est anallagmatique.

N.B. – On tire de là et du 4° du n° 76 une construction du point Z', connaissant le point Z.

c. Transformation parabolique, D = 0. – 1) Les points doubles E, F sont confondus avec le milieu C de la distance des points limites M, N'; on désigne ce point C par la lettre E.

N.B. – Les points M, N' sont différents, car s'ils étaient confondus en même temps que les points E, F l'homographie serait singulière.

2) Théorème. Dans une transformation homographique parabolique, deux points homologues quelconques Z, Z' sont sur une circonférence tangente au milieu de la distance des points limites.

Soit Z_1 le point où la circonférence α passant par le point Z et tangente à l'axe x au point E coupe la droite MZ. On a

(18) $$|MZ.MZ_1| = |ME^2| = |ME.NE|.$$

Mais le point E étant le point double, il faut aussi qu'on ait

(19) $$MZ.NZ' = ME.NE.$$

Il en résulte que

$$|MZ'| = |MZ_1|$$

et comme la perpendiculaire à l'axe x au point E est un axe de symétrie de la circonférence α et du système des droites MZ, NZ', le point Z' est sur la circonférence α.

3) Corollaire. Dans une transformation homographique parabolique, toute circonférence tangente au point double à la droite des points limites, est anallagmatique.

N.B. – On tire de là une construction du point Z', connaissant le point Z.

4° Retour au cas général. Les coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ de l'équation d'homographie sont des nombres complexes tels que Δ et α ne sont pas nuls. Deux cas sont à distinguer, selon que les points doubles sont confondus ou sont différents.

a. – Les points doubles sont confondus. – 1) Dans ce cas, les points limites M, N' sont différents l'un de l'autre et les points doubles coïncident avec le milieu E (ou C) du segment rectiligne MN'. La relation générale

(21) $$MZ.N'Z' = \nabla,$$

appliquée au point E donne

(22) $$MZ.N'Z' = ME.N'E = -ME^2 = -\frac{1}{4}MN'^2.$$

on en tire

(23) $$\text{angle } MN' - \text{angle } ME + \text{angle } MN' - \text{angle } N'Z' = \pi$$

et

(24) $$|MZ|.|N'Z'| = |ME^2|.$$

A cause de (23) les droites MZ, N'Z' se coupent sur la médiatrice du segment rectiligne MN', et, à cause de (24) la transformation considérée est identique à la transformation réelle parabolique, avec la différence que la

droite MN' remplace l'axe x.

2) Ayant

(25) $$e = \frac{m+n'}{2}, \qquad n' = 2e - m, \qquad ME = e - m,$$

il résulte des relations (21) et (22) qu'on a

(26) $$(z-m)(z'-2e+m) = (e-m)^2.$$

On en tire

(27) $$z'-e = \frac{(z-e)(e-m)}{z-m}$$

et l'équation d'homographie peut s'écrire

(28) $$\frac{1}{z'-e} = \frac{1}{z-e} + \frac{1}{e-m}.$$

b. Les points doubles sont différents. — En mettant l'équation d'homographie sous la forme

(29) $$(1-\rho)zz' + (e\rho - f)z + (f\rho - e)z' + (1-\rho)ef = 0,$$

les affixes des points limites sont

(30) $$m = \frac{e - f\rho}{1-\rho}, \qquad n' = \frac{e - f\rho}{1-\rho},$$

ce qui donne

(31) $$m + n' = e + f \quad \text{et} \quad m - n' = \frac{1+\rho}{1-\rho}(e-f).$$

On a aussi

(32) $$\nabla = -\frac{\Delta}{d^2} = -\frac{1}{(1-\rho)^2}\left[(1-\rho^2)ef - (e\rho - f)(f\rho - e)\right] = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}(e-f)^2$$

et la relation

(33) $$MZ.NZ' = \nabla$$

s'écrit

(34) $$MZ.NZ' = -\frac{\rho}{(1-\rho)^2}EF^2 \quad \text{ou} \quad (z-m)(z'-n') = -\frac{\rho}{(1-\rho)^2}(e-f)^2.$$

Trois cas sont à distinguer d'après la valeur de ρ.

1) Premier cas: ρ est réel. Dans ce cas, les formules (31) expriment que les quatre points M, N', E, F sont en ligne droite et que le milieu C du segment rectiligne MN' est aussi le milieu du segment rectiligne EF. Quant à l'équation (34), elle montre que les vecteurs $MZ, N'Z'$ sont inclinés sur la droite EF ou MN' comme dans le cas d'une homographie réelle. En appliquant la relation $(E,F,Z,Z') = \rho$ aux points E, F, M, ∞, on trouve que les points E, F sont intérieurs ou extérieurs au segment rectiligne MN', selon que ρ est positif ou négatif. Donc, quand ρ est réel, la transformation à coefficients complexes est identique à une transformation hyperbolique réelle avec cette différence que la droite MN' remplace l'axe x.

2) Second cas: ρ est un nombre complexe dont le module est égal à l'unité. — Dans ce cas, il résulte des formules (31) que les segments rectilignes MN', EF sont perpendiculaires et ont le même point milieu. Si θ est l'argument de ρ, la formule (34) donne

(35) $$\text{argt}\, MZ + \text{argt}\, N'Z' = \pi + \theta - 2\pi - \theta + 2\,\text{argt}\, EF$$

ou

(36) $$\text{argt}\, MZ + \text{argt}\, N'Z' = \pi + 2\,\text{argt}\, MN'.$$

Cette relation exprime que les vecteurs $MZ, N'Z'$ sont sur les côtés d'un triangle isoscèle de base MN'; et ainsi, quand ρ est un nombre complexe de module égal à l'unité, la transformation homographique à coefficients complexes est identique à la transformation elliptique réelle avec cette différence que la droite MN'

remplace l'axe x.

3) Troisième cas: ρ est un nombre complexe dont le module est différent de l'unité. Dans ce cas, la transformation est dite loxodromique; les segments rectilignes MN', EF sont les diagonales d'un parallélogramme quelconque et, à cause de la seconde des relations (31), ce parallélogramme est semblable à celui dont les diagonales sont équipollentes aux vecteurs $1+\rho$ et $1-\rho$.

78. Décomposition d'une homographie quelconque en d'autres dites élémentaires.

1° Premier cas: $\alpha = 0$. L'équation d'homographie, résolue par rapport à z', prend la forme

(1) $$z' = \lambda z + \mu$$

L'homographie donnée peut donc être considérée comme la résultante ou le produit des deux homographies élémentaires

(2) $$z_1 = \lambda z, \qquad z' = z_1 + \mu.$$

1) $z_1 = \lambda z$. Si λ est réel, les figures (z), (z_1) sont homothétiques, λ est le rapport d'homothétie et l'origine O est le centre d'homothétie. Si λ est imaginaire, en posant

(3) $$\lambda = re^{i\varphi},$$

on a

(4) $$z_1 = re^{i\varphi}z;$$

on passe alors de la figure (z) à la figure (z_1) par une rotation d'amplitude φ autour du point O, suivie d'une homothétie de rapport r et de centre O.

2) $z' = z_1 + \mu$. La transformation définie par cette équation est une translation.

On voit ainsi que l'homographie la plus générale pour $\alpha = 0$ est le produit d'une rotation, d'une homothétie et d'une translation.

2° Second cas: $\alpha \neq 0$. En résolvant l'équation d'homographie par rapport à z', on a

(5) $$z' = -\frac{\beta z + \delta}{\alpha z + \gamma}$$

ou en effectuant la division

(6) $$z' = -\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\Delta}{\alpha(\alpha z + \gamma)}.$$

On peut considérer cette homographie comme le produit des homographies élémentaires

(7) $$z_1 = -\frac{\alpha^2}{\Delta}z - \frac{\alpha\gamma}{\Delta}, \qquad z_2 = \frac{1}{z_1}, \qquad z' = z_2 - \frac{\beta}{\alpha}.$$

La première et la troisième de ces homographies élémentaires rentrent dans le cas précédent où $\alpha = 0$. Si Z_1, Z_2 sont deux points vérifiant la seconde transformation élémentaire, on a

(8) $$z_2 = \frac{1}{z_1} \qquad \text{ou} \qquad z_1 z_2 = 1,$$

d'où on déduit

(9) $$|OZ_1| \cdot |OZ_2| = 1 \qquad \text{et} \qquad \text{argt}\, OZ_1 + \text{argt}\, OZ_2 = 0.$$

On passe donc de Z_1 à Z_2 par une inversion de centre O et de puissance 1, suivie d'une symétrie par rapport à l'axe x.

3° Remarque. Les homothéties, les rotations, les translations et les inversions n'altèrent pas les angles des figures transformées; il résulte de ce qui précède que la même propriété est applicable aux homographies quelconques et on dit que ces homographies sont des transformations conformes.

Note II: L'équation aux six valeurs des rapports anharmoniques des racines de l'équation du quatrième degré.

79. Théorème. *L'équation aux six valeurs des rapports anharmoniques des racines de l'équation du*

quatrième degré

(1) $$a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0$$

est

(2) $$I^3 (x+1)^2 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 (x-2)^2 = 27 J^2 (x^2 - x + 1)^3$$

si

(3) $$I = a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2 \quad \text{et} \quad J = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}.$$

Si x_1, x_2, x_3, x_4 sont les racines de l'équation (1), il s'agit de démontrer que celles de l'équation (2) sont les six nombres

(4) $$(x_1 x_2 x_3 x_4) = \lambda, \qquad (x_1 x_3 x_2 x_4) = 1 - \lambda, \qquad (x_1 x_4 x_2 x_3) = \frac{\lambda - 1}{\lambda}.$$
$$(x_1 x_2 x_4 x_3) = \frac{1}{\lambda}, \qquad (x_1 x_3 x_4 x_2) = \frac{1}{1-\lambda}, \qquad (x_1 x_4 x_3 x_2) = \frac{\lambda}{\lambda - 1}.$$

En effet, on observe que si

(5) $$f(\lambda) = \lambda(\lambda - 1) \qquad \text{et} \qquad \varphi(\lambda) = (\lambda + 1)\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)(\lambda - 2),$$

on a identiquement

$$f^2(\lambda) : \varphi^2(\lambda) = f^2\left(\frac{1}{\lambda}\right) : \varphi^2\left(\frac{1}{\lambda}\right) = f^2(1-\lambda) : \varphi^2(1-\lambda) = f^2\left(\frac{1}{1-\lambda}\right) : \varphi^2\left(\frac{1}{1-\lambda}\right) = f^2\left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right) : \varphi^2\left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right) =$$
$$f^2\left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\right) : \varphi^2\left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\right).$$

Il en résulte que $f^2(\lambda) : \varphi^2(\lambda)$ est une fonction symétrique des racines x_1, x_2, x_3, x_4 de l'équation (1) ou une fonction rationnelle des coefficients de cette équation et que les six nombres (4) sont les racines de l'équation du sixième degré

(6) $$f^2(x) - \frac{f^2(\lambda)}{\varphi^2(\lambda)} \varphi^2(x) = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 (x-1)^2 - \frac{f^2(\lambda)}{\varphi^2(\lambda)} (x+1)^2 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 (x-2)^2 = 0.$$

La question revient à déterminer $f^2(\lambda) : \varphi^2(\lambda)$ en fonction des coefficients de l'équation (1). On pose

$$y_1 = x_1 x_2 + x_3 x_4, \qquad y_2 = x_1 x_3 + x_4 x_2, \qquad y_3 = x_1 x_4 + x_2 x_3;$$

on en déduit, par des calculs faciles,

$$\lambda = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1}, \quad \lambda - 1 = \frac{y_3 - y_2}{y_2 - y_1}, \quad \lambda + 1 = \frac{y_2 + y_3 - 2y_1}{y_2 - y_1}, \quad \lambda - \frac{1}{2} = \frac{2y_3 - y_1 - y_2}{y_2 - y_1}, \quad \lambda - 2 = \frac{y_1 + y_3 - 2y_2}{y_2 - y_1},$$

et ainsi

(7) $$f^2(\lambda) : \varphi^2(\lambda) = 4(y_2 - y_3)^2 (y_3 - y_1)^2 (y_1 - y_2)^2 : (2y_1 - y_2 - y_3)^2 (2y_2 - y_3 - y_1)^2 (2y_3 - y_1 - y_2)^2.$$

Mais quand on résout l'équation (1) par la méthode de Ferrari, modifiée par Hermite, on écrit l'identité

$$a_0(a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4) = (a_0 x^2 + 2a_1 x + a_2 + 2z)^2 - \Big\{4(a_1^2 - a_0 a_2 + a_0 z) x^2 + 4(a_1 a_2 - a_0 a_3 + 2a_1 z) x +$$
$$[(a_2 + 2z)^2 - a_0 a_4]\Big\},$$

et on donne à z une valeur telle que le second terme du second membre soit un carré parfait. Il y a trois pareilles valeurs de z qui sont les racines z_1, z_2, z_3 de l'équation

(8) $$(a_1 a_2 - a_0 a_3 + 2a_1 z)^2 - (a_1^2 - a_0 a_2 + a_0 z)\left[(a_2 + 2z)^2 - a_0 a_4\right] = 0 \qquad \text{ou} \qquad 4z^3 - Iz + J = 0.$$

On peut mettre les indices pour que x_1 et x_2, x_3 et x_4 soient les racines des équations du second degré

(9) $$a_0 x^2 + 2a_1 x + a_2 + 2z_1 \pm \left[2x\sqrt{a_1^2 - a_0 a_2 + a_0 z_1} + \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3 + 2a_1 z_1}{\sqrt{a_1^2 - a_0 a_2 + a_0 z_1}}\right] = 0,$$

tandis que x_1 et x_3, x_4 et x_2 ou x_1 et x_4, x_2 et x_3 seraient les racines des équations où on remplacerait z_1 par z_2 ou par z_3.

On a donc

$$a_0 x_1 x_2 = a_2 + 2z_1 + \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3 + 2a_1 z_1}{\sqrt{a_1^2 - a_0 a_2 + a_0 z_1}}, \quad a_0 x_3 x_4 = a_2 + 2z_1 - \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3 + 2a_1 z_1}{\sqrt{a_1^2 - a_0 a_2 + a_0 z_1}},$$

d'où

$$a_0 y_1 = 2a_2 + 4z_1, \quad a_0(y_2 - y_3) = 2^2(z_2 - z_3), \quad a_0(2y_1 - y_2 - y_3) = 2^2(2z_1 - z_2 - z_3) = 2^2.3z_1,$$

$$a_0 y_2 = 2a_2 + 4z_2, \quad a_0(y_3 - y_1) = 2^2(z_3 - z_1), \quad a_0(2y_2 - y_3 - y_1) = 2^2.3z_2,$$

$$a_0 y_3 = 2a_2 + 4z_3, \quad a_0(y_1 - y_2) = 2^2(z_1 - z_2), \quad a_0(2y_3 - y_1 - y_2) = 2^2.3z_3.$$

or

$$z_1 z_2 z_3 = -\frac{1}{4}\dot{J}$$

et la formule (7) devient

(10)
$$f^2(\lambda) : \varphi^2(\lambda) = \frac{2^6}{3^6 J^2}(z_2 - z_3)^2(z_3 - z_1)^2(z_1 - z_2)^2.$$

Mais on a

$$t_1 = (z_2 - z_3)^2 = (z_2 + z_3)^2 - 4z_2 z_3 = z_1^2 + \frac{\dot{J}}{z_1} = \frac{z_1^3 + \dot{J}}{z_1} = \frac{\dot{I}z_1 + 3\dot{J}}{4z_1}$$

d'où

$$z_1 = \frac{3\dot{J}}{4t_1 - \dot{I}};$$

$(z_2 - z_3)^2, (z_3 - z_1)^2, (z_1 - z_2)^2$ sont donc les racines de l'équation

$$4.\frac{3^3 J^3}{(4t - \dot{I})^3} - \dot{I}.\frac{3\dot{J}}{4t - \dot{I}} + \dot{J} = 0 \quad \text{ou} \quad (4t - \dot{I})^3 - 3\dot{I}(4t - \dot{I})^2 + 2^2 3^3 \dot{J}^2 = 0$$

ce qui donne

$$(z_2 - z_3)^2(z_3 - z_1)^2(z_1 - z_2)^2 = \frac{1}{2^4}(\dot{I}^3 - 27J^2)$$

et

$$f^2(\lambda) : \varphi^2(\lambda) = \frac{2^2}{3^6 J^2}(I^3 - 27J^2).$$

On voit par là que l'équation (6) dont les racines sont les six rapports anharmoniques (4) s'écrit

(11)
$$3^6 J x^2(x-1)^2 - 2^2(\dot{I}^3 - 27J^2)(x+1)^2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2(x-2)^2 = 0;$$

elle n'a pas encore la forme demandée.

Or lorsque les quatre nombres x_1, x_2, x_3, x_4 forment un rapport équianharmonique, les six nombres (4) sont égaux par trois aux racines cubiques β, β^2 de l'unité négative; il en résulte que l'équation

$$x^2(x-1)^2 - \frac{f^2(\beta)}{\varphi^2(\beta)}(x+1)^2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2(x-2)^2 = 0$$

est équivalente à

$$(x^2 - x + 1)^3 = 0$$

Comme $f^2(\beta) : \varphi^2(\beta) = -\frac{4}{27}$, on a identiquement

$$27x^2(x-1)^2 + 4(x+1)^2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2(x-2)^2 = (x^2 - x + 1)^3$$

et il suffit de retrancher cette identité multipliée par $27\dot{J}^2$ de l'équation (11) pour obtenir l'équation (2).

80. Corollaire. Pour que les racines de l'équation (2) forment un groupe harmonique ou un groupe équianharmonique, il faut et il suffit que $\dot{J} = 0$ ou que $\dot{I} = 0$.

Table des matières.

Cours de la Faculté des Sciences de l'Université Libre de Bruxelles

AD. MINEUR



Géométrie Projective

(NOUVELLE ÉDITION)

II

BRUXELLES
J. VAN DIJL, Libraire-Editeur, rue des Etudiants, 38
ET
ANCIENNE LIBRAIRIE CASTAIGNE, rue Montagne aux Herbes Potagères, 22

Cours de la Faculté des Sciences de l'Université Libre de Bruxelles

AD. MINEUR



Géométrie Projective

(NOUVELLE ÉDITION)

II

BRUXELLES
J. VAN DIJL, LIBRAIRE-EDITEUR, rue des Etudiants, 38
ET
ANCIENNE LIBRAIRIE CASTAIGNE, rue Montagne aux Herbes Potagères, 22



Définition de la géométrie projective. — 1. 1° Quand il existe entre les éléments de deux figures géométriques F, F′ une correspondance telle qu'on puisse construire la figure F′ dès que la figure F est donnée, on dit que cette correspondance définit une transformation; en la désignant symboliquement par la lettre T, on dit que la figure F′ est une transformée de la figure F par la transformation T et on écrit

$$F' = F.T.$$

2° Si

$$F_1 = F.T_1 \qquad \text{et} \qquad F_2 = F_1.T_2,$$

on a

$$F_2 = (F.T_1).T_2 .$$

La figure F_2 peut être construite en partant de la figure F; elle est la transformée de celle-ci par une transformation qu'on appelle le produit des transformations T_1, T_2 et qu'on représente par la notation $T_1 T_2$, ce qui permet d'écrire

$$F_2 = (F.T_1).T_2 = F.T_1 T_2 .$$

3° Plus généralement,

$$T_1 T_2 \ldots\ldots T_{n-1} T_n = (T_1 T_2 \ldots\ldots T_{n-1}) T_n \qquad \text{et} \qquad T^n = T^{n-1} T.$$

4° Les produits $T_1 T_2$, $T_2 T_1$ n'ont pas nécessairement la même signification. Ainsi, lorsque T_1 et T_2 sont des symétries par rapport aux faces d'un dièdre dont l'angle plan θ n'est pas un angle droit, les produits $T_1 T_2$, $T_2 T_1$ font tourner un point quelconque A d'un même angle 2θ autour de l'arête du dièdre mais dans des sens opposés et remplacent le point A par des points différents.

5° Lorsque les produits $T_1 T_2$, $T_2 T_1$ ont la même signification, on écrit

$$T_1 T_2 = T_2 T_1 ,$$

on dit que les produits sont égaux et que les transformations T_1, T_2 sont permutables ou échangeables. — Il en est ainsi pour les symétries par rapport aux faces d'un dièdre droit dont le produit est une symétrie par rapport à l'arête du dièdre.

6° Un produit de transformations n'est pas altéré quand on y remplace deux ou plusieurs transformations consécutives par leur produit effectué. — Pour le démontrer, il suffit de prouver que

$$T_1 T_2 T_3 = T_1 (T_2 T_3).$$

Soit F une figure quelconque. Si

$$F_1 = F.T_1, \qquad F_2 = F_1.T_2, \qquad F_3 = F_2.T_3,$$

on en déduit

$$F_3 = F_2 . T_3 \quad = (F_1.T_2).T_3 = F_1.(T_2 T_3) = (F.T_1).(T_2 T_3) = F_1.\{T_1 (T_2 T_3)\}.$$

Mais on a aussi

$$F_2 = F_1.T_2 = (F.T_1).T_2 = F.(T_1 T_2)$$

et

$$F_3 = F_2.T_3 = \{F.(T_1 T_2)\}.T_3 = F.\{(T_1 T_2) T_3\} = F.(T_1 T_2 T_3).$$

ayant à la fois

$$F_3 = F.\{T_1 (T_2 T_3)\} \qquad \text{et} \qquad F_3 = F.(T_1 T_2 T_3),$$

Les transformations $T_1(T_2 T_3)$, $T_1 T_2 T_3$ sont de même effet et on ecrit donc

$$T_1 T_2 T_3 = T_1(T_2 T_3).$$

7° Toutes les fois qu'on a

$$F = F.T_1 \qquad \text{ou} \qquad F = F.T_1 T_2 \ldots\ldots T_n,$$

on écrit

$$T = 1 \qquad \text{ou} \qquad T_1 T_2 \ldots\ldots T_n = 1$$

et on dit que la transformation T et le produit $T_1 T_2 \ldots\ldots T_n$ sont équivalents à la transformation identique.

8° Au lieu de

$$F_1 = F.T,$$

on écrit aussi

$$F = F_1.T^{-1}$$

et on dit que T^{-1} est la transformation inverse de la transformation T.

Des deux relations précédentes, on déduit

$$F_1 = F.T = (F_1.T^{-1}).T = F_1.(T^{-1}T) \quad \text{et} \quad F = F_1.T^{-1} = (F.T).T^{-1} = F.(TT^{-1})$$

d'où

$$T^{-1}T = TT^{-1} = 1.$$

Deux transformations inverses sont donc permutables et leur produit est la transformation identique.

9° Si la figure F_1 est la transformée de la figure F par la transformation T_1, si les figures φ, φ_1 sont les transformées des figures F, F_1 par la transformation T_2, la transformation θ par laquelle la figure φ devient la figure φ_1 s'appelle la transformée de T_1 par T_2.

Par hypothèse,

$$F_1 = F.T_1 \text{ ou } F = F_1.T_1^{-1}, \qquad \varphi = F.T_2 \text{ ou } F = \varphi.T_2^{-1}, \qquad \varphi_1 = F_1.T_2 \text{ ou } F_1 = \varphi_1.T_2^{-1}.$$

on a donc

$$\varphi_1 = F_1.T_2 = F.T_1 T_2 = \varphi.T_2^{-1} T_1 T_2,$$

et, puisque

$$\varphi_1 = \varphi.\theta,$$

la transformation θ s'exprime en fonction des transformations T_1, T_2 par la formule

$$\theta = T_2^{-1} T_1 T_2,$$

on en déduit

$$T_2 \theta T_2^{-1} = T_2 T_2^{-1} T_1 T_2 T_2^{-1} = T_1$$

et en comparant cette formule à la précédente, on constate que si θ est la transformée de T_1 par T_2, T_1 est la transformée de θ par T_2^{-1}.

Corollaires. 1) Quand $T_2 T_1 = T_1 T_2$, $\theta = T_1$.

2) Si θ et θ' sont les transformées de T_1 et de T_1' par T_2, $\theta\theta'$ est la transformée de $T_1 T_1'$ par T_2.

3) Si θ est la transformée de T_1 par T_2, θ^n est la transformée de T_1^n par T_2.

2. On dit qu'un ensemble de transformations forment un groupe de transformations quand

le produit de deux quelconques d'entre elles est une transformation de l'ensemble. On admet cependant qu'un groupe de transformations renferme les transformations inverses de toutes celles qu'il contient, ce qui entraîne ces deux conséquences: 1) Tout groupe de transformations contient la transformation identique; 2) Si T_1, T_2 sont deux transformations d'un groupe de transformations, il y a toujours deux transformations T_3, T_4 du groupe pour lesquelles on a

$$T_1 = T_2 T_3 = T_4 T_2 ;$$

ces transformations sont

$$T_3 = T_2^{-1} T_1 \qquad \text{et} \qquad T_4 = T_1 T_2^{-1}.$$

3. Dans la théorie des coordonnées projectives, on a distingué trois espèces fondamentales. Il existe des transformations dites projectives pour lesquelles les formes fondamentales de même espèce et d'autres qui en dérivent se transforment les unes dans les autres; l'ensemble de ces transformations constitue un groupe de transformations qu'on appelle le groupe projectif et dont l'étude fait l'objet de la géométrie projective.

Chapitre I : De la projectivité dans les formes fondamentales.

§ I : Formes fondamentales de première espèce.

4. Les formes fondamentales de première espèce sont la ponctuelle, la feuillée et le faisceau. Chacune d'elles est un ensemble d'éléments de même nom: des points pour la ponctuelle, des plans (feuillets) pour la feuillée, des droites (rayons) pour le faisceau. Quand il est nécessaire que les notations aient des significations spéciales, les lettres A, B, C, ... désignent des points, les lettres α, β, γ...., désignent des plans et les lettres a, b, c, ... désignent des droites. Dans les théories communes aux trois formes, les notations perdent leurs significations particulières.

La position de chaque élément d'une forme fondamentale est déterminée par des coordonnées binaires rapportant la forme à trois quelconques de ses éléments pris pour éléments fondamentaux. Si A, B, C sont les éléments fondamentaux et si X_1, X_2 sont les coordonnées binaires de l'élément X,

$$(A, B, C, X) = \frac{X_1}{X_2} ;$$

plus généralement, la valeur du rapport anharmonique de quatre éléments quelconques X, Y, Z, T est donnée par la formule

$$(X, Y, Z, T) = \frac{|XZ|}{|ZY|} : \frac{|XT|}{|TY|},$$

dans laquelle toute notation telle que $|XZ|$ désigne le déterminant

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ Z_1 & Z_2 \end{vmatrix}$$

des coordonnées binaires des éléments X et Z.

5. Définition de la projectivité dans les formes fondamentales de première espèce.

Soient φ, φ' deux formes fondamentales de première espèce; X_1 et X_2, X'_1 et X'_2 les coordonnées binaires d'éléments X, X' appartenant aux deux formes.

1° On dit que la forme φ' engendrée par l'élément X' est une transformée par projectivité de la forme φ engendrée par l'élément X lorsque les coordonnées binaires de l'élément X' s'expriment en fonction de celles de l'élément X par des équations

$$(1) \qquad X'_1 = aX_1 + bX_2 \quad , \quad X'_2 = cX_1 + dX_2 ,$$

dans lesquelles a, b, c, d sont des constantes vérifiant la condition

$$(2) \qquad D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

2° Les équations (1) peuvent donc être résolues par rapport à X_1 et X_2; et on a

$$(3) \qquad X_1 = \frac{d}{D} X'_1 - \frac{b}{D} X'_2, \qquad X_2 = -\frac{c}{D} X'_1 + \frac{a}{D} X'_2$$

et le déterminant de ces nouvelles équations a une valeur différente de zéro

$$(4) \qquad \frac{1}{D^2} \begin{vmatrix} d & -b \\ -c & a \end{vmatrix} = \frac{1}{D} \neq 0.$$

Donc, si la forme φ' engendrée par l'élément X' est une transformée par projectivité de la forme φ engendrée par l'élément X, celle-ci est aussi une transformée par projectivité de l'autre, de sorte que, dans l'ensemble des formes fondamentales de première espèce, la transformation inverse d'une projectivité est également une projectivité.

3° Les formes φ, φ' engendrées par les éléments X, X' sont dites projectives l'une à l'autre, les éléments X, X' sont dits homologues ou correspondants et on écrit, à volonté,

$$(5) \qquad \varphi(X) \,\overline{\wedge}\, \varphi'(X') \quad \text{ou} \quad \varphi'(X') \,\overline{\wedge}\, \varphi(X),$$

le signe $\overline{\wedge}$ se lisant "projectif à".

4° Si X et X', Y et Y' sont deux couples d'éléments homologues,

$$(6) \qquad |X'Y'| = D.|XY|.$$

Les conditions

$$(7) \qquad X \equiv Y, \qquad X' \equiv Y'$$

sont donc équivalentes et on dit que toute projectivité entre deux formes fondamentales de première espèce établit une correspondance réciproque et univoque, ou biunivoque, entre les éléments homologues des deux formes.

6. Théorème. *La nature des équations par lesquelles on établit une projectivité entre deux formes fondamentales de première espèce, n'est pas altérée par une transformation des coordonnées binaires dans l'une ou l'autre des deux formes.*

Les équations de projectivité pouvant être résolues par rapport à l'un ou l'autre des éléments homologues, considérons la projectivité définie par les équations (1) entre les formes φ, φ' et effectuons dans la forme φ la transformation des coordonnées binaires caractérisée par les formules

$$(8) \qquad X_1 = a' X''_1 + b' X''_2 \quad , \quad X_2 = c' X''_1 + d' X''_2$$

dont les coefficients vérifient donc la condition.

$$(9) \qquad D' = \begin{vmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{vmatrix} \neq 0.$$

Les équations (1) deviennent

$$(10) \qquad X'_1 = (aa' + cb')X''_1 + (ba' + db')X''_2, \qquad X'_2 = (ac' + cd')X''_1 + (bc' + dd')X''_2.$$

Elles ont conservé leur forme primitive et les nouveaux coefficients sont tels que

$$(11) \qquad \begin{vmatrix} aa' + cb' & ba' + db' \\ ac' + cd' & bc' + dd' \end{vmatrix} = DD' \neq 0;$$

le théorème est donc démontré.

7. **Remarques**. _ 1° La démonstration précédente peut s'interpréter d'une autre manière. On peut considérer les équations (1) avec la condition (2) comme établissant une projectivité entre les éléments X, X' des formes fondamentales de première espèce φ, φ'; considérer les équations (8) avec la condition (9) comme établissant une projectivité entre les éléments X, X'' de deux formes fondamentales de première espèce φ, φ''; et considérer les équations (10) avec la condition (11) comme établissant une projectivité entre les éléments X', X'' des formes fondamentales de première espèce φ', φ''. Dès lors, les équations (10) et la condition (11) se déduisant des équations (1), (8) et des conditions (2), (9), il en résulte que *deux formes fondamentales de première espèce projectives à une troisième, sont projectives entre elles.* En se servant de la notation (5), on peut dire que si on a

(12) $$\varphi(X)\,\overline{\wedge}\,\varphi'(X') \qquad \text{et} \qquad \varphi(X)\,\overline{\wedge}\,\varphi''(X'')$$

on a aussi

(13) $$\varphi'(X')\,\overline{\wedge}\,\varphi''(X'').$$

2° Cette propriété exprime que dans l'ensemble des formes fondamentales de première espèce, tout produit de projectivités est une projectivité. Les projectivités entre formes fondamentales de première espèce constituent donc un groupe de transformations qui est le groupe projectif pour ces formes.

3° Si deux formes fondamentales de première espèce φ, φ', de même nom, sont superposées, la projectivité définie par les équations (1) se réduit à la transformation identique

(14) $$X'_1 : X'_2 = X_1 : X_2$$

quand on fait

(15) $$a = d \neq 0 \qquad \text{et} \qquad b = c = 0.$$

4° Pour que les projectivités définies par les équations

(16) $$\begin{cases} X'_1 = aX_1 + bX_2, \\ X'_2 = cX_1 + dX_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} X'_1 = a'X_1 + b'X_2, \\ X'_2 = c'X_1 + d'X_2 \end{cases}$$

entre les mêmes formes soient identiques, il faut et il suffit qu'on ait

(17) $$(aX_1 + bX_2) : (cX_1 + dX_2) = (a'X_1 + b'X_2) : (c'X_1 + d'X_2)$$

quel que soit la valeur du rapport $X_1 : X_2$, ce qui aura lieu si

(18) $$a : b : c : d = a' : b' : c' : d'.$$

Toute projectivité entre les deux formes fondamentales de première espèce φ, φ' est donc déterminée par les rapports mutuels des coefficients a, b, c, d des équations (1) ou par les valeurs de trois paramètres. C'est pour cette raison que le groupe projectif des formes fondamentales de première espèce est dit à trois paramètres et le nombre des projectivités pour lesquelles les rapports $a : b : c : d$ sont réels est triplement infini ou ∞^3.

5° **Equation bilinéaire de projectivité**. On peut remplacer le système des équations (1) par l'équation unique

(19) $$X'_1 : X'_2 = (aX_1 + bX_2) : (cX_1 + dX_2)$$

ou

(20) $$a_{11}X_1X'_1 + a_{12}X_1X'_2 + a_{21}X_2X'_1 + a_{22}X_2X'_2 = 0,$$

si on pose

(21) $$a_{11}=c, \quad a_{12}=-a, \quad a_{21}=d, \quad a_{22}=-b,$$

et on a

(22) $$D=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -a_{12} & -a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

L'équation (20) est linéaire en X_1 et X_2 ainsi qu'en X'_1, X'_2 ; on l'appelle l'équation bilinéaire de projectivité entre les formes φ, φ' ; le déterminant D est le module de cette équation.

6° **Projectivité singulière.** On dit que l'équation (20) établit une projectivité singulière entre deux formes fondamentales de première espèce φ, φ' lorsque son module $D=0$. Dans ce cas, il y a sur chaque forme un élément qui correspond à lui seul à tous ceux de l'autre forme. En effet, quand $D=0$, il existe un nombre k tel que

(23) $$a_{11}:a_{12}=a_{21}:a_{22}=k$$

et l'équation (20) se transforme en

(24) $$(a_{12}X_1+a_{22}X_2)(kX'_1+X'_2)=0.$$

Elle est vérifiée pour $a_{12}X_1+a_{22}X_2=0$ quel que soit l'élément X' et pour $kX'_1+X'_2=0$ quelque soit l'élément X ; l'élément X $(a_{22}, -a_{12})$ de la forme φ correspond donc à lui seul à tous les éléments de la forme φ', et l'élément X' $(1, -k)$ de la forme φ' correspond à lui seul à tous les éléments de la forme φ.

8. 1° **Théorème.** Toute relation de projectivité entre deux formes fondamentales de première espèce est déterminée par trois couples d'éléments homologues.

Soient A et A', B et B', C et C' trois couples d'éléments homologues donnés sur les formes fondamentales de première espèce φ, φ'. On peut prendre ces éléments comme éléments fondamentaux des coordonnées binaires dans les deux formes. En exprimant que l'équation bilinéaire (20) est vérifiée quand on y fait

(25) $$X_1=X'_1=0 \text{ et } X_2=X'_2=0, \quad X_1=X'_1=0 \text{ et } X_2=X'_2=1, \quad X_1=X_2=X'_1=X'_2=1,$$

on obtient des équations de condition se réduisant à

(26) $$a_{11}=a_{22}=0 \quad \text{et} \quad a_{12}+a_{21}\neq 0.$$

Il y a donc une seule projectivité dans laquelle les trois couples d'éléments donnés sont des couples d'éléments homologues et son équation est

(27) $$X_1X'_2-X_2X'_1=0 \quad \text{ou} \quad X_1:X_2=X'_1:X'_2.$$

2° **Corollaire.** La relation (27) exprime que

(28) $$(A,B,C,X)=(A',B',C',X')$$

et le théorème permet de considérer A et A', B et B', C et C' comme trois couples quelconques d'éléments homologues, donc, *lorsque deux formes fondamentales de première espèce sont projectives, le rapport anharmonique de quatre éléments quelconques de l'une est égal à celui des éléments homologues de l'autre.*

3° Réciproquement, s'il existe entre les éléments de deux formes fondamentales de première espèce φ, φ' une correspondance biunivoque telle que le rapport anharmonique de quatre éléments quelconques de la première soit égal à celui des éléments homologues de la seconde, les deux formes sont projectives.

1) Démontrons d'abord que la correspondance dont il est question dans cet énoncé est possible à priori. Soient A, B, C trois éléments particuliers de la forme φ et A', B', C' trois éléments particuliers de la forme φ'. En posant

$$(29) \qquad (A, B, C, X) = (A', B', C', X'),$$

on établit entre les éléments courants X, X' des deux formes une correspondance biunivoque dans laquelle A et A', B et B', C et C' sont des éléments correspondants. De plus si X et X', Y et Y', Z et Z', T et T' sont quatre couples quelconques d'éléments correspondants, pour lesquels les deux membres de (29) ont les valeurs x, y, z, t, on a

$$(30) \qquad (X, Y, Z, T) = (X', Y', Z', T') = \frac{x-z}{z-y} : \frac{x-t}{t-y}.$$

2) La correspondance définie par la relation (29) satisfait donc aux conditions de l'énoncé, elle est la seule qui puisse le faire dès qu'on donne trois couples d'éléments homologues de la correspondance, et il faut maintenant démontrer qu'elle est une projectivité. Pour cela, il suffit d'observer qu'en prenant les éléments A, B, C et A', B', C' comme éléments fondamentaux des coordonnées binaires sur les deux formes, la relation (29) est équivalente à

$$(31) \qquad X_1 : X_2 = X'_1 : X'_2 \qquad \text{ou} \qquad X_1 X'_2 - X_2 X'_1 = 0$$

qui est l'équation bilinéaire d'une projectivité.

9. 1° **Définition**. Quand deux formes fondamentales de première espèce, projectives et de même nom, ont le même support, si un élément du support coïncide avec son homologue quelle que soit celle des deux formes dans laquelle on le considère, cet élément s'appelle un élément double de la projectivité ou des deux formes données.

2° **Théorème**. *Quand deux formes fondamentales de première espèce, projectives, de même nom et de même support, ont trois éléments doubles, les deux formes se confondent, c'est à dire, que tout élément du support est un élément double et que la projectivité se réduit à la transformation identique.*

En effet, si A, B, C sont trois éléments doubles, la relation de projectivité

$$(32) \qquad (A, B, C, X) = (A, B, C, X')$$

se réduit à $X \equiv X'$.

§ II : Formes fondamentales de seconde espèce.

10. Les formes fondamentales de seconde espèce sont le système plan et la gerbe. Chacune d'elles est la réunion de deux ensembles d'éléments, des points et des droites pour le système plan, des droites et des plans pour la gerbe. S'il est nécessaire que les notations aient des significations spéciales, les lettres A, B, C, ... désignent des points, les lettres a, b, c, ... des droites et les lettres α, β, γ, ... des plans. Dans les théories communes aux deux formes, les notations perdent leurs significations particulières. Si φ est une forme fondamentale quelconque de seconde espèce, on désigne par A, B, C ..... et a, b, c, ... ses deux sortes d'éléments ; par X_1, X_2, X_3 et x_1, x_2, x_3 les coordonnées ternaires des éléments X et x, et on suppose les coordonnées ternaires associées de telle façon qu'ayant

$$X_1 x_1 + X_2 x_2 + X_3 x_3 = 0,$$

l'élément X appartienne à l'élément x.

11. Définition de la projectivité dans les formes fondamentales de seconde espèce.

Soient φ, φ' deux formes fondamentales de seconde espèce ; (X_1, X_2, X_3) et (x_1, x_2, x_3), (X'_1, X'_2, X'_3) et (x'_1, x'_2, x'_3) les coordonnées ternaires d'éléments X et x, X' et x' appartenant aux deux formes.
1° On dit que la forme φ' engendrée par l'élément X' est une transformée par projectivité de la forme φ engendrée par l'élément X lorsque les coordonnées ternaires de l'élément X' s'expriment en fonction de celles de l'élément X par des relations

(1) $$X'_i = a_{i1} X_1 + a_{i2} X_2 + a_{i3} X_3$$

pour $i = 1, 2, 3$, dans lesquelles les coefficients a_{ij} sont des constantes vérifiant la condition

(2) $$D = | a_{11} \; a_{22} \; a_{33} | \neq 0.$$

2° Les équations (1) peuvent donc être résolues par rapport aux coordonnées X_1, X_2, X_3 de l'élément X. Si

(3) $$\Delta = | \alpha_{11} \; \alpha_{22} \; \alpha_{33} |$$

est le déterminant adjoint du déterminant D,

(4) $$X_i = \frac{\alpha_{1i}}{D} X'_1 + \frac{\alpha_{2i}}{D} X'_2 + \frac{\alpha_{3i}}{D} X'_3$$

pour $i = 1, 2, 3$, et le déterminant des coefficients de ces nouvelles équations est

(5) $$\frac{1}{D^3} | \alpha_{11} \; \alpha_{22} \; \alpha_{33} | = \frac{1}{D} \neq 0.$$

La forme φ engendrée par l'élément X est donc une transformée par projectivité de la forme φ' engendrée par l'élément X' et ainsi la transformation inverse de la projectivité (1) est une projectivité.
3° Si on convient ensuite d'associer les éléments X et x, X' et x' des formes φ, φ' pour avoir identiquement

(6) $$X_1 x_1 + X_2 x_2 + X_3 x_3 = X'_1 x'_1 + X'_2 x'_2 + X'_3 x'_3 ,$$

il existe entre les coordonnées des éléments x et x' les deux systèmes d'équations $(i = 1, 2, 3.)$

(7) $$x_i = a_{1i} x'_1 + a_{2i} x'_2 + a_{3i} x'_3 \qquad \text{et} \qquad x'_i = \frac{\alpha_{i1}}{D} x_1 + \frac{\alpha_{i2}}{D} x_2 + \frac{\alpha_{i3}}{D} x_3 . \qquad (8)$$

Les coefficients de ces deux systèmes d'équations vérifiant les conditions (2) et (5), les formes φ, φ' engendrées par les éléments x, x' sont projectives.
4° Quand on établit entre les éléments X et X', x et x' toutes les relations qui précèdent, on dit que les formes φ, φ' engendrées par ces éléments sont projectives ou que chacune d'elles est une transformée de l'autre par projectivité ; on écrit

(9) $$\varphi(X, x) \,\pi\, \varphi'(X', x') \qquad \text{ou} \qquad \varphi'(X', x') \,\pi\, \varphi(X, x) ;$$

les éléments X et X', x et x' sont dits homologues ou correspondants.

Corollaire. *Lorsque les formes fondamentales de seconde espèce $\varphi(X, x)$, $\varphi'(X', x')$ sont projectives, il existe une correspondance réciproque et univoque, ou biunivoque, entre les éléments X et X', x et x', et, si l'élément X appartient à l'élément x, l'élément X' appartient à l'élément x'.*

12 **Théorème.** *La nature des équations par lesquelles on établit une projectivité entre deux formes fondamentales de seconde espèce n'est pas altérée par une transformation des coordonnées ternaires dans l'une ou l'autre des deux formes.*

Les équations de la projectivité pouvant être résolues par rapport à l'un ou l'autre des éléments homologues, considérons la projectivité définie entre les formes φ, φ' par les équations (1) avec la condition (2) et effectuons dans la forme φ la transformation des coordonnées ternaires caractérisée

par les formules $(i = 1, 2, 3)$

(10) $$X_i = a'_{i1} X''_1 + a'_{i2} X''_2 + a'_{i3} X''_3,$$

avec la condition

(11) $$D' = \left| a'_{11} \quad a'_{22} \quad a'_{33} \right| \neq 0.$$

Les équations (1) sont remplacées par des équations de même forme,

(12) $$X'_i = a''_{i1} X''_1 + a''_{i2} X''_2 + a''_{i3} X''_3$$

et on a la condition

(13) $$D'' = \left| a''_{11} \quad a''_{22} \quad a''_{33} \right| = DD' \neq 0,$$

ce qui démontre le théorème.

13. **Remarques.** 1° Cette démonstration peut s'interpréter d'une autre manière. On peut considérer les équations (1) avec la condition (2) comme établissant une projectivité entre les éléments X et X', x et x' de deux formes fondamentales de seconde espèce φ, φ'; considérer les équations (10) avec la condition (11) comme établissant une projectivité entre les éléments X et X'', x et x'' de deux formes fondamentales de seconde espèce φ et φ''; et considérer les équations (12) avec la condition (13) comme établissant une projectivité entre les éléments X et X', x et x' des formes fondamentales de seconde espèce φ', φ''. Mais les équations (12) et la condition (13) se déduisent des équations (1), (10) et des conditions (2), (11); donc, *deux formes fondamentales de seconde espèce, projectives à une troisième, sont projectives entre elles.* En se servant des notations (9) on peut dire que si on a

(14) $$\varphi(X, x) \,\pi\, \varphi'(X', x') \qquad \text{et} \qquad \varphi(X, x) \,\pi\, \varphi''(X'', x''),$$

on a aussi

(15) $$\varphi'(X', x') \,\pi\, \varphi''(X'', x'').$$

2° Cette propriété exprime que dans l'ensemble des formes fondamentales de seconde espèce, tout produit de projectivités est une projectivité. Les projectivités entre formes fondamentales de seconde espèce constituent donc un groupe de transformations qui est le groupe projectif pour ces formes.

3° Si des formes fondamentales de seconde espèce, de même nom, ont le même support, la projectivité définie par les équations (1) se réduit à la transformation identique

(16) $$X'_1 : X'_2 : X'_3 = X_1 : X_2 : X_3$$

quand on fait

(17) $$a_{ij} = 0 \text{ pour } i \neq j \qquad \text{et} \qquad a_{11} = a_{22} = a_{33} \neq 0.$$

4° pour que les projectivités

(18) $$X'_i = a_{i1} X_1 + a_{i2} X_2 + a_{i3} X_3 \qquad \text{et} \qquad X'_i = a'_{i1} X_1 + a'_{i2} X_2 + a'_{i3} X_3$$

entre les mêmes formes soient identiques, il faut et il suffit que les coefficients a_{ij}, a'_{ij} soient proportionnels. Toute projectivité entre les deux formes fondamentales de seconde espèce φ, φ' est donc déterminée par les rapports des coefficients a_{ij} des équations (1) ou par les valeurs de huit paramètres. C'est pour cette raison que le groupe projectif des formes fondamentales de seconde espèce est dit à huit paramètres et le nombre des projectivités pour lesquelles les rapports des coefficients a_{ij} sont réels est ∞^8.

5° **Projectivité singulière.** Les équations (1) définissent une projectivité singulière entre les formes φ, φ' lorsque le déterminant D est nul.

14. 1° **Théorème.** *Toute projectivité entre deux formes fondamentales de seconde espèce est déterminée par quatre couples d'éléments homologues pouvant être pris comme éléments fondamentaux des coordonnées ternaires dans les deux formes.*

Soient A et A', B et B', C et C', D et D' les quatre couples d'éléments donnés dans les deux formes fondamentales de seconde espèce φ, φ'. On peut prendre ces éléments comme éléments fondamentaux des coordonnées ternaires dans les deux formes. En exprimant que les équations (1) sont vérifiées par les coordonnées des éléments A et A', B et B', C et C', on trouve $a_{ii} \neq 0$ et $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$. Ces trois couples d'éléments sont donc des couples d'éléments homologues dans toutes les projectivités dont les équations sont

(19) $$X'_1 = a_{11} X_1, \qquad X'_2 = a_{22} X_2, \qquad X'_3 = a_{33} X_3$$

avec la condition

(20) $$a_{11} a_{22} a_{33} \neq 0.$$

Les éléments D, D' seront aussi des éléments homologues, si on a

(21) $$X'_1 = X'_2 = X'_3 \quad \text{avec} \quad X_1 = X_2 = X_3$$

ou

(22) $$a_{11} = a_{22} = a_{33}.$$

Il y a donc une seule projectivité répondant à la question ; ses équations sont

(23) $$X'_1 : X'_2 : X'_3 = X_1 : X_2 : X_3$$

et on a aussi

(24) $$x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_1 : x_2 : x_3$$

pour les éléments de seconde espèce.

2° **Corollaire.** *Quand deux formes fondamentales de seconde espèce φ, φ' sont projectives, si l'élément X de la forme φ engendre une forme fondamentale de première espèce ayant l'élément x pour support, l'élément X' homologue de l'élément X dans la forme φ' engendre une forme fondamentale de première espèce ayant pour support l'élément homologue x' de l'élément x, et les formes x, x' sont projectives.*

On sait déjà que si l'élément X appartient à l'élément x, l'élément X' appartient à l'élément x'. Mais en conservant la figure de la démonstration précédente, on peut supposer x confondu avec BC et x' avec B'C'. Dans ces conditions, X_1 et X'_1 sont nuls, X_2 et X_3, X'_2 et X'_3 sont les coordonnées binaires de X et X' sur x et x'. Or, les équations (23) donnent

(25) $$X'_2 : X'_3 = X_2 : X_3 ;$$

on a donc

(26) $$x'(X') \overline{\wedge}\, x(X).$$

N. B. Il résulte de cette propriété que le groupe projectif des formes fondamentales de première espèce est contenu dans celui des formes fondamentales de seconde espèce.

15. **Classification des projectivités entre formes fondamentales de seconde espèce.** 1° Quand les formes projectives sont deux systèmes plans ou deux gerbes, la projectivité s'appelle collinéation ou homographie si les éléments homologues ont le même nom ; elle s'appelle réciprocité ou dualité si les éléments homologues n'ont pas le même nom.

Quand les formes projectives sont un système plan et une gerbe, la projectivité s'appelle collinéation ou homographie si les points et les droites du système plan correspondent aux droites et aux plans de la gerbe; elle s'appelle réciprocité ou dualité si les points et les droites du système plan correspondent aux plans et aux droites de la gerbe.

2° Corollaire. Deux formes fondamentales de seconde espèce qui sont collinéaires ou réciproques à une troisième, sont collinéaires entre elles.

16. 1° Définition. Quand deux formes fondamentales de seconde espèce, de même nom et de même support, sont colliniaires, deux éléments homologues qui coïncident, déterminent un élément double de la collinéation ou des deux formes fondamentales.

2° Théorème. Quand deux formes fondamentales de seconde espèce, de même nom et de même support, sont collinéaires et qu'elles ont quatre éléments doubles pouvant servir d'éléments fondamentaux à des coordonnées ternaires, elles se confondent, c'est-à-dire que tout élément du support commun est un élément double et que la collinéation se réduit à la transformation identique.

En effet, en prenant les éléments doubles donnés comme éléments fondamentaux des coordonnées ternaires, les équations de la collinéation

$$(27) \qquad X_1 : X_2 : X_3 = X'_1 : X'_2 : X'_3, \qquad x_1 : x_2 : x_3 = x'_1 : x'_2 : x'_3$$

se réduisent aux identités $X \equiv X'$, $x \equiv x'$.

§ III : Formes fondamentales de troisième espèce

17. La seule forme fondamentale de troisième espèce est l'espace à trois dimensions composé de points, de plans et de droites. Les points ou les plans seront désignés par les lettres A, B, C, ..., les plans ou les points par les lettres α, β, γ, ..., et les droites par les lettres a, b, c, ..., On representera par X_1, X_2, X_3, X_4 les coordonnées quaternaires de l'élément X et par $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ celles de l'élément ξ; les coordonnées de la droite x s'écriront $X_{12}, X_{13}, \ldots, X_{23}$ ou $\xi_{12}, \xi_{13}, \ldots, \xi_{23}$. On supposera les coordonnées quaternaires X_i, ξ_i associées de telle manière qu'on aura

$$\xi_X = 0 \quad \text{ou} \quad \xi_1 X_1 + \xi_2 X_2 + \xi_3 X_3 + \xi_4 X_4 = 0$$

lorsque les éléments X et ξ appartiennent l'un à l'autre.

18. Définition de la projectivité dans les formes fondamentales de troisième espèce. Soient φ, φ' deux formes fondamentales de troisième espèce; (X_1, X_2, X_3, X_4) et (X'_1, X'_2, X'_3, X'_4), $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ et $(\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3, \xi'_4)$, $(X_{12}, \ldots, X_{23})$ et $(X'_{12}, \ldots, X'_{23})$ ou $(\xi_{12}, \ldots, \xi_{23})$ et $(\xi'_{12}, \ldots, \xi'_{23})$ les coordonnées des éléments X et X', ξ et ξ', x et x' appartenant aux deux formes.

1° On dit que la forme φ' engendrée par l'élément X' est une transformée par projectivité de la forme φ engendrée par l'élément X lorsque les coordonnées quaternaires de l'élément X' s'expriment en fonction de celles de l'élément X par des relations

$$(1) \qquad X'_i = a_{i1} X_1 + a_{i2} X_2 + a_{i3} X_3 + a_{i4} X_4$$

pour $i = 1, 2, 3, 4$, dans lesquelles les coefficients a_{ij} sont des constantes vérifiant la condition

$$(2) \qquad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} & a_{33} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

2° Les équations (1) peuvent donc être résolues par rapport aux coordonnées X_i de l'élément X. Si

$$(3) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{22} & \alpha_{33} & \alpha_{44} \end{vmatrix}$$

est le déterminant adjoint du déterminant D,

(4) $$X_i = \frac{\alpha_{1i}}{D} X'_1 + \frac{\alpha_{2i}}{D} X'_2 + \frac{\alpha_{3i}}{D} X'_3 + \frac{\alpha_{4i}}{D} X'_4$$

pour $i = 1, 2, 3, 4$ et le déterminant des coefficients de ces nouvelles équations est

(5) $$\frac{1}{D^4} \left| \alpha_{11} \quad \alpha_{22} \quad \alpha_{33} \quad \alpha_{44} \right| = \frac{1}{D} \neq 0.$$

La forme φ engendrée par l'élément X est donc une transformée par projectivité de la forme φ' engendrée par l'élément X' et ainsi la transformation inverse d'une projectivité est une projectivité.

3° Si on convient ensuite d'associer les éléments X et ξ, X' et ξ' des formes φ, φ' pour avoir identiquement

(6) $$\xi_1 X_1 + \xi_2 X_2 + \xi_3 X_3 + \xi_4 X_4 = \xi'_1 X'_1 + \xi'_2 X'_2 + \xi'_3 X'_3 + \xi'_4 X'_4,$$

il existe entre les coordonnées des éléments ξ et ξ' les deux systèmes d'équations ($i = 1, 2, 3, 4$)

(7) $$\xi_i = a_{1i}\xi'_1 + a_{2i}\xi'_2 + a_{3i}\xi'_3 + a_{4i}\xi'_4 \quad \text{et} \quad \xi'_i = \frac{\alpha_{i1}}{D}\xi_1 + \frac{\alpha_{i2}}{D}\xi_2 + \frac{\alpha_{i3}}{D}\xi_3 + \frac{\alpha_{i4}}{D}\xi_4.$$ (8)

Les coefficients de ces deux systèmes d'équations vérifiant les conditions (2) et (5), les formes φ, φ' engendrées par les éléments ξ, ξ' sont projectives.

4° Quand on établit entre les éléments X et X', ξ et ξ' toutes les relations qui précèdent, on dit que les formes φ, φ' engendrées par ces éléments sont projectives et que chacune d'elles est une transformée de l'autre par projectivité; on écrit

(9) $$\varphi(X, \xi) \,\pi\, \varphi'(X', \xi') \qquad \text{ou} \qquad \varphi'(X', \xi') \,\pi\, \varphi(X, \xi);$$

les éléments X et X', ξ et ξ' sont dits homologues ou correspondants.

Corollaire. *Quand deux formes fondamentales de troisième espèce $\varphi(X, \xi)$, $\varphi'(X', \xi')$ sont projectives, il existe une correspondance réciproque et univoque, ou biunivoque, entre les éléments X et X', ξ et ξ'; si l'élément X appartient à l'élément ξ, l'élément X' appartient à l'élément ξ'; si les éléments X et ξ varient et engendrent une droite x, les éléments X' et ξ' varient et engendrent une droite x', ces droites x et x' sont dites homologues ou correspondantes et on remplace les relations (9) par les relations plus générales*

(10) $$\varphi(X, \xi, x) \,\pi\, \varphi'(X', \xi', x') \qquad \text{ou} \qquad \varphi'(X', \xi', x') \,\pi\, \varphi(X, \xi, x).$$

Si X et X', Y et Y' sont des éléments homologues appartenant aux droites x, x', les formules (1) donnent

(11) $$X'_{ij} = \begin{vmatrix} X'_i & X'_j \\ Y'_i & Y'_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & a_{i4} \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} & a_{j4} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 \end{vmatrix}$$

ou, en employant des relations définies dans la théorie des coordonnées projectives,

(12) $$X'_{ij} = a_{ij}^{12} X_{12} + a_{ij}^{13} X_{13} + a_{ij}^{14} X_{14} + a_{ij}^{34} X_{34} + a_{ij}^{42} X_{42} + a_{ij}^{23} X_{23}.$$

Des formules analogues donnent X_{ij} en fonction de X'_{ij}, ξ_{ij} en fonction de ξ'_{ij}, ξ'_{ij} en fonction de ξ_{ij}. Les déterminants des coefficients de ces divers systèmes d'équations sont des puissances de D et sont donc tous différents de zéro.

19. **Théorème.** *La nature des équations par lesquelles on établit une projectivité entre deux formes fondamentales de troisième espèce n'est pas altérée par une transformation des coordonnées quaternaires dans l'une ou l'autre des deux formes.*

Démonstration analogue à celles faites aux numéros 6 et 12.

20. **Remarques.** 1° De la démonstration de ce théorème, il résulte que si on a

(13) $$\varphi(X,\xi,x)\,\pi\,\varphi'(X',\xi',x') \quad \text{et} \quad \varphi(X,\xi,x)\,\pi\,\varphi''(X'',\xi'',x'')$$

on a aussi

(14) $$\varphi'(X',\xi',x')\,\pi\,\varphi''(X'',\xi'',x'').$$

2° Cette propriété exprime que dans l'ensemble des formes fondamentales de troisième espèce, tout produit de projectivités est une projectivité. Les projectivités entre formes fondamentales de troisième espèce constituent donc un groupe de transformations qui est le groupe projectif pour ces formes.

3° Si deux formes fondamentales de troisième espèce φ, φ', de même nom, ont le même support, la projectivité définie par les équations (1) se réduit à la transformation identique

(15) $$X'_1 : X'_2 : X'_3 : X'_4 = X_1 : X_2 : X_3 : X_4,$$

quand on fait

(16) $$a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{44} \neq 0 \quad \text{et} \quad a_{ij} = 0 \quad \text{pour } i \neq j.$$

4° Pour que les projectivités

(16) bis $$X'_i = a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + a_{i3}X_3 + a_{i4}X_4, \qquad X'_i = a'_{i1}X_1 + a'_{i2}X_2 + a'_{i3}X_3 + a'_{i4}X_4$$

entre les mêmes formes soient identiques, il faut et il suffit que les coefficients a_{ij}, a'_{ij} soient proportionnels.

Toute projectivité entre les deux formes fondamentales de troisième espèce φ, φ' est donc déterminée par les rapports des coefficients a_{ij} des équations (1) ou par les valeurs de quinze paramètres. A cause de cela, le groupe projectif des formes fondamentales de troisième espèce est dit à quinze paramètres et le nombre des projectivités pour lesquelles les rapports des coefficients a_{ij} sont réels est ∞^{15}.

5° **Projectivité singulière.** Les équations (1) définissent une projectivité singulière lorsque le déterminant D est nul.

21. 1° **Théorème.** *Toute projectivité entre deux formes fondamentales de troisième espèce est déterminée par cinq couples d'éléments homologues pouvant être pris pour éléments fondamentaux de coordonnées quaternaires dans les deux formes.*

On prend les éléments donnés comme éléments fondamentaux des coordonnées quaternaires et on trouve que la seule projectivité pouvant répondre à la question est déterminée par les équations

(17) $$X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = X'_1 : X'_2 : X'_3 : X'_4, \qquad \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \xi_4 = \xi'_1 : \xi'_2 : \xi'_3 : \xi'_4, \quad (18)$$

(19) $$X_{12} : X_{13} : X_{14} : X_{34} : X_{42} : X_{23} = X'_{12} : X'_{13} : X'_{14} : X'_{34} : X'_{42} : X'_{23},$$

(20) $$\xi_{12} : \xi_{13} : \xi_{14} : \xi_{34} : \xi_{42} : \xi_{23} = \xi'_{12} : \xi'_{13} : \xi'_{14} : \xi'_{34} : \xi'_{42} : \xi_{23}.$$

2° **Corollaire.** *Quand deux formes fondamentales de troisième espèce φ. φ' sont projectives, à toute forme fondamentale de première ou de seconde espèce appartenant à la forme φ correspond une forme projective de même espèce appartenant à la forme φ'; il en résulte que les groupes projectifs des formes fondamentales de première et de seconde espèce sont contenus dans celui des formes de troisième espèce.*

22. **Classification des projectivités entre formes fondamentales de troisième espèce**

1° Une projectivité entre deux formes fondamentales de troisième espèce est appelée collinéation ou

homographie quand les éléments homologues sont de même nom; elle est appelée réciprocité ou dualité si les points, les plans et les droites de la première forme correspondent aux plans, aux points et aux droites de la seconde.

2° Corollaire. Deux formes fondamentales de troisième espèce qui sont collinéaires ou réciproques à une troisième, sont collinéaires entre elles.

23. 1° Définition. Quand deux espaces collinéaires sont superposés, deux éléments homologues qui coïncident déterminent un élément double de la colliniation ou des deux espaces considérés.

2°. Théorème. Quand deux espaces collinéaires superposés ont cinq points doubles ou cinq plans doubles pouvant servir d'éléments fondamentaux à des coordonnées quaternaires, ils se confondent c'est-à-dire, que tout élément de l'un coïncide avec son homologue dans l'autre et que la colliniation se réduit à la transformation identique.

Démonstration analogue à celles faites aux numéros 9 et 16.

Chapitre II: Des éléments limites de formes fondamentales projectives.

§ I: Points limites de ponctuelles projectives.

24. Définition. Soient u, u' deux ponctuelles projectives ayant leurs supports à distance finie; I le point homologue sur la ponctuelle u du point I' rejeté à l'infini sur la ponctuelle u'; J' le point homologue sur la ponctuelle u' du point J rejeté à l'infini sur la ponctuelle u. Les points I et J' sont appelés les points limites des ponctuelles u, u'. Si le point I coïncide avec le point J, le point I' coïncide avec le point J' et réciproquement; il y a donc deux cas à distinguer selon que les deux points limites sont à l'infini ou à distance finie.

25. Premier cas: Les points limites sont à l'infini. 1° Théorème. Quand les points limites de deux ponctuelles projectives sont à l'infini, le rapport des longueurs de deux segments homologues quelconques est constant.

Soient A et A', B et B', C et C' trois couples de points homologues des ponctuelles projectives u, u' dont les points à l'infini I, I' forment un quatrième couple de points homologues. On a

$$(1)\qquad (A,B,C,I)=(A',B',C',I') \qquad \text{ou} \qquad \frac{AC}{CB}:\frac{AI}{IB}=\frac{A'C'}{C'B'}:\frac{A'I'}{I'B'}$$

et

$$(2)\qquad \frac{AI}{IB}=\frac{A'I'}{I'B'}=-1;$$

d'où

$$(3)\qquad \frac{AC}{CB}=\frac{A'C'}{C'B'} \qquad \text{ou} \qquad \frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}.$$

En remplaçant les points B, B' par d'autres points homologues quelconques D, D', on a, par analogie,

$$(4)\qquad \frac{AC}{A'C'}=\frac{DC}{D'C'}.$$

ayant

$$(5)\qquad \frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{DC}{D'C'},$$

on en déduit

$$(6)\qquad \frac{AC}{A'C'}=\frac{BC+CD}{B'C'+C'D'} \qquad \text{ou} \qquad \frac{AC}{A'C'}=\frac{BD}{B'D'},$$

ce qui démontre le théorème.

2°. Réciproquement, s'il existe entre les points de deux ponctuelles une correspondance biunivoque

telle que le rapport des segments homologues ait une valeur constante, les ponctuelles sont projectives et les points à l'infini sont des points homologues.

Soient A et A', B et B', X et X', trois couples de points homologues des ponctuelles considérées u, u'; I et I' les points à l'infini de ces ponctuelles. A toute position du point X sur la droite u correspond une position du point X' sur la droite u' et

(1) $$\frac{AX}{XB} = \frac{A'X'}{X'B'}$$

Mais

(2) $$\frac{AI}{IB} = \frac{A'I'}{I'B'} = -1;$$

on a donc

(3) $$\frac{AI}{IB} : \frac{AX}{XB} = \frac{A'I'}{I'B'} : \frac{A'X'}{X'B'} \quad \text{ou} \quad (A,B,I,X) = (A',B',I',X'),$$

d'où il résulte que les ponctuelles engendrées par les points X, X' sur les droites u, u' sont projectives et que les points A et A', B et B', I et I' en sont trois couples de points homologues.

3° **Définition**. Des ponctuelles projectives dont les supports sont des droites propres et dont les points à l'infini sont des points homologues sont dites *semblables* et la valeur constante du rapport de deux segments homologues s'appelle le *rapport de similitude* des deux ponctuelles.

En désignant par k le rapport de similitude de deux ponctuelles semblables u, u' dont A et A', X et X' sont des points homologues,

(4) $$AX = k\,A'X'$$

et il en résulte que si tous les éléments considérés sont réels et si le point X se déplace sur la droite u dans un sens déterminé, le point X' se déplace également dans un sens déterminé sur la droite u'.

26. **Second cas: Les points limites sont à distance finie.** 1° **Théorème.** *Quand les points limites de deux ponctuelles projectives sont à distance finie, le produit de leurs distances à deux points homologues quelconques est constant.*

Soient A et A', B et B' deux couples de points homologues de deux ponctuelles projectives u, u' dont les points limites I, J' sont à distance finie; J, I' les points à l'infini des droites u, u'. On a

(1) $$(A,B,I,J) = (A',B',I',J') \quad \text{ou} \quad \frac{AI}{IB} : \frac{AJ}{JB} = \frac{A'I'}{I'B'} : \frac{A'J'}{J'B'}$$

et

(2) $$\frac{AJ}{JB} = \frac{A'I'}{I'B} = -1.$$

on en déduit

(3) $$\frac{AI}{IB} = \frac{J'B'}{A'J'} \quad \text{d'où} \quad IA \cdot J'A' = IB \cdot J'B'.$$

2° *Réciproquement, si les points I, J' sont à distance finie sur les droites u, u' et si les points X, X' se déplacent sur ces droites de telle manière que le produit IX . J'X' conserve la même valeur, les points X, X' engendrent des ponctuelles projectives dont les points I, J' sont les points limites.*

Si A et A' sont des positions particulières des points X, X', on a

(4) $$IA \cdot J'A' = IX \cdot J'X' \quad \text{d'où} \quad \frac{IA}{IX} = \frac{J'X'}{J'A'}$$

et

(5) $$\frac{AJ}{JX} = \frac{A'I'}{I'X'} = -1.$$

On en déduit

(6) $$\frac{IA}{AJ}:\frac{IX}{JX}=\frac{I'A'}{A'J'}:\frac{I'X'}{X'J'} \quad \text{ou} \quad (I,J,A,X)=(I',J',A',X'),$$

ce qui démontre le théorème.

3° Définition. La valeur constante du produit $IX.J'X'$ s'appelle la puissance de la projectivité.

4° Si tous les éléments considérés sont réels, on peut prendre les sens positifs des droites u, u' pour que la puissance de la projectivité soit positive et écrire

(7) $$IX.J'X'=k^2,$$

k ayant une valeur réelle positive.

Il en résulte que si le point X se meut dans un sens déterminé sur la droite u, le point X' se meut également dans un sens déterminé sur la droite u'

Si on porte sur les droites u, u' les segments

(8) $$IP=J'P'=k \quad \text{et} \quad IR=J'R'=-k,$$

les points P et P', R et R' sont des points homologues qu'on appelle les points principaux des deux ponctuelles. Ces points et les points limites déterminent les segments homologues des ponctuelles et règlent le déplacement du point X' sur la ponctuelle u' lorsque le point X parcourt la ponctuelle u dans un sens déterminé.

Si X et X' sont des points homologues, ils vérifient donc l'équation (7) et si on construit sur les droites u, u' les segments

(9) $$IY=J'X' \text{ et } J'Y'=IX, \quad IZ=-IX \text{ et } J'Z'=-J'X', \quad IV=-IY \text{ et } J'V'=-J'Y',$$

on a aussi

(10) $$IY.J'Y'=k^2, \quad IZ.J'Z'=k^2, \quad IV.J'V'=k^2;$$

Y et Y', Z et Z', V et V' sont des couples de points homologues et on a

(11) $$XY=-X'Y' \quad \text{et} \quad XV=X'V';$$

deux points homologues quelconques X, X' des ponctuelles u, u' sont donc les origines de deux couples de segments homologues égaux en valeur absolue.

Lorsque le point X est l'un des points principaux, par exemple le point P, le point X' coïncide avec le point P' et les deux couples de segments homologues égaux sont $PP=P'P'=0$ et $PR=P'R'$.

27. Remarque. Quand on rapporte deux ponctuelles projectives dont les supports sont des droites propres à des abscisses comptées à partir de deux points arbitraires, l'équation de projectivité peut s'écrire

(1) $$aXX'+bX+cX'+d=0$$

et on doit supposer

(2) $$D=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc\neq 0.$$

1° Si $a=0$, b et c sont différents de zéro; en comptant les abscisses à partir de deux points homologues, l'équation (1) se réduit à

(3) $$X=kX'$$

et correspond au cas des ponctuelles semblables.

2° Si $a\neq 0$, les abscisses des points limites I, J' des deux ponctuelles s'obtiennent en faisant $X'=\infty$ ou

$X = \infty$; elles sont donc égales à $-\frac{c}{a}$ et $-\frac{b}{a}$. En comptant les abscisses à partir des points I, J', on a donc $b = c = 0$ et l'équation (1) prend la forme

$$(4) \qquad X.X' = C^{te} \qquad \text{ou} \qquad IX.J'X' = C^{te}$$

déjà trouvée plus haut.

§ II : Droites limites des systèmes plans collinéaires.

28. **Définition**. Soient ϖ, ϖ' deux systèmes plans collinéaires dont les supports sont des plans propres. Il existe une correspondance biunivoque entre les droites du premier et celles du second. A la droite impropre j du système plan ϖ, correspond une droite j' du système plan ϖ', et, à la droite impropre i' du système plan ϖ', correspond une droite i du système plan ϖ. Les droites i, j' sont les droites limites des deux systèmes plans. Si les droites i, j coïncident, il en est de même des droites i' et j' ; il y a donc deux cas à distinguer selon que les droites limites sont à l'infini ou à distance finie.

29. **Premier cas : Les droites limites sont à l'infini.** 1° Dans ce cas, la collinéation prend le nom d'affinité et les deux systèmes plans sont dits alliés ou affins. Les droites impropres étant homologues, 1) A tout faisceau de droites parallèles de l'un des systèmes plans correspond un faisceau de droites parallèles de l'autre ; 2) un parallélogramme correspond à un parallélogramme ; 3) les ponctuelles homologues sont semblables et leur rapport de similitude ne change pas si on les remplace par d'autres qui leur sont parallèles ; 4) toute affinité entre deux systèmes plans est déterminée par deux triangles homologues dont les sommets sont des points propres — en effet, on connait ainsi quatre couples de droites homologues pouvant servir d'éléments fondamentaux à des coordonnées ternaires, les cotés des deux triangles et les droites impropres des deux systèmes plans ; 5) en rapportant les deux systèmes plans à des coordonnées cartésiennes dont les axes sont des droites homologues, les équations de l'affinité sont

$$(1) \qquad x' = k\,x, \qquad y' = k'y,$$

où k et k' sont des constantes

2° **Corollaire**. 1. *Le rapport de deux aires homologues quelconques dans deux systèmes plans alliés a une valeur constante.*

En effet, si S et S' sont deux aires homologues dans l'affinité (1) et θ, θ' les angles des axes coordonnés,

$$(2) \qquad S' = \sin\theta' \iint_{S'} dx'dy' = \frac{k k' \sin\theta'}{\sin\theta} . \sin\theta \iint_S dx dy = \frac{k k' \sin\theta'}{\sin\theta} . S,$$

d'où

$$(3) \qquad S : S' = \frac{\sin\theta}{k k' \sin\theta'} = C^{te}.$$

3° **Remarque**. On aurait pu établir cette propriété en considérant d'abord des parallélogrammes compris entre deux couples de droites homologues a et b, a' et b'. Soient P_1, P_2 deux parallélogrammes compris entre les droites a, b ; P'_1, P'_2 les parallélogrammes homologues compris entre les droites a', b' ; B_1, B_2, B'_1, B'_2 les bases de ces parallélogrammes sur les droites a et a'. On a

$$(4) \qquad P_1 : P_2 = B_1 : B_2, \qquad P'_1 : P'_2 = B'_1 : B'_2 .$$

Mais les droites a, a' étant les supports de ponctuelles semblables,

$$(5) \qquad B_1 : B_2 = B'_1 : B'_2$$

et ainsi

$$P_1 : P_2 = P'_1 : P'_2 .$$

La propriété est donc vraie pour les parallélogrammes considérés. Or, quand deux parallélogrammes sont situés d'une manière quelconque dans le même plan, on peut toujours en construire un troisième en prolongeant deux cotés opposés de chacun d'eux. Soient P_1, P_2, P_3 deux parallélogrammes quelconques dans le plan ϖ et celui qu'on en déduit par le procédé qu'on vient d'indiquer; P_1', P_2', P_3' les parallélogrammes homologues dans le plan ϖ'. En vertu de la première partie de la démonstration, on a

(7) $$P_1 : P_3 = P'_1 : P'_3 \qquad \text{et} \qquad P_3 : P_2 = P'_3 : P'_2 ;$$

on en tire

(8) $$P_1 : P_2 = P'_1 : P'_2$$

et ainsi la propriété étant applicable à des parallélogrammes quelconques, elle l'est aussi à des triangles quelconques, puis à des polygones quelconques et enfin à des figures quelconques.

4° *Corollaire 2. Quand les triangles à l'aide desquels on établit une affinité entre deux systèmes plans sont égaux, équivalents ou semblables, deux polygones quelconques sont égaux, équivalents ou semblables; l'égalité, l'équivalence et la similitude des figures planes sont donc des affinités particulières.*

30. **Second cas: Les droites limites sont à distance finie.** 1° Quand les droites limites i, j' des systèmes plans colliniaires ϖ, ϖ' sont des droites propres, 1) des droites homologues sont les supports de ponctuelles projectives dont les points limites sont les points où elles coupent les droites limites; 2) à toute droite parallèle à la droite limite dans un système plan, correspond une droite parallèle à la droite limite dans l'autre système plan et il n'y a que de pareilles droites qui puissent être les supports de ponctuelles semblables; 3) à tout faisceau de droites parallèles dans l'un des systèmes plans, correspond un faisceau projectif ayant son support sur la droite limite de l'autre système plan; 4) si les droites du premier faisceau sont parallèles à la droite limite du premier système plan, celles du second faisceau sont parallèles à la droite limite du second système plan.

2° Soient A, B deux points différents du point $C \equiv ij$ mais situés respectivement sur les droites i, j dans le système plan ϖ. Les points homologues dans le système plan ϖ' sont des points A', B' différents du point $C' \equiv i'j'$ et situés respectivement sur les droites i', j'. Les points C, C' sont des points homologues; les droites A B, A' B' sont des droites homologues, supports de ponctuelles projectives ayant les points A, B' pour points limites. – Soient X_1, X_2 et X_3, X'_1, X'_2 et X'_3 les coordonnées ternaires de deux points homologues quelconques X, X' lorsque A, B et C, A', B' et C' sont les premiers points fondamentaux. Les équations de la collinéation sont

(1) $$X'_1 = a_1 X_1, \qquad X'_2 = a_2 X_2, \qquad X'_3 = a_3 X_3,$$

les lettres a_1, a_2, a_3 ayant des valeurs constantes toutes différentes de zéro. – Mais si x et y, x' et y' sont les coordonnées cartésiennes des points X et X' par rapport à des axes coordonnés placés sur les droites A, B et i, B' A' et j', on doit faire

(2) $$x = \frac{X_2}{X_1}, \qquad y = \frac{X_3}{X_1}, \qquad x' = \frac{X'_1}{X'_2}, \qquad y' = \frac{X'_3}{X'_2}$$

et les équations (1) deviennent

(3) $$x' = \frac{a_1}{a_2 x}, \qquad y' = \frac{a_3 y}{a_2 x}.$$

3° Supposons que la collinéation soit une collinéation réelle établie entre deux systèmes plans réels et que les points B, A' soient les supports des faisceaux des droites perpendiculaires aux droites i, j' dans les plans ϖ, ϖ'. Les droites AB, A'B' sont donc perpendiculaires aux droites i et j'; elles sont les droites principales et les points A, B' sont les points principaux des systèmes plans ϖ, ϖ'. — En faisant

(4) $$y = y' \quad \text{ou} \quad y = -y'$$

dans les équations (3), on trouve que les droites homologues

(5) $$d \equiv x = \frac{a_3}{a_2} \text{ et } d' \equiv x' = \frac{a_1}{a_3}, \qquad d_1 \equiv x = -\frac{a_3}{a_2} \text{ et } d'_1 \equiv x' = -\frac{a_1}{a_3}$$

sont les supports de deux couples de ponctuelles égales. Ces droites s'appellent les directrices de la collinéation; elles coupent les droites AB, A'B' en des points homologues D et D', D_1 et D'_1. En posant

(6) $$AD = \frac{a_3}{a_2} = a \quad \text{et} \quad B'D' = \frac{a_1}{a_3} = a',$$

les équations de la collinéation deviennent (équations canoniques de Chasles)

(7) $$xx' = aa', \qquad xy' = ay.$$

On a aussi $x'y = a'y'$ et la première des équations précédentes aurait pu être écrite en égalant deux expressions de la puissance des ponctuelles projectives ayant les droites AB, A'B' pour supports.
En portant sur les droites AB, A'B' les segments

(8) $$AF = B'D' = a', \qquad AF_1 = B'D'_1 = -a', \qquad B'F' = AD = a, \qquad B'F'_1 = AD_1 = -a,$$

on a

(9) $$AF.B'F' = aa' \quad \text{et} \quad AF_1.B'F'_1 = aa';$$

F et F', F_1 et F'_1 sont deux couples de points homologues des ponctuelles AB, A'B' et, par suite, des systèmes plans ϖ, ϖ'; on les appelle les foyers de la collinéation.
Deux droites homologues quelconques u, u' menées par les points F, F' coupent les droites d et d', d_1 et d'_1 en des points homologues E et E', E_1 et E'_1. Les distances DE et D'E', D_1E_1 et $D'_1E'_1$ sont respectivement égales et les triangles rectangles DEF et D'E'F', $D_1E_1F_1$ et $D'_1E'_1F'_1$ sont respectivement égaux. Dès lors, les faisceaux homologues dont les points F et F' sont les supports, sont égaux, et il en est de même de ceux ayant les points F_1, F'_1 pour supports.
Si P et P' sont deux points homologues quelconques, les triangles PFF_1, $P'F'F'_1$ ont deux angles égaux et deux angles supplémentaires; on a donc

(10) $$|FP : F_1P| = |F'P' : F'_1P'|$$

et si ces rapports conservent la même valeur, les points P, P' décrivent des circonférences qui se correspondent dans la collinéation établie entre les systèmes plans ϖ, ϖ'.
Soient γ et γ_1 deux courbes passant par P dans le plan ϖ et tangentes en ce point à la droite t; M, M_1 les points voisins du point P où les deux courbes sont coupées par une droite t_1 issue du point P et faisant un angle infiniment petit avec la droite t; ds, ds_1 les arcs PM, PM_1 des courbes γ, γ_1; α l'angle que la droite t fait avec l'axe x; γ', γ'_1, t', M', M'_1, t'_1, ds', ds'_1, α' les éléments homologues dans le système pl in ϖ'; R et R_1, R' et R'_1 les rayons de courbure des courbes γ et γ_1, γ' et γ'_1 aux points P, P'; x et x', $x + dx$ et $x' + dx'$, $x + dx_1$ et $x' + dx'_1$ les abscisses des points P et P', M et M', M_1 et M'_1. On a

(11) $$dx = ds\cos\alpha, \qquad dx_1 = ds_1\cos\alpha, \qquad dx' = ds'\cos\alpha', \qquad dx'_1 = ds'_1\cos\alpha',$$

d'où

(12) $$R : R_1 = ds : ds_1 = dx : dx_1 \quad \text{et} \quad R' : R'_1 = ds' : ds'_1 = dx' : dx'_1 ;$$

d'autre part, la première des équations (7) donne

(13) $$x' = \frac{aa'}{x}, \qquad dx' = -\frac{aa'}{x^2}\,dx, \qquad dx'_1 = -\frac{aa'}{x^2}\,dx_1 ;$$

on a donc

(14) $$R : R_1 = R' : R'_1$$

et ainsi, une collinéation entre deux systèmes plans n'altère pas le rapport des rayons de courbure au point de contact de deux courbes tangentes.

§ III: Plans limites d'espaces collinéaires.

31. **Définition.** Quand deux espaces $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ sont collinéaires, il éxiste une correspondance biunivoque entre les plans du premier et ceux du second. Au plan ϖ rejeté à l'infini dans l'espace $\mathcal{E}$, correspond un plan ϖ' de l'espace $\mathcal{E}'$, et, au plan ω' rejeté à l'infini dans l'espace $\mathcal{E}'$, correspond un plan ω de l'espace $\mathcal{E}$. Les plans ω et ϖ' sont les plans limites des espaces $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$. Si les plans ω et ϖ coïncident, il en est de même des plans ω' et ϖ'; il y a donc deux cas à distinguer selon que les plans limites sont à l'infini ou à distance finie.

32 **Premier cas: Les plans limites sont à l'infini.** 1° Dans ce cas, la collinéation prend le nom d'affinité et les espaces $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ sont dits alliés ou affins. Les plans à l'infini étant homologues, 1) à toute gerbe et à tout faisceau de droites parallèles dans l'un des espaces, correspondent une gerbe et un faisceau de droites parallèles dans l'autre; 2) à toute feuillée de plans parallèles, correspond une feuillée de plans parallèles; 3) à tout parallélépipède, et à tout parallélogramme correspondent un parallélépipède et un parallélogramme; 4) les ponctuelles homologues sont semblables et les systèmes plans homologues sont alliés; 5) toute affinité entre deux espaces est déterminée par deux tétraèdres homologues ayant leurs sommets à distance finie; 6) En rapportant les deux espaces à des coordonnées cartésiennes dont les axes sont placés sur des droites homologues, les équations de l'affinité sont

(1) $$x' = k_1 x, \qquad y' = k_2 y, \qquad z' = k_3 z ;$$

les lettres k_1, k_2, k_3 ayant des valeurs constantes.

2° **Corollaire. 1.** Le rapport de deux volumes homologues quelconques dans deux espaces alliés est constant.

En effet, si V et V' sont deux volumes homologues

(2) $$V' = \sin x'y'z' \iiint_{V'} dx'dy'dz' = k_1k_2k_3 \sin x'y'z' \iiint_V dx\,dy\,dz = \frac{k_1k_2k_3 \sin x'y'z'}{\sin xyz} . V$$

et

(3) $$V : V' = C^{te}.$$

3° **Remarque.** On peut établir cette propriété de proche en proche, en considérant d'abord les parallélépipèdes compris entre des couples de plans parallèles α et β, α' et β'; puis des parallélépipèdes quelconques, des tétraèdres quelconques, des polyèdres quelconques et enfin des volumes limités par des surfaces homologues quelconques.

4° **Corollaire. 2.** Quand les tétraèdres à l'aide desquels on établit une affinité entre deux espaces sont égaux, équivalents, ou semblables, deux polyèdres homologues quelconques sont

égaux, équivalents ou semblables; l'égalité, l'équivalence et la similitude des polyèdres sont donc des affinités particulières.

33. Second cas: les plans limites sont à distance finie. 1° Lorsque les plans limites ω, ϖ' des espaces collinéaires $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ sont des plans propres, 1) des droites homologues sont les supports de ponctuelles projectives dont les points limites sont les points où ces droites coupent les plans limites; 2) à toute droite parallèle au plan limite dans l'un des espaces, correspond une droite parallèle au plan limite dans l'autre et de pareilles droites homologues sont les seules qui soient les supports de ponctuelles semblables; 3) des plans homologues sont les supports de systèmes plans homologues dont les droites limites sont les droites suivant lesquelles ces plans coupent les plans limites; 4) à tout plan parallèle au plan limite dans l'un des espaces, correspond un plan parallèle au plan limite dans l'autre et de pareils plans homologues sont les seuls qui soient les supports de systèmes plans alliés; 5) à tout faisceau et à toute gerbe de droites parallèles dans l'un des espaces, correspondent un faisceau et une gerbe ayant leurs supports dans le plan limite de l'autre espace; 6) si les droites du faisceau et de la gerbe dans le premier espace sont parallèles au plan limite, il en est de même dans l'autre espace.

2° Soient A, B deux points situés respectivement dans les plans ω, ϖ de l'espace $\mathcal{E}$. Les points homologues A', B' de l'espace $\mathcal{E}'$ sont situés respectivement dans les plans ω', ϖ'. Les droites AB, $A'B'$ sont les supports de deux ponctuelles projectives ayant les points A, B' pour points limites; elles sont aussi les supports de deux feuillées projectives. Soient α et α', β et β' deux couples de feuillets homologues de ces feuillées; C et C', D et D' les points homologues où ces plans coupent les droites homologues $\omega\varpi$, $\omega'\varpi'$; X_1, X_2, X_3, X_4 et X'_1, X'_2, X'_3, X'_4 les coordonnées quaternaires de deux points homologues quelconques X, X' des espaces $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ lorsque A, B, C et D, A', B', C' et D' sont les premiers points fondamentaux. Les équations de la collinéation sont

$$(1) \qquad X'_1 = a_1 X_1, \qquad X'_2 = a_2 X_2, \qquad X'_3 = a_3 X_3, \qquad X'_4 = a_4 X_4,$$

les lettres a_1, a_2, a_3, a_4 désignant des constantes différentes de zéro.

Mais si x, y, z et x', y', z' sont les coordonnées cartésiennes des points X et X' par rapport à des axes coordonnés mis sur les arêtes des trièdres $ABCD$, $A'B'C'D'$ on doit faire

$$(2) \qquad x = \frac{X_2}{X_1}, \quad y = \frac{X_3}{X_1}, \quad z = \frac{X_4}{X_1} \quad \text{et} \quad x' = \frac{X'_1}{X'_2}, \quad y' = \frac{X'_3}{X'_2}, \quad z' = \frac{X'_4}{X'_2};$$

les équations (1) donnent

$$(3) \qquad x' = \frac{a_1}{a_2 x}, \qquad y' = \frac{a_3 y}{a_2 x}, \qquad z' = \frac{a_4 z}{a_2 x}$$

ou

$$(4) \qquad xx' = k, \qquad xy' = k_1 y, \qquad xz' = k_2 z$$

en posant

$$(5) \qquad k = \frac{a_1}{a_2}, \qquad k_1 = \frac{a_3}{a_2}, \qquad k_2 = \frac{a_4}{a_2}.$$

3° Remarques. 1) La collinéation entre les espaces $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ est déterminée dès qu'on s'est donné les trièdres $Axyz$, $B'x'y'z'$ et les équations (4).

2) Si les trièdres et les nombres k, k_1, k_2 sont réels, on a une collinéation réelle entre espaces réels. Les plans homologues

$$(6) \qquad \alpha \equiv x = a, \qquad \alpha' \equiv x' = \frac{k}{a}$$

sont les supports de systèmes plans alliés dont l'affinité a pour équations

$$y' = \frac{k_1}{a} y, \qquad z' = \frac{k_2}{a} z.$$

Pour que cette affinité se réduise à une égalité, il est nécessaire et suffisant que les angles yz, $y'z'$ soient égaux ainsi que les nombres $\frac{k_1}{a}$, $\frac{k_2}{a}$. Étant donnés deux espaces collinéaires ayant les plans limites à distance finie, il est en général impossible d'y trouver des systèmes plans homologues égaux.

Chapitre III : De la perspectivité dans les formes fondamentales

§ I : Formes fondamentales de première espèce —

Formes de noms différents. — 34. 1° **Définition.** Lorsque deux formes fondamentales de première espèce et de noms différents sont placées de telle façon que chacune d'elles soit une projection ou une section de l'autre, elles sont dites perspectives ou en perspectivité, et les éléments appartenant l'un à l'autre sont dits homologues ou correspondants.

2° **Théorème.** *Lorsque deux formes fondamentales de première espèce et de noms différents sont perspectives, elles sont projectives.*

En effet, il existe entre leurs éléments une correspondance biunivoque telle que le rapport anharmonique de quatre éléments quelconques de chacune d'elles est égal à celui des éléments homologues dans l'autre.

3° **Théorème.** *Si deux formes fondamentales de première espèce sont projectives et si trois éléments de l'une d'elles sont situés sur les éléments homologues de l'autre, ces deux formes sont perspectives.*

Pour fixer les idées, supposons la ponctuelle $u(A, B, C, X)$ projectives au faisceau $S(a, b, c, x)$ et les points A, B, C situés sur les droites a, b, c. Si X' est le point où la droite x coupe la droite u, le théorème précédent donne

$$u(A, B, C, X') \barwedge S(a, b, c, x).$$

Mais par hypothèse,

$$u(A, B, C, X) \barwedge S(a, b, c, x).$$

On a donc

$$u(A, B, C, X) \barwedge u(A, B, C, X')$$

le point X se confond donc avec le point X' et la ponctuelle u est une section du faisceau S.

Formes de même nom. 35. 1° **Définition.** Deux formes fondamentales de première espèce et de même nom sont dites perspectives ou en perspectivité quand elles sont perspectives à une même troisième d'un nom différent du leur.

2° **Théorème.** *Lorsque deux formes fondamentales de première espèce et de même nom sont perspectives, elles sont projectives.*

En effet ces deux formes sont toutes deux projectives à la forme à laquelle elles sont perspectives, elles sont donc projectives entre elles.

3° **Théorème.** *Deux formes fondamentales de première espèce, de même nom et projectives, sont perspectives dès que la condition de perspectivité est remplie par trois couples d'éléments homologues.*

Soient $S(a, b, c, x)$, $S'(a', b', c', x')$ deux faisceaux projectifs dont les rayons homologues a et a',

b et b', c et c' se coupent en trois points A, B, C d'une ponctuelle u. Il faut démontrer que la droite x' passe par le point X où la droite x coupe la droite u. – Ayant

$$S(a,b,c,x) \,\overline{\wedge}\, S'(a',b',c',x') \qquad \text{et} \qquad S(a,b,c,x) \,\overline{\wedge}\, u(A,B,C,X)$$

on en déduit

$$S'(a',b',c',x') \,\overline{\wedge}\, u(A,B,C,X)$$

et les droites a', b', c' passant par les points A, B, C le faisceau S' est perspectif à la ponctuelle u et la droite x' passe par le point X.

36. 1° Définition. Quand deux formes fondamentales de première espèce de même nom et de supports différents sont projectives et que leurs supports ont un élément commun qui est homologue à lui-même quelle que soit celle des deux formes dans laquelle on le considère, cet élément prend le nom d'élément double ou uni.

2° Corollaires. 1) *Lorsque les supports de deux formes fondamentales perspectives de première espèce et de même nom ont un élément commun, cet élément est un élément double.*

2) *Lorsque deux formes fondamentales projectives de première espèce et de même nom ont un élément double, elles sont perspectives.*

3° Cas particuliers du corollaire précédent. – 1) *Quand deux ponctuelles projectives de supports différents ont un point double, elles sont les sections d'un même faisceau dont le support s'appelle le centre de perspectivité des deux ponctuelles.*

2) *Quand deux faisceaux projectifs de supports différents sont dans le même plan et qu'ils ont un rayon double, ils projettent une même ponctuelle dont le support s'appelle l'axe de perspectivité des deux faisceaux.*

3) *Quand deux faisceaux projectifs de même support sont placés dans des plans différents et qu'ils ont un rayon double, ils sont les sections d'une même feuillée dont le support s'appelle l'axe de perspectivité des deux faisceaux.*

4) *Quand deux feuillées de supports différents ont un feuillet double, elles projettent le même faisceau dont le plan s'appelle le plan de perspectivité des deux feuillées.*

Réduction de toute projectivité entre formes fondamentales de première espèce à une suite de perspectivités entre pareilles formes. – 37. Théorème général. –

Etant données deux formes fondamentales projectives de première espèce, il est possible, sans les déplacer, d'intercaler entre elles d'autres formes fondamentales de première espèce de telle manière que les formes consécutives soient perspectives.

Si l'une des formes données est un faisceau ou une feuillée, en la coupant par une droite quelconque, on obtient une ponctuelle à laquelle elle est perspective. Si les formes données sont des ponctuelles de même support, en projetant l'une d'elles d'un point extérieur sur une droite différente du support commun, on obtient une ponctuelle et un faisceau perspectifs à la ponctuelle projetée. Le théorème ne doit donc être démontré que pour deux ponctuelles projectives de supports différents.

Soient A et A', B et B', C et C' les trois couples de points homologues déterminant la projectivité des ponctuelles u, u'. Dans le plan u'A, on mène une droite quelconque u" par le point A et on projette la ponctuelle u'(A', B', C') suivant la ponctuelle u"(A", B", C") d'un point quelconque S de la droite AA'. Les ponctuelles u(A, B, C), u"(A", B", C") sont projectives et elles ont un point double A ≡ A"; elles sont donc les sections d'un même faisceau dont le support est le point d'intersection S' des droites BB", CC". Dès lors, si on emploie le signe $\overline{\wedge}$ comme signe

de perspectivité, on a la suite des perspectivités

ponctuelle u $\overline{\pi}$ faisceau S' $\overline{\pi}$ ponctuelle u" $\overline{\pi}$ faisceau S $\overline{\pi}$ ponctuelle u';

le théorème est donc démontré.

N.B. – 1) On pourrait augmenter le nombre des formes intermédiaires; il suffirait, par exemple, de prendre arbitrairement des formes projectives aux deux formes données et de passer par ces formes auxiliaires en partant de l'une des formes données.

2) Si X est un point quelconque de la ponctuelle u, la droite S'X coupe la droite u" au point X" et la droite SX" coupe la droite u' au point X' qui est le point homologue du point X sur la ponctuelle.

38 **Cas particulier de deux ponctuelles u (A, B, C) π u' (A', B', C') dont les supports sont des droites propres distinctes placées dans le même plan.** 1° On peut supposer les points A, A' différents du point uu'. Les faisceaux S (A, B, C), S' (A', B', C') dont les supports sont deux points arbitraires S, S' de la droite AA' sont perspectifs et leur axe de perspectivité est la droite u" déterminée par les points B", C" où se coupent les droites homologues SB et S'B', SC et S'C'. Les droites qui joignent les points S, S' à un point quelconque X" de la droite u" déterminent sur les droites u, u' des points homologues X, X' des ponctuelles données.

2° Les ponctuelles données sont perspectives lorsque la droite u" passe par le point uu'.

3° Lorsque le point S coïncide avec le point A' et le point S' avec le point A, la droite u" devient le lieu des points de rencontre des droites A'B et AB', A'C et AC', A'X et AX' projetant les ponctuelles u, u, des points A', A.

Théorème. *Cette droite u" ne change pas quand on remplace les points A, A' par d'autres points homologues des ponctuelles u, u'.*

Deux cas sont à distinguer. 1) Si les ponctuelles u, u' sont perspectives et si le point P est leur centre de perspectivité; il résulte des propriétés harmoniques du quadrilatère complet que la droite u" est, par rapport aux droites u, u', la droite conjuguée harmonique de celle joignant le point uu' au point P. La droite u" reste donc la même quand on la construit à l'aide de points homologues différents des points A, A' sur les ponctuelles u, u'.

2) Si les ponctuelles u, u' ne sont pas perspectives, en mettant successivement le point X" sur les points uu", u'u", on constate que ces points sont les points homologues du point uu' considéré d'abord comme un point de la ponctuelle u', puis comme un point de la ponctuelle u.

Corollaire. *Si A et A', B et B' sont des points homologues quelconques des ponctuelles projectives u, u', le lieu du point de rencontre des droites AB', A'B est une droite u".*

Cas particulier (Théorème de Pascal). – *Si les sommets impairs d'un hexagone plan sont sur une même droite et les sommets pairs, sur une autre droite, les côtés 1 et 4, 2 et 5, 3 et 6 se coupent en trois points en ligne droite.*

4° Lorsque le point S est le point (AA', BB') et le point S' le point (AA', CC'), la droite u" devient la droite B'C. Si D, D' sont deux points homologues quelconques des ponctuelles u, u', les droites SD, S'D' se coupent en un point D" de la droite u" ou B'C. Donc, *si u et u' sont les supports de deux ponctuelles projectives situées dans le même plan, et si a, b, c, d, sont les droites déterminées par quatre couples de points homologues quelconques, les droites joignant les sommets opposés 1 et 4, 2 et 5, 3 et 6 de l'hexagone acudu'b sont concourantes.*

39. **Cas particulier de deux faisceaux S (a, b, c) π S' (a', b', c') placés dans le même plan et dont les supports ne coïncident pas.** 1° On peut supposer les droites a, a' différentes de la droite SS'. Les ponctuelles u (a, b, c), u' (a', b', c') dont les supports sont

deux droites quelconques menées par le point aa' dans le plan des deux faisceaux sont perspectives et leur centre de perspectivité est le point S'' où se coupent les droites b'', c'' qui joignent les points homologues ub et $u'b'$, uc et $u'c'$. Les points d'intersection des droites u, u' avec une droite quelconque x'' menée par le point S'' déterminent avec les points S, S' des rayons homologues x, x' des faisceaux donnés.

2° Les faisceaux donnés S, S' sont perspectifs lorsque le point S'' est sur la droite SS'.

3° Lorsque la droite u coïncide avec la droite a' et la droite u' avec la droite a, le point S'' devient le lieu des droites joignant les points $a'b$ et ab', $a'c$ et ac', $a'x$ et ax' qui sont les points d'intersection des rayons des faisceaux donnés S, S' par les droites a', a.

Théorème. *Le point S'' ne change pas quand on remplace les droites a, a' par d'autres droites homologues des faisceaux S, S'.*

Deux cas sont à distinguer. 1) Si les faisceaux S, S' sont perspectifs et si p est l'axe de perspectivité, le point S'' est le conjugué harmonique par rapport aux points S, S' du point d'intersection des droites SS', p.

2) Si les faisceaux S, S' ne sont pas perspectifs, les droites SS'', $S'S''$ sont les droites homologues de la droite SS' considérée successivement comme un rayon des faisceaux S', S.

Corollaire. *Si a et a', b et b' sont des droites homologues quelconques des faisceaux projectifs S, S', les points ab' et $a'b$ sont en ligne droite avec un point fixe S''.*

Cas particulier (Théorème de Brianchon). *Si les cotés impairs d'un hexagone plan passent par un même point et les cotés pairs, par un autre point, les sommets opposés 1 et 4, 2 et 5, 3 et 6 sont sur trois droites concourantes.*

4° Lorsque la droite u joint les points aa', bb' et la droite u' les points aa', cc', le point S'' coïncide avec le point $b'c$. Si d et d' sont deux rayons homologues quelconques des faisceaux S, S', les points ud, $u'd'$ sont sur une droite d'' passant par le point S'' ou $b'c$. Donc, si S et S' sont les supports de deux faisceaux projectifs placés dans le même plan et si A, B, C, D sont les points déterminés par quatre couples de rayons homologues quelconques, les cotés opposés 1 et 4, 2 et 5, 3 et 6 de l'hexagone $ABSDS'B$ se coupent en trois points en ligne droite.

5° Les propriétés des faisceaux S, S' considérés dans ce numéro et celles des ponctuelles u, u' considérées dans le numéro précédent sont des propriétés homologues dans deux systèmes plans réciproques.

40. Problème. *Rendre perspectives deux ponctuelles projectives réelles dont les supports sont des droites propres.*

Soient A et A', B et B', C et C' trois couples de points déterminant la projectivité de deux ponctuelles dont les supports sont les droites propres u, u'. On peut supposer les points A, A' à distance finie. Pour rendre les ponctuelles perspectives, il suffit de faire coïncider ces deux points sans que les droites u, u' soient confondues. Le centre de perspectivité des ponctuelles placées ainsi est le point $S \equiv (BB', CC')$. – Une droite quelconque x menée par le point S dans le plan des droites u, u' coupe celles-ci en des points homologues X, X' des deux ponctuelles. Donc, si le point X engendre la ponctuelle u en se déplaçant dans un sens déterminé, le point X' engendre également la ponctuelle u' en se déplaçant dans un sens déterminé. – Le point S est situé à distance finie ou à l'infini selon que les ponctuelles u, u' ne sont pas ou sont des ponctuelles semblables. – Lorsque le point S est à distance finie, les points limites I, J' des ponctuelles u, u' sont sur les parallèles aux droites u', u par le point S. Si la droite u' tourne autour du point $A \equiv A'$ dans le plan uu', le lieu du point S est la circonférence de centre I et de rayon $A'J'$.

N.B. 1) En considérant les triangles semblables SIX, $X'J'S$, on retrouve la propriété

de la puissance des deux ponctuelles considérées.
2) les perpendiculaires abaissées du point S sur les bissectrices des angles des droites u, u' coupent ces droites aux extrémités des segments homologues égaux comptés à partir des points A, A'.
41. Problème. Rendre perspectifs deux faisceaux projectifs réels placés dans des plans propres.
Soient a et a', b et b', c et c' trois couples de droites déterminant la projectivité de deux faisceaux S, S' dont les plans ϖ, ϖ' sont des plans propres. Deux cas sont à distinguer.
1° Les points S, S' sont des points impropres. On peut supposer les droites a, a' à distance finie. Pour rendre les faisceaux perspectifs, il suffit de faire coïncider ces deux droites sans que les plans ϖ, ϖ' soient confondus. Les deux faisceaux deviennent les sections d'une feuillée dont l'axe u est l'intersection des plans bb', cc'. Un plan quelconque ξ mené par la droite u coupe les plans ϖ, ϖ' suivant des rayons homologues x, x' des faisceaux S, S'. Donc, si la droite x engendre le faisceau S en se déplaçant dans un sens déterminé, la droite x' engendre également le faisceau S' en se déplaçant dans un sens déterminé. — Les propriétés des deux faisceaux diffèrent selon que la droite u est une droite impropre ou une droite propre, ou, selon que les ponctuelles obtenues en coupant les faisceaux par un plan perpendiculaire à la droite a ≡ a' sont ou non des ponctuelles semblables. Dans le premier cas, les faisceaux sont dits semblables. Dans le second cas, les droites qui passent par les points limites et par les points principaux des deux ponctuelles sont les droites limites et les droites principales des deux faisceaux.
2° Un au moins des points S, S' est un point propre. On peut supposer les droites a, a' à distance finie. On rend les faisceaux perspectifs en plaçant leurs plans l'un sur l'autre de manière que les droites a, a' coïncident sans que les points S, S' soient confondus. Les faisceaux projettent alors une même ponctuelle dont le support u est déterminé par les points bb', cc'. Les droites x, x' qui projettent un même point de la droite u des points S, S' sont des rayons homologues des deux faisceaux. Donc, si la droite x décrit le faisceau S en se déplaçant dans un sens déterminé, la droite x' décrit également le faisceau S' dans un sens déterminé.
Remarques. 1) Lorsque les points S, S' sont à distance finie et la droite u à l'infini, deux rayons homologues quelconques des deux faisceaux sont parallèles, les angles formés par les rayons du premier faisceau sont égaux à ceux des rayons homologues du second faisceau; les faisceaux sont dits égaux et la droite u reste à l'infini quelles que soient les positions données aux points S, S' sur la droite a ≡ a' et, en outre, quels que soient les rayons homologues mis l'un sur l'autre pour rendre les faisceaux perspectifs. Deux rayons perpendiculaires dans l'un des faisceaux ont toujours pour homologues des rayons perpendiculaires dans l'autre faisceau.
2) Lorsque les points S, S' et la droite u sont à distance finie, les droites d, d' parallèles à la droite u par les points S, S' sont des rayons homologues faisant des angles égaux avec le rayon double a ≡ a' et ils se confondent avec ce rayon double quand celui-ci est parallèle à la droite u. — Pour que d'autres rayons homologues e, e', se coupant en un point propre E de la droite u fassent des angles égaux avec le rayon double a ≡ a', il faut et il suffit que le triangle ESS' soit isoscèle ou que le point E appartienne à la médiatrice m du segment rectiligne SS'. Plusieurs hypothèses sont à envisager.
a. — Lorsque les droites m, u coïncident, les points S, S' sont symétriques par rapport à la

droite u, le triangle ESS' est isoscèle quelle que soit la position du point E sur la droite u, deux rayons homologues quelconques des faisceaux S, S' font des angles égaux avec la droite double a ≡ a' et les faisceaux sont égaux par symétrie par rapport à la droite u. Deux rayons perpendiculaires dans l'un des deux faisceaux ont toujours pour homologues deux rayons perpendiculaires dans l'autre faisceau.

b.– Quand la droite u est perpendiculaire à la droite S, S' en un point quelconque, le point E est rejeté à l'infini et les droites e, e' ne diffèrent pas des droites d, d'. Les faisceaux sont inégaux et les angles droits a S d, a' S' d' sont les seuls angles droits homologues.

c.– Quand la droite u n'est pas perpendiculaire à la droite S S', le point E est un point propre, les droites e, e' diffèrent des droites d, d', mais elles sont confondues avec le rayon double a ≡ a' lorsque la droite u passe par le milieu de la distance S S'. Les faisceaux S, S' sont inégaux et on ne peut encore y trouver que deux angles droits homologues f S g, f' S' g'; les cotés de ces angles joignent les points S, S' aux points F, G où la droite u est rencontrée par la circonférence de centre E et de rayon E S = E S'.

Corollaire. Deux faisceaux projectifs réels dont les supports sont des points propres n'ont que deux angles droits homologues, ou bien, ils en ont une infinité, tout angle droit du premier faisceau ayant pour homologue un angle droit dans le second faisceau.

42. Propriétés de deux feuillées projectives réelles. On déduit ces propriétés de celles des ponctuelles en coupant les feuillées par des droites propres réelles et on la déduit de celles des faisceaux en coupant les feuillées par des plans propres réels. Il en résulte déjà que si un plan engendre une des feuillées en se déplaçant dans un sens déterminé, le plan homologue engendre également l'autre feuillée en se déplaçant dans un sens déterminé.– Lorsque les supports des deux feuillées sont des droites impropres et que des droites propres coupent ces feuillées suivant des ponctuelles semblables, les feuillées sont dites semblables. Si les ponctuelles ne sont pas semblables, leurs points limites et leurs points principaux définissent les plans limites et les plans principaux des deux feuillées.– Lorsque les supports des deux feuillées sont des droites propres, il n'y a dans ces deux feuillées que deux angles droits homologues, ou bien, il y en a une infinité et alors les deux feuillées sont égales et tout angle droit de la première a pour homologue un angle droit de la seconde.

Corollaire.– Quand les supports d'une feuillée et d'un faisceau sont une droite propre et un point propre, et que les deux formes sont projectives, il n'y a dans ces formes que deux angles droits homologues, ou bien, il y en a une infinité et le faisceau est égal à la section droite de la feuillée.

43. Problème. Rendre perspectives deux formes fondamentales réelles de première espèce, projectives mais de noms différents.

1° Cas d'une ponctuelle dont le support est une droite propre et d'un faisceau dont le support est un point impropre. Le problème n'est possible que si la ponctuelle est semblable aux sections du faisceau par des droites propres. Il faut en outre que la distance de deux points propres de la ponctuelle soit au moins égale à celle des droites homologues du faisceau.

2° Cas d'une ponctuelle dont le support est une droite propre et d'une feuillée dont le support est une droite impropre.

3° Cas d'un faisceau et d'une feuillée dont les supports sont un point et une droite impropres.

Cas d'une ponctuelle dont le support est une droite propre et d'un faisceau dont le support est un point propre. On détermine le rayon a du faisceau qui est l'homologue du point impropre A de la ponctuelle. Si b et c, B et C sont deux autres rayons quelconques du faisceau et les points homologues de la ponctuelle, la question revient à couper les droites b, c par une droite parallèle à la droite a pour que la distance des points d'intersection soit égale à celle des points B, C. Le problème admet deux solutions.

5° Cas d'une ponctuelle et d'une feuillée dont les supports sont des droites propres.

6° Cas d'un faisceau dont le support est un point impropre et d'une feuillée dont le support est une droite propre.

7° Cas d'un faisceau et d'une feuillée dont les supports sont un point propre S et une droite propre u. On construit une section droite de la feuillée par un plan perpendiculaire à la droite u en un point quelconque S'. Soient aSb, α u β les angles droits homologues dans le faisceau S et la feuillée u ; c, γ un rayon quelconque du faisceau et le plan homologue de la feuillée u ; a', b', c' les rayons du faisceau S' dans les plans α, β, γ. On place le faisceau S sur le faisceau S' pour que les angles droits aSb, a'S'b' coïncident. Si la droite c se confond avec la droite c', le problème est résolu. Si ces droites ne sont pas confondues et si la droite c est dans l'angle aigu c'S'b', il suffit de la faire tourner autour de la droite a' pour l'amener dans le plan γ.

§II : Formes fondamentales de seconde espèce.

Formes de noms différents. — 44. 1° Définition. Quand un système plan et une gerbe sont placés de telle façon que chaque point et chaque droite du système plan sont sur une seule droite ou dans un seul plan de la gerbe et que les éléments appartenant l'un à l'autre sont considérés comme homologues, les deux formes sont dites perspectives ou en perspectivité. On dit aussi que le système plan est une section de la gerbe et que celle-ci projette le système plan.

2° **Théorème.** *Un système plan et une gerbe perspectifs sont collinéaires.*

Soient X_1, X_2, X_3 et x_1, x_2, x_3 les coordonnées ternaires d'un point X et d'une droite x du système plan ; x'_1, x'_2, x'_3 et ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3 les coordonnées ternaires de la droite x' et du plan ξ' de la gerbe qui passent par le point X et la droite x. Si les éléments fondamentaux des coordonnées dans le système plan sont sur les éléments fondamentaux des coordonnées dans la gerbe, il résulte des propriétés des coordonnées ternaires qu'on a

$$X_1 : X_2 : X_3 = x'_1 : x'_2 : x'_3 \qquad \text{et} \qquad x_1 : x_2 : x_3 = \xi'_1 : \xi'_2 : \xi'_3 ;$$

le point X et la droite x sont donc les éléments homologues de la droite x et du plan ξ dans une collinéation entre le système plan et la gerbe.

3° **Théorème.** *Quand un système plan et une gerbe collinéaires sont placés de telle façon que quatre éléments du système plan appartiennent aux éléments homologues de la gerbe, si ces éléments peuvent servir d'éléments fondamentaux à des coordonnées ternaires, les deux formes sont perspectives.*

En rapportant les deux formes aux coordonnées ternaires définies dans l'énoncé du théorème, les équations de la collinéation se réduisent à

$$X_1 : X_2 : X_3 = x'_1 : x'_2 : x'_3 \qquad \text{et} \qquad x_1 : x_2 : x_3 = \xi'_1 : \xi'_2 : \xi'_3 .$$

D'où en vertu des propriétés des coordonnées ternaires, tout point X et toute droite x du système plan sont sur la droite homologue x' et dans le plan homologue ξ' de la gerbe. Les deux formes sont donc perspectives.

Formes de même nom mais de supports différents. _ 45. 1° Définitions.

1) Deux systèmes plans de supports différents sont dits perspectifs ou en perspectivité quand ils sont les sections d'une même gerbe; le support de celle-ci est le centre de perspectivité des deux systèmes plans.

2) Deux gerbes de supports différents sont dites perspectives ou en perspectivité quand elles projettent un même système plan; le support de celui-ci est le centre de perspectivité des deux gerbes.

2° Corollaires.

1) Deux systèmes plans perspectifs de supports différents sont collinéaires.

2) Deux systèmes plans collinéaires de supports différents sont perspectifs quand les conditions de perspectivité sont remplies par quatre couples d'éléments homologues pouvant servir d'éléments fondamentaux à des coordonnées ternaires.

3) Deux gerbes perspectives de supports différents sont collinéaires.

4) Deux gerbes collinéaires de supports différents sont perspectives quand les conditions de perspectivité sont remplies par quatre couples d'éléments homologues pouvant servir d'éléments fondamentaux à des coordonnées ternaires.

3° Définitions.

1) Quand deux systèmes plans collinéaires ont des supports différents et qu'un point commun est homologue à lui-même quelle que soit celle des deux formes dans laquelle on le considère, on dit que ce point est un point double ou un point uni.

2) Quand deux gerbes collinéaires ont des supports différents et qu'un plan commun est homologue à lui-même quelle que soit celle des deux formes dans laquelle on le considère, on dit que ce plan est un plan double ou un plan uni.

4° Théorèmes.

1) Pour que deux systèmes plans collinéaires de supports différents soient perspectifs, il faut et il suffit qu'ils aient une ponctuelle double.

2) Pour que deux gerbes collinéaires de supports différents soient perspectives, il faut et il suffit qu'elles aient une feuillée double.

Il suffit de démontrer le premier théorème. a._ Condition nécessaire. En effet, si les systèmes plans collinéaires ϖ, ϖ' sont les sections d'une même gerbe P, une droite quelconque menée par le point P coupe leurs supports en des points homologues; tous les points de la droite ϖ ϖ' sont donc des points doubles et cette droite est ainsi le support d'une ponctuelle double.

b._ Condition suffisante. Soient A et A', B et B' des points homologues quelconques des systèmes plans collinéaires ϖ, ϖ' dont les supports ne sont pas confondus; C le point où la droite AB coupe la droite ϖ ϖ'. Les systèmes plans ayant une ponctuelle double, le support de celle-ci est la droite ϖ ϖ' et le point C est un point double. La droite AB du système plan ϖ passant par le point C, la droite homologue A'B' du système plan ϖ' passe par le même point; les droites AA', BB' sont dans un même plan et elles se coupent. Les droites joignant les points du système plan ϖ aux points homologues du système plan ϖ' se coupent deux à deux et comme elles ne sont pas toutes dans un même plan, elles passent toutes par un même point; les systèmes plans sont les sections d'une même gerbe et ils sont perspectifs.

Formes de même nom et de même support. _ 46. 1° Définitions.

1) Deux systèmes plans collinéaires de même support sont dits perspectifs ou en perspectivité quand ils ont une ponctuelle double et un faisceau double. Les supports de la ponctuelle et du faisceau doubles sont l'axe et le centre de perspectivité des deux systèmes plans.
On obtient de pareils systèmes plans en coupant par un même plan deux gerbes perspectives de supports différents

2) Deux gerbes collinéaires de même support sont dites perspectives ou en perspectivité quand elles ont une feuillée double et un faisceau double. L'axe de la feuillée et le plan du faisceau doubles sont l'axe et le plan de perspectivité des deux gerbes.
On obtient de pareilles gerbes en projetant d'un même point deux systèmes plans perspectifs de supports différents.

2° Remarques. — 1) Deux systèmes plans perspectifs de même support s'appellent aussi des systèmes plans homologiques; la perspectivité prend alors le nom d'homologie, le centre et l'axe de perspectivité s'appellent le centre et l'axe d'homologie. — Si l'axe d'homologie ne passe pas par le centre d'homologie, et si S, A, A', A_1 sont le centre d'homologie, deux points homologues quelconques et le point où la droite SAA' coupe l'axe d'homologie, le rapport anharmonique (S, A_1, A, A') a une valeur constante appelée la constante d'homologie. On dit que l'homologie est harmonique lorsque la constante d'homologie est égale à -1. — Une symétrie dans un plan, par rapport à un point du plan est donc une homologie harmonique, de même qu'une symétrie par rapport à une droite du plan.
2) Deux systèmes plans collinéaires qui ont deux ponctuelles doubles ou deux faisceaux doubles sont identiques
3) Il est facile de construire directement deux systèmes plans collinéaires de même support qui ont un faisceau double. Il suffit d'établir la collinéation par quatre couples de points homologues A et A', B et B', C et C', D et D' pouvant servir de points fondamentaux à des coordonnées ternaires, tous dans un même plan et tels que les points A, A' étant confondus, les points B', C', D' soient sur les droites AB, AC, AD.
4) De même, on peut construire directement deux systèmes plans collinéaires de même support qui ont une ponctuelle double. Il suffit de transformer la construction précédente par une réciprocité entre deux systèmes plans.
5) Toutes ces propriétés des systèmes plans s'étendent aux gerbes par collinéation entre un système plan et une gerbe.

3° Théorèmes

1) Pour que deux systèmes plans collinéaires de même support soient perspectifs, il suffit qu'ils aient un faisceau double.

2) Pour que deux gerbes collinéaires de même support soient perspectives, il suffit qu'elles aient un faisceau double.

3) Pour que deux systèmes plans collinéaires de même support soient perspectifs, il suffit qu'ils aient une ponctuelle double.

4) Pour que deux gerbes collinéaires de même support soient perspectives, il suffit qu'elles aient une feuillée double.

Des projectivités convenables permettant de déduire les derniers théorèmes du premier, il suffit de démontrer celui-ci. — Soient ϖ, ϖ' deux systèmes plans collinéaires de même support ayant un faisceau double S; x une droite menée arbitrairement par le point S en dehors du plan $\varpi \equiv \varpi'$; P, P' deux points quelconques de la droite x. Les gerbes $P(\varpi)$, $P'(\varpi')$, de supports différents, sont collinéaires et elles ont une feuillée double de support $x \equiv PP'$; elles sont donc perspectives; il en est de même des systèmes plans ϖ, ϖ' dont la ponctuelle double a pour support l'intersection du plan $\varpi \equiv \varpi'$ avec le plan de perspectivité ω des gerbes P, P'.

4° Remarques. 1) Soient S, s, A, A' le centre de perspectivité, l'axe de perspectivité et deux points

homologues de deux systèmes plans perspectifs de même support. Si B est un point quelconque du premier système plan, le point homologue de ce point dans le second système plan ne peut être que le point B' où la droite SB rencontre la droite joignant le point A' au point d'intersection de la droite AB et de l'axe de perspectivité s. _ Cette construction fournit nécessairement des points homologues de systèmes plans perspectifs donnés. Mais je dis que si on se donne arbitrairement, dans un plan, le point S, la droite s et les points A, A', ceux-ci en ligne droite avec le point S, les points B, B' construits comme on vient de le faire, engendrent des systèmes plans perspectifs avec le point S pour centre et la droite s pour axe de perspectivité. En effet, soient B et B', C et C' deux couples de points construits et tels que les points S, A, B, C et S, A', B', C' puissent être pris pour points fondamentaux de coordonnées ternaires. En se servant de ces points pour établir une collinéation entre deux systèmes plans de même support, ces systèmes plans ont un faisceau double de support S; ils sont donc perspectifs et le point S est le centre de perspectivité. En outre, la droite s est l'axe de perspectivité, puisqu'elle contient deux points doubles différents du point S : les points d'intersection des droites AB et A'B', AC et A'C'. Enfin, à cause de la première partie de la remarque, ces systèmes plans perspectifs sont bien ceux qu'engendrent les points B, B'; ils répondent donc à la question.

Corollaire. *Quand les sommets de deux triangles situés dans le même plan sont sur trois droites concourantes, les cotés se coupent en trois points en ligne droite, et réciproquement*

2) La remarque précédente s'étend aux gerbes perspectives de même support par une collinéation entre un système plan et une gerbe.

Réduction de toute collinéation entre formes fondamentales de seconde espèce à une suite de perspectivités.

47. **Théorème général.** *Toute collinéation entre formes fondamentales de seconde espèce peut être établie par une suite de perspectivités.*

Si l'une des deux formes est une gerbe, en la coupant par un point quelconque, on obtient un système plan perspectif à la gerbe, et, si les deux formes sont des systèmes plans de même support, en projetant l'un d'eux par une gerbe quelconque sur un plan différent du support commun, on a une gerbe et un système plan perspectifs au système plan projeté. Le théorème ne doit donc être démontré que pour des systèmes plans collinéaires ϖ, ϖ' non perspectifs placés sur des supports différents. _ Soient A et A', B et B', C et C', D et D' quatre couples de points homologues pouvant déterminer la collinéation établie entre les systèmes plans ϖ, ϖ'; E, E' les points (AB, CD), (A'B', C'D')

Les points E, E' sont des points homologues des systèmes plans ϖ, ϖ' et aussi des ponctuelles projectives déterminées dans ces systèmes plans sur les droites $u \equiv AB$, $u' \equiv A'B'$. On sait (n° 37) que la projectivité

$$u(A,B,E) \barwedge u'(A',B',E')$$

peut être remplacée par une suite de perspectivités faites à l'aide de deux faisceaux. Soient S, S' les supports de ces faisceaux. De S' comme centre, on peut construire un système plan ϖ'' perspectif au système plan ϖ, et, de S comme centre, on peut construire un système plan ϖ''' perspectif au système plan ϖ''. Les systèmes plans ϖ''', ϖ' seront collinéaires et auront une ponctuelle double $u'(A',B',E')$; ils seront donc perspectifs et si S'' est leur centre de perspectivité, on aura la suite de perspectivités

$$\text{syst. pl. } \varpi \,\overline{\wedge}\, \text{gerbe } S' \,\overline{\wedge}\, \text{syst. pl. } \varpi'' \,\overline{\wedge}\, \text{gerbe } S \,\overline{\wedge}\, \text{syst. pl. } \varpi''' \,\overline{\wedge}\, \text{gerbe } S'' \,\overline{\wedge}\, \text{syst. pl. } \varpi'.$$

48. **Problème.** *Deux systèmes plans collinéaires réels situés sur des plans propres peuvent-ils être placés sur un même support de manière à être perspectifs ?*

Deux systèmes plans collinéaires de même support sont perspectifs s'ils ont un faisceau double ou une ponctuelle double. Il s'agit donc de rechercher si deux systèmes plans collinéaires réels dont les supports sont des plans propres ont des ponctuelles homologues égales ou des faisceaux homologues égaux. On distingue deux cas

1° **Premier cas : La collinéation donnée est une affinité.** 1) Quand l'affinité se réduit à une relation d'égalité entre les deux systèmes plans donnés, ces systèmes plans deviennent perspectifs dès qu'on fait coïncider deux faisceaux homologues quelconques ou deux ponctuelles homologues quelconques. La perspectivité obtenue est une symétrie par rapport à un point, une symétrie par rapport à une droite, ou une translation. Dans le premier cas, l'axe de perspectivité est à l'infini ; dans le second cas, le centre de perspectivité est à l'infini ; dans le troisième cas, le centre et l'axe de perspectivité sont à l'infini. — 2) Quand l'affinité ne se réduit pas à une relation d'égalité, il peut cependant se faire que deux faisceaux homologues, ayant pour supports des points O, O' à distance finie, soient égaux. Dans ce cas, deux faisceaux homologues quelconques sont égaux, deux angles homologues quelconques sont égaux et les figures homologues sont semblables. En faisant coïncider deux faisceaux homologues quelconques, les systèmes plans deviennent perspectifs, la perspectivité se réduit à une homothétie dont le centre est le centre de perspectivité ; l'axe de perspectivité est à l'infini. Des ponctuelles homologues quelconques dont les supports sont à distance finie sont semblables et leur rapport de similitude est constant ; de pareilles ponctuelles sont donc inégales et il n'y a pas d'autre moyen de rendre les systèmes plans perspectifs qu'en superposant deux faisceaux homologues. — 3) Lorsque les faisceaux homologues sont inégaux, la question se réduit à rechercher s'il y a des ponctuelles homologues égales. Mais des ponctuelles homologues sont semblables et le rapport de similitude reste le même si on les remplace par d'autres qui leur sont parallèles. Dès lors, ayant pris arbitrairement les points homologues O, O', il suffit de rechercher s'il y a d'autres points homologues A, A' tels que les distances OA, O'A' soient égales ; si de pareils points existent, les droites OA, O'A' sont les supports de ponctuelles égales et les systèmes plans deviennent perspectifs si on fait coïncider ces ponctuelles. Les points O, O' sont les supports de faisceaux projectifs déterminés par des droites homologues des deux systèmes plans ; ces faisceaux n'étant pas égaux, on ne peut y trouver que deux angles droits homologues xOy, $x'O'y'$. En prenant les côtés de ces angles pour axes coordonnés, les équations de l'affinité se présentent sous la forme

$$x' = kx, \qquad y' = k'y,$$

et les systèmes plans n'étant ni égaux, ni semblables, les coefficients k, k' ont des valeurs différentes. En appliquant ces équations aux points A, A', on a

$$OA^2 = x^2 + y^2, \qquad O'A'^2 = k^2x^2 + k'^2y^2$$

et on aura $OA = O'A'$, si

$$x^2 + y^2 = k^2x^2 + k'^2y^2 \quad \text{ou} \quad x^2(1-k^2) = y^2(k'^2-1)$$

on tire de là deux valeurs égales et de signes contraires de $\frac{y}{x}$ qui sont les coefficients angulaires des droites OA répondant à la question pour le point O ; mais ces droites ne sont pas toujours réelles et elles se confondent en une seule lorsque l'un des coefficients k, k' vaut l'unité. Chacune d'elles donne deux solutions du problème proposé.

2° **Second cas : La collinéation n'est pas une affinité.** Dans ce cas les systèmes plans possèdent deux couples de ponctuelles homologues égales et deux couples de faisceaux homologues

égaux (30, 3°) ayant pour supports les directrices f et f', f_1 et f_1', et les foyers F et F', F_1 et F_1' des deux systèmes plans ϖ, ϖ'. Si on fait coïncider les ponctuelles f, f', le faisceau F coïncidera avec le faisceau F', ou bien, le faisceau F_1 coïncidera avec le faisceau F_1'; il en sera de même, si on fait coïncider les ponctuelles f_1 et f_1'; le problème admet donc quatre solutions.

§ III : Formes fondamentales de troisième espèce.

49. 1° **Définition.** Deux espaces collinéaires à trois dimensions sont dits perspectifs ou en perspectivité s'ils ont une gerbe double et un système plan double. Le support de la gerbe double et celui du plan double sont le centre et le plan de perspectivité des deux espaces. Les droites et les plans passant par le centre de perspectivité sont des droites et des plans doubles; les droites et les points du plan de perspectivité sont des droites et des points doubles. Deux points homologues quelconques sont en ligne droite avec le centre de perspectivité; deux droites homologues quelconques sont dans un plan passant par le centre de perspectivité et se coupent dans le plan de perspectivité. Deux plans homologues quelconques se coupent suivant une droite du plan de perspectivité.

2° **Remarques.** – 1) Deux espaces perspectifs s'appellent aussi des espaces homologiques; le centre et le plan de perspectivité s'appellent alors le centre et le plan d'homologie, et la perspectivité prend le nom d'homologie. – Si le plan d'homologie ne contient pas le centre d'homologie et si S, A, A', A_1 sont le centre d'homologie, deux points homologues quelconques et le point où la droite SAA' coupe le plan d'homologie, le rapport anharmonique (S, A_1, A, A') a une valeur constante appelée la constante d'homologie. L'homologie est dite harmonique lorsque la constante d'homologie est égale à -1.

2) Deux espaces collinéaires qui ont deux gerbes doubles ou deux systèmes plans doubles sont identiques.

3) Il est facile de construire deux espaces collinéaires qui ont une gerbe double. Soient A, B, C, D, E cinq points arbitraires pouvant servir de points fondamentaux à des coordonnées quaternaires dans un premier espace $\mathcal{E}$; A' un point confondu avec le point A; B', C', D', E' des points pris sur les droites AB, AC, AD, AE et pouvant, avec le point A', servir de points fondamentaux à un second système de coordonnées quaternaires que l'on considère comme situé dans un second espace $\mathcal{E}'$. Une collinéation entre les espaces $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ est déterminée par les cinq couples de points correspondants A et A', B et B', C et C', D et D', E et E'. Dans cette collinéation, les gerbes $A(B, C, D, E)$, $A'(B', C', D', E')$ sont collinéaires et elles ont quatre droites doubles pouvant être prises comme droites fondamentales de coordonnées ternaires; elles sont donc confondues en une seule et forment une gerbe double des espaces $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$.

4) Par réciprocité, on construit deux espaces collinéaires ayant un système plan double.

50. 1° **Théorèmes**

1) Deux espaces collinéaires qui ont une gerbe double ont un système plan double et sont perspectifs

2) Deux espaces collinéaires qui ont un système plan double ont une gerbe double et sont perspectifs.

Le second théorème se déduit du premier par réciprocité entre deux espaces à trois dimensions; il suffit de démontrer le premier. Soient $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ deux espaces collinéaires ayant une gerbe double dont le support est le point S; ϖ et ϖ', ω et ω' des plans homologues ne passant pas par le point S. Une droite quelconque menée par le point S rencontre les plans ϖ et ϖ', ω et ω' en des points homologues; les droites $\varpi\varpi'$, $\omega\omega'$ sont les supports de ponctuelles doubles; le point où la droite $\varpi\varpi'$ coupe le plan ω est un point double et il est situé sur la droite $\omega\omega'$. Les espaces $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ ont donc une infinité de ponctuelles doubles placées sur des droites qui se coupent deux à deux; mais

toutes ces droites ne passent pas par un même point, toutes les ponctuelles sont donc dans un même plan et déterminent le système plan double des espaces $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$, ce qui démontre le théorème.

2° Remarque. Soient S, σ, A, A' le centre de perspectivité, le plan de perspectivité, et deux points homologues de deux espaces perspectifs $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$. Si B est un point quelconque du premier espace, le point homologue dans le second espace ne peut être que le point B' où la droite SB rencontre la droite joignant le point A' au point où la droite AB coupe le plan σ. – Cette construction fournit nécessairement des points homologues des espaces perspectifs donnés. Mais si on se donne arbitrairement le point S, le plan σ et les points A, A', ceux-ci en ligne droite avec le point S, les points B, B' construits comme on vient de le faire, engendrent des espaces perspectifs avec le point S et le plan σ pour centre et plan de perspectivité. En effet, soient B et B', C et C', D et D' des couples de points construits et tels que les points S, A, B, C, D et S, A', B', C', D' puissent servir de points fondamentaux de deux systèmes de coordonnées quaternaires. En se servant de ces points pour établir une collinéation entre deux espaces, ceux-ci ont une gerbe double de support S et sont donc perspectifs avec le point S comme centre de perspectivité. Le plan σ est le plan de perspectivité puisqu'il contient trois points doubles non en ligne droite et différents du point S : les points $(AB, A'B')$, $(AC, A'C')$, $(AD, A'D')$. Enfin, à cause de la première partie de la remarque, ces espaces perspectifs sont bien ceux qu'engendrent les points B, B'.

Corollaire. *Lorsque les sommets de deux tétraèdres sont sur quatre droites concourantes, les faces se coupent suivant quatre droites situées dans un même plan et formant un quadrilatère complet dont les sommets sont les points d'intersection des arêtes des deux tétraèdres, et réciproquement.*

Réduction de toute collinéation entre formes fondamentales de troisième espèce à une suite de perspectivités. – 51. Théorème. *Toute collinéation entre deux espaces peut être établie par une suite de perspectivités.*

Soient A et A', B et B', C et C', D et D', E et E' cinq couples de points homologues pouvant déterminer la collinéation des espaces $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$; F et F' les points homologues où les droites homologues AE, $A'E'$ coupent les plans homologues $\varpi \equiv BCD$, $\varpi' \equiv B'C'D'$. La collinéation des espaces $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ établit entre les systèmes plans ϖ, ϖ' une collinéation déterminée par les couples de points B et B', C et C', D et D', F et F', et pouvant être remplacée par la suite des perspectivités (47)

$$\text{syst. pl. } \varpi \;\overline{\wedge}\; \text{gerbe } S' \;\overline{\wedge}\; \text{syst. pl. } \varpi'' \;\overline{\wedge}\; \text{gerbe } S \;\overline{\wedge}\; \text{syst. pl. } \varpi''' \;\overline{\wedge}\; \text{gerbe } S'' \;\overline{\wedge}\; \text{syst. pl. } \varpi'.$$

A l'aide de la gerbe S' on peut construire un espace $\mathcal{E}''$ perspectif à l'espace $\mathcal{E}$; à l'aide de la gerbe S, on peut construire un espace $\mathcal{E}'''$ perspectif à l'espace $\mathcal{E}''$; et, à l'aide de la gerbe S'', on peut construire un espace $\mathcal{E}^{IV}$ perspectif à l'espace $\mathcal{E}'''$. Les espaces $\mathcal{E}^{IV}, \mathcal{E}'$ seront collinéaires et auront un système plan double $\varpi'(B', C', D', F')$; ils seront donc perspectifs et on aura la suite de perspectivités

$$\mathcal{E} \;\overline{\wedge}\; \mathcal{E}'' \;\overline{\wedge}\; \mathcal{E}''' \;\overline{\wedge}\; \mathcal{E}^{IV} \;\overline{\wedge}\; \mathcal{E}'.$$

52. Problème. *Deux espaces collinéaires réels peuvent-ils être mis en perspectivité ?*

1° Premier cas : La collinéation donnée est une affinité. 1) Le centre de perspectivité de deux espaces perspectifs est aussi celui de deux ponctuelles homologues quelconques. Quand les espaces sont alliés, les ponctuelles homologues sont semblables. Si le centre de perspectivité S est à distance finie, les supports des ponctuelles homologues sont parallèles et le plan de perspectivité est à l'infini; si A et A' sont deux points homologues quelconques, le rapport

SA : SA' a une valeur constante et les espaces sont homothétiques. Pour que les deux espaces puissent être mis en perspectivité de cette manière, il est nécessaire et suffisant qu'ils soient semblables. — 2) Lorsque le centre de perspectivité est à l'infini et que les supports des ponctuelles homologues sont parallèles, le plan de perspectivité est à l'infini et les ponctuelles homologues sont égales. Le cas du centre et du plan de perspectivité à l'infini n'est donc possible que pour des espaces égaux. — 3) Quand le centre de perspectivité est à l'infini et que les supports des ponctuelles homologues ne sont pas toujours parallèles le plan de perspectivité est à distance finie. A tout plan parallèle au plan de perspectivité dans l'un des deux espaces correspond un pareil plan dans l'autre espace; les systèmes plans homologues dont ces plans sont les supports sont égaux et si on les fait coïncider, les espaces restent perspectifs. D'autre part, s'il y a un plan de perspectivité à distance finie, des plans homologues se coupent dans ce plan suivant une ponctuelle double. Dès lors, pour rechercher si deux espaces alliés peuvent être rendus perspectifs pour que le plan de perspectivité soit à distance finie et le centre de perspectivité à l'infini, on peut supposer qu'on a placé ces deux espaces pour que les deux ponctuelles homologues égales coïncident en une ponctuelle double. Mais si on rapporte deux espaces E, E' à un trièdre trirectangle $Oxyz$ et à un trièdre $O'x'y'z'$ dont la face $x'O'y'$ seule soit un angle droit, il est possible d'établir entre ces espaces une infinité d'affinités par les équations

$$x' = x, \qquad y' = ky, \qquad z' = k'z,$$

dans lesquelles k est différent de l'unité. Dans toutes ces affinités, les ponctuelles homologues parallèles aux ponctuelles x, x' sont égales et il est impossible de construire dans les plans xy, $x'y'$ des ponctuelles homologues égales ayant une autre direction. Si les espaces pouvaient être mis en perspectivité en faisant coïncider les ponctuelles x, x' il y aurait dans les deux espaces des systèmes plans homologues égaux contenant ces ponctuelles. Or cela est impossible, attendu que la droite y' est la seule droite du plan $y'z'$ qui soit perpendiculaire à la droite x', alors que toutes les droites du plan yz sont perpendiculaires à la droite x, et les ponctuelles y, y' ne sont pas égales. Donc, en général, lorsque deux espaces alliés ne sont ni semblables ni égaux, on ne peut les rendre perspectifs.

Remarque. Soient

$$(1) \qquad x' = k_1 x, \qquad y' = k_2 y, \qquad z' = k_3 z$$

les équations d'une affinité entre deux espaces E, E' rapportés à des trièdres coordonnés quelconques. En exprimant que les distances des points homologues O, O' à d'autres points homologues $A(x, y, z)$, $A'(x', y', z')$ sont égales, on a l'équation de condition

$$(2) \qquad \psi(x, y, z) = \psi'(x', y', z');$$

les équations des lieux des droites OA, O'A' dans les deux espaces sont

$$(3) \qquad \psi(x, y, z) = \psi'(k_1 x, k_2 y, k_3 z) \qquad \text{et} \qquad \psi\left(\frac{x'}{k_1}, \frac{y'}{k_2}, \frac{z'}{k_3}\right) = \psi'(x', y', z'). \qquad (4)$$

a. — Ces dernières équations se réduisent à des identités, lorsque les trièdres $Oxyz$, $O'x'y'z'$ sont égaux et de même sens ou égaux et de sens contraires, et si, en outre, $k_1 = \pm 1$, $k_2 = \pm 1$, $k_3 = \pm 1$. Les espaces E, E' sont égaux et de même sens ou égaux et de sens contraires; deux systèmes plans homologues quelconques sont égaux et en les faisant coïncider, les espaces coïncident ou sont symétriques par rapport à un plan.

b. — Lorsque les équations (3) et (4) ne se réduisent pas à des identités, les cônes qu'elles représentent sont nécessairement du même genre puisqu'ils sont des figures homologues des espaces E, E'. Si ces cônes sont du premier genre, il est impossible d'en construire deux couples de génératrices rectilignes homologues réelles formant des angles égaux; en effet, s'il y avait de pareilles droites, on pourrait supposer

qu'elles coïncident avec les axes Ox, Oy, $O'x'$, $O'y'$; les équations (1) deviendraient

(5) $$x'=x, \qquad y'=y, \qquad z'=k_3 z;$$

les plans xy, $x'y'$ seraient les supports de systèmes plans homologues égaux et ils devraient faire partie des cônes (4) et (5) qui ne seraient pas du premier genre. Donc, lorsque les cônes (4) et (5) sont du premier genre, les espaces $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ ne peuvent être mis en perspectivité.

c.– Lorsque les cônes (4) et (5) sont des cones réels du second genre, on peut supposer qu'ils sont formés des plans xy et xz, $x'y'$ et $x'z'$; les équations de l'affinité deviennent

(6) $$x'=x, \qquad y'=y, \qquad z'=z.$$

En développant l'équation (3) on a

(7) $$yz(\cos yz-\cos y'z')+zx(\cos zx-\cos z'x')+xy(\cos xy-\cos x'y')=0$$

et pour que cette équation se réduise à $yz=0$, il faut qu'on ait

(8) $$\cos yz \neq \cos y'z', \qquad \cos zx=\cos z'x', \qquad \cos xy=\cos x'y';$$

si ces conditions sont remplies, les espaces $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ ont deux couples de systèmes plans homologues égaux et il y a deux manières de les mettre en perspectivité.

d.– Lorsque les cônes (3), (4) sont du troisième genre on peut supposer qu'ils se réduisent aux plans xy, $x'y'$ et que le trièdre $Oxyz$ est trirectangle. Les équations de l'affinité deviennent

(9) $$x'=x, \qquad y'=y, \qquad z=k_3 z.$$

En exprimant que l'équation (3) se réduit à $z^2=0$, on a les équations de condition

(10) $$k_3^2\neq 1, \qquad \cos y'z'=0, \qquad \cos z'x'=0, \qquad \cos x'y'=0;$$

le trièdre $O'x'y'z'$ est donc trirectangle, les systèmes plans homologues xy, $x'y'$ sont égaux et les espaces $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ peuvent être mis en perspectivité

2° Second cas: La collinéation n'est pas une affinité. Quand les espaces collinéaires $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ ne sont en affinité, leurs plans limites ω, ϖ' sont à distance finie. S'ils pouvaient être mis en perspectivite, les plans ω, ϖ' seraient parallèles au plan de perspectivité, celui-ci serait à distance finie et proviendrait de la superposition de deux systèmes plans homologues égaux. Mais, en général, deux espaces collinéaires qui ne sont pas alliés, n'ont pas de systèmes plans homologues égaux; donc, en général, deux espaces collinéaires non alliés ne peuvent être mis en perspectivité.

Chapitre IV: Formes fondamentales de première espèce projectives, de même nom et de même support.

§I: Projectivité quelconque.

53. Recherche des éléments doubles. Si

(1) $$a_{11}X_1X'_1+a_{12}X_1X'_2+a_{21}X_2X'_1+a_{22}X_2X'_2=0$$

est l'équation bilinéaire de projectivité des deux formes rapportées au même système de coordonnées, les éléments doubles sont déterminés par l'équation du second degré

(2) $$a_{11}X_1^2+(a_{12}+a_{21})X_1X_2+a_{22}X_2^2=0.$$

Cette équation se réduit à une identique lorsque

(3) $$a_{11}=a_{22}=0 \quad \text{et} \quad a_{12}=-a_{21};$$
dans ce cas, l'équation (1) est

(4) $$X_1X'_2-X_2X'_1=0 \quad \text{ou} \quad X_1:X_2=X'_1:X'_2$$

et la projectivité est la transformation identique.
Dans les autres cas, l'équation (2) n'a que deux solutions et il n'y a que deux éléments doubles qui sont distincts ou confondus selon que le réalisant de l'équation (2) n'est pas nul ou est nul. Si les formes considérées, les éléments fondamentaux des coordonnées binaires et les coefficients de l'équation (1) sont réels, les éléments doubles sont réels et distincts, réels et confondus, ou imaginaires, suivant que le réalisant de l'équation (2) est positif, nul, ou négatif.

54. 1° **Théorème**. *Quand deux formes fondamentales de première espèce, projectives et superposées, ont deux éléments doubles distincts E, F si A et A' sont deux éléments homologues quelconques, le rapport anharmonique (E,F,A,A') a une valeur constante.*

En effet, le rapport anharmonique de quatre éléments de la première forme devant être égal à celui des éléments homologues de la seconde forme, si E, F, A et A', B et B' sont les éléments doubles et deux couples d'éléments homologues, on a

$$(E,F,A,B)=(E,F,A',B').$$

En passant aux coordonnées binaires, cette égalité se transforme en

$$\frac{|EA|}{|AF|}:\frac{|EB|}{|BF|}=\frac{|EA'|}{|A'F|}:\frac{|EB'|}{|B'F|}$$

on a donc aussi

$$\frac{|EA|}{|AF|}:\frac{|EA'|}{|A'F|}=\frac{|EB|}{|BF|}:\frac{|EB'|}{|B'F|}$$

ou

$$(E,F,A,A')=(E,F,B,B');$$

le théorème est donc démontré.

2° **Remarque 1**. On aurait pu observer qu'il suffit de démontrer le théorème pour le cas de deux ponctuelles superposées, les autres cas se déduisant de celui-ci par des projections faites d'un point ou d'une droite. — Dès lors, soient x, x' deux ponctuelles superposées; E,F les points doubles; A et A' B et B' des points homologues; y une droite quelconque menée par le point E; S, S' deux points arbitraires de cette droite. Les faisceaux S (E,A,B,......), S'(E,A',B',......) sont perspectifs et leur axe de perspectivité x'' passe nécessairement par le point F. Cet axe est le support d'une ponctuelle x''(E'', A'', B'',......) perspective aux ponctuelles x (E,A,B,......), x'(E',A',B',......); on a donc, si P est le point d'intersection des droites x'', y,

$$(E,F,A,A')=A''(E,F,A,A')=(E,P,S,S'), \qquad (E,F,B,B')=B''(E,F,B,B')=(E,P,S,S')$$

et on en déduit

$$(E,F,A,A')=(E,F,B,B').$$

3° **Remarque 2**. On peut évaluer la valeur du rapport anharmonique (E,F,A,A') en fonction des coefficients de l'équation de projectivité

(1) $$a_{11}X_1X'_1+a_{12}X_1X'_2+a_{21}X_2X'_1+a_{22}X_2X'_2=0.$$

L'équation aux éléments doubles étant

(2) $$a_{11}X_1^2+(a_{12}+a_{21})X_1X_2+a_{22}X_2^2=0,$$

les coordonnées des éléments doubles sont telles que

(3) $$\frac{E_1}{E_2} \text{ ou } \frac{F_1}{F_2}=\frac{1}{2a_{11}}\left\{-(a_{12}+a_{21})\mp\sqrt{(a_{12}+a_{21})^2-4a_{11}a_{22}}\right\}.$$

D'autre part, la valeur cherchée étant la même quels que soient les éléments homologues A, A', on peut supposer les coordonnées de l'élément A égales à 1 et 0 ; celles de l'élément A' sont $-a_{12}$ et a_{11}. On a successivement

$$(E,F,A,A')=\frac{|EA|}{|AF|}:\frac{|EA'|}{|A'F|},\quad |EA|=-E_2,\ |AF|=F_2,\quad |EA'|=a_{11}E_1+a_{12}E_2,\ |A'F|=-a_{11}F_1-a_{12}F_2,$$

d'où

$$(E,F,A,A')=\frac{(a_{11}F_1+a_{12}F_2)E_2}{(a_{11}E_1+a_{12}E_2)F_2}=\frac{2a_{11}\frac{F_1}{F_2}+2a_{12}}{2a_{11}\frac{E_1}{E_2}+2a_{12}},$$

et, à cause de (3)

(4) $$(E,F,A,A')=\frac{K+\sqrt{D}}{K-\sqrt{D}},$$

si on pose

(5) $$K=a_{12}-a_{21} \qquad \text{et} \qquad D=(a_{12}+a_{21})^2-4a_{11}a_{22}.$$

55.– **Théorème** – *Réciproquement, si E, F sont deux éléments fixes d'un support de première espèce et X, X' deux éléments mobiles du même support, avec la condition que le rapport anharmonique (E, F, X, X') ait une valeur constante, les éléments X, X' engendrent des formes projectives dont les éléments E, F sont les éléments doubles.*

Soient A, A' des positions particulières des éléments X, X'. Les trois couples d'éléments E et E', F et F' A et A' définissent une projectivité dans lesquels les éléments E, F sont nécessairement les éléments doubles. Si X" est l'élément homologue de l'élément X dans cette projectivité, il résulte du théorème précédent qu'on a

$$(E,F,A,A')=(E,F,X,X'').$$

Mais par hypothèse,

$$(E,F,A,A')=(E,F,X,X').$$

Dès lors,

$$(E,F,X,X')=(E,F,X,X'')$$

et l'élément X" coïncide avec l'élément X', ce qui démontre le théorème.

56. **Théorème**. *Lorsque deux formes fondamentales φ, φ' de première espèce, projectives et de même support, ont les éléments doubles confondus en un seul E, si A' et A" sont dans la forme φ' les éléments homologues des éléments A et A' de la forme φ, les éléments E, A', A, A" forment un groupe harmonique.*

En prenant E, A', A comme éléments fondamentaux des coordonnées binaires dans les deux formes, les coordonnées des éléments E, A', A, A" sont 1 et 0, 0 et 1, 1 et 1, 1 et –1 ; d'où, (E, F, A, A') = –1.

Remarque.– Il suffit de démontrer le théorème pour deux ponctuelles superposées x, x', les autres cas se déduisant de celui-ci par des projections faites d'un point ou d'une droite.

Soit E le point avec lequel coïncident les deux points doubles de deux ponctuelles projectives superposées x, x'. Les faisceaux qui projettent celles-ci de deux points quelconques S, S' d'une droite menée arbitrairement par le point E sont perspectifs et leur axe de perspectivité x'' joint le point E au point X où se coupent les droites SA, SA', si A et A' sont des points homologues des deux ponctuelles. Si la droite SA' coupe la droite x'' au point Y, la droite S'Y passe par le point A'' qui est, sur la ponctuelle x', l'homologue du point A' de la ponctuelle x, et les points E, A', A, A'' forment un groupe harmonique parce que les points A, A'' sont les points d'intersection de la diagonale EA' d'un quadrilatère complet par les deux autres diagonales SX, S'Y.

57. **Sur les faisceaux projectifs engendrés par les cotés d'un angle constant qui tourne autour de son sommet propre et réel dans un plan propre et réel.** 1) Les cotés de l'angle engendrent des faisceaux égaux qui sont donc projectifs. D'ailleurs, en rapportant la figure à des coordonnées cartésiennes rectangulaires réelles ayant le sommet de l'angle pour origine et en désignant par ω et ω' les coefficients angulaires des côtés de l'angle, on a la relation

$$(1) \qquad \frac{\omega' - \omega}{1 + \omega\omega'} = k \quad \text{ou} \quad k\omega\omega' + \omega - \omega' + k = 0,$$

dans laquelle k est une constante égale à $\operatorname{tang}\theta$, si θ est la valeur de l'angle considéré. Cette relation est bilinéaire en ω et ω', les côtés de l'angle tracent des ponctuelles projectives sur la droite d'équation $x=1$ et engendrent donc des faisceaux projectifs. Les rayons doubles sont déterminés par l'équation

$$(2) \qquad \omega^2 + 1 = 0$$

qui est indépendante de k; ils ne dépendent donc pas de la grandeur de l'angle; leurs coefficients angulaires sont $-i$ et $+i$; ils coïncident avec les droites isotropes menées par le sommet de l'angle dans le plan de la figure. Donc, en vertu de théorèmes démontrés précédemment (54, 55), *lorsque deux faisceaux projectifs superposés ont pour support un point propre réel et sont placés dans un plan propre réel, pour que l'angle de deux rayons homologues soit constant, il faut et il suffit que ces rayons forment un rapport anharmonique constant avec les droites isotropes issues du support commun des deux faisceaux, ou, ce qui revient au même, que ces droites isotropes soient les rayons doubles des deux faisceaux.*

2) Laguerre (Nouvelles annales de Mathématiques, 1853) a exprimé la valeur de l'angle en fonction du rapport anharmonique que l'on vient de définir. Pour obtenir la formule de Laguerre, il suffit d'appliquer à l'équation (1) la formule (4) de la remarque 2 du n° 54, ce qui exige qu'on fasse

$$a_{11} = a_{22} = k = \operatorname{tang}\theta,\ a_{12} = 1,\ a_{21} = -1,\ K = a_{12} - a_{21} = 2,\ D = (a_{12} + a_{21})^2 - 4a_{11}a_{22} = -4\operatorname{tang}^2\theta.$$

Si e, f sont les droites de coefficients angulaires $-i, +i$, et si a, a' sont les côtés d'une position quelconque de l'angle θ, on a donc la formule de Laguerre

$$(e, f, a, a') = \frac{K + \sqrt{D}}{K - \sqrt{D}} = \frac{2 + 2i\operatorname{tang}\theta}{2 - 2i\operatorname{tang}\theta} = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta} = e^{2i\theta},$$

la dernière lettre e désignant la base des logarithmes népériens, et on en déduit

$$\theta = \frac{1}{2i}\operatorname{Log}(e, f, a, a'),$$

dans laquelle Log désigne un logarithme népérien

3) **Remarque.** En construisant dans le plan de la figure un faisceau dont les rayons sont parallèles aux positions successives du côté a' de l'angle considéré ci-dessus, on a ce théorème: *Pour que deux faisceaux projectifs placés dans un plan propre réel et dont les supports*

sont des points propres réels, soient égaux et de même sens ; il faut et il suffit que les droites isotropes des mêmes coefficients angulaires issues de leurs supports dans leur plan soient des rayons homologues.

4) **Théorème**. *Quand deux faisceaux projectifs sont dans un plan propre réel et ont pour support commun un point propre réel, si les angles formés par trois couples de rayons homologues sont égaux et de même sens, les faisceaux sont engendrés par les côtés d'un angle constant tournant autour du support commun.*

Soit θ la valeur commune des angles formés par les rayons homologues a et a', b et b', c et c' de deux faisceaux projectifs de même support S dans le plan ϖ. En faisant tourner un angle de valeur θ autour du point S dans le plan ϖ, les cotés de l'angle engendrent des faisceaux projectifs qui ont trois couples de rayons homologues a et a', b et b', c et c' en commun avec les faisceaux donnés et qui se confondent donc avec eux-ci, ce qui démontre le théorème.

58. **Théorème**. *Lorsque la projectivité établie entre deux ponctuelles sur une même droite propre et réelle est réelle et que les points doubles sont imaginaires, les points homologues sont les intersections du support commun et des côtés d'un angle constant dont le sommet est fixe.*

Soient x et x' les deux ponctuelles ; ϖ un plan réel passant par la droite $x \equiv x'$; P un point propre et réel extérieur à la droite $x \equiv x'$ dans le plan ϖ. Les faisceaux qui projettent les ponctuelles x, x' du point P sont projectifs et leurs rayons doubles sont les droites imaginaires joignant le point P aux points doubles des deux ponctuelles. Il suffit donc de démontrer qu'on peut prendre le point P pour que ces droites imaginaires soient des droites isotropes dans le plan ϖ. En rapportant les deux ponctuelles à un même système d'abscisses d'origine réelle, les points doubles E, F ont des abscisses imaginaires conjuguées et le milieu de leur distance est un point réel O de la droite $x \equiv x'$. Les droites isotropes de coefficients angulaires $-i$, $+i$ menées dans le plan ϖ par les points E, F sont des droites imaginaires conjuguées dont le point d'intersection est un point réel P de la perpendiculaire à la droite $x \equiv x'$ au point O. Le point P répond à la question et il en est de même de tous les points de la circonférence ayant le point O pour centre et OP pour rayon dans le plan perpendiculaire au point O à la droite $x \equiv x'$.

Pour calculer la distance OP, on observe d'abord que

$$|OP| = |i\,OE|.$$

Mais, en prenant le point O pour origine des abscisses, l'équation de projectivité se réduit à

$$aXX' + b(X - X') + d = 0$$

et l'équation aux points doubles,

$$aX^2 + d = 0,$$

donne

$$OE = OF = \pm\sqrt{-\frac{d}{a}}.$$

on a donc

$$|OP| = \sqrt{\frac{d}{a}}.$$

Remarque. – Le théorème peut également se démontrer de la manière suivante. Si

$$aXX' + bX + cX' + d = 0$$

est l'équation de projectivité pour des abscisses d'origine réelle O, les abscisses des points limites sont

$$OI = -\frac{c}{a} \quad , \quad OJ' = -\frac{b}{a}.$$

En mettant le point O au milieu de IJ', $c = -b$, l'équation de projectivité se réduit à

$$aXX' + b(X - X') + d = 0$$

et l'équation aux points doubles,

$$aX^2 + d = 0,$$

devant avoir des racines réelles, a et d n'ont pas le même signe.

Si le point O' est, sur la seconde ponctuelle, le point homologue du point O de la première,

$$OO' = \frac{d}{b}.$$

et le point O est situé entre les points J' et O'. La circonférence décrite sur O'J' comme diamètre dans un plan réel ϖ mené par le support $x \equiv x'$ des deux ponctuelles coupe en deux points réels la perpendiculaire à ce support au point O dans le plan ϖ. Soient P un de ces deux points, $I' \equiv J$ les points à l'infini des deux ponctuelles; $u \equiv PI' \equiv PJ$ la parallèle à la droite $x \equiv x'$ par le point P. Les angles IPI', JPJ', OPO' sont égaux parce qu'ils sont égaux aux angles à la base du triangle isoscèle PIJ'. Les angles formés par trois couples de rayons homologues des faisceaux projetant du point P les ponctuelles x, x' étant égaux, les faisceaux sont engendrés par les côtés d'un angle constant qui tourne autour du point P, ils répondent donc à la question.

Corollaire. *Lorsque les rayons doubles de deux faisceaux projectifs réels sont imaginaires, que le support commun soit un point propre ou impropre, les faisceaux peuvent être projetés sur un plan propre et réel suivant les faisceaux engendrés par les côtés d'un angle constant qui tourne autour de son sommet.*

§II: Involution.

Théorie générale.

59. Définition. Une projectivité établie entre deux formes fondamentales superposées de première espèce prend le nom d'involution lorsque les éléments homologues se correspondent doublement, c'est-à-dire, lorsque, X et X' étant des éléments homologues quelconques, X' et X sont des éléments homologues; on dit aussi que les éléments homologues sont permutables ou échangeables, et que les deux formes sont en involution.

60. 1° Théorème. *Deux formes fondamentales projectives de même support sont en involution, dès que la condition est remplie par un couple d'éléments homologues.*

Si l'équation de projectivité des deux formes rapportées aux mêmes coordonnées binaires est

$$a_{11}X_1X'_1 + a_{12}X_1X'_2 + a_{21}X_2X'_1 + a_{22}X_2X'_2 = 0$$

et si les éléments homologues A, A' se correspondent doublement, on a, à la fois,

$$a_{11}A_1A'_1 + a_{12}A_1A'_2 + a_{21}A_2A'_1 + a_{22}A_2A'_2 = 0 \quad \text{et} \quad a_{11}A'_1A_1 + a_{12}A'_1A_2 + a_{21}A'_2A_1 + a_{22}A'_2A_2 = 0$$

On en tire

$$(a_{12} - a_{21})(A_1A'_2 - A_2A'_1) = 0.$$

Les éléments A_1, A_2 étant différents l'un de l'autre, $A_1A'_2 - A_2A'_1 \neq 0$, et $a_{12} = a_{21}$ et l'équation de projectivité est

$$a_{11}X_1X'_1 + a_{12}(X_1X'_2 + X_2X'_1) + a_{22}X_2X'_2 = 0;$$

cette équation ne change pas quand on permute X avec X', il y a donc involution.

2° Corollaire 1. *Deux formes fondamentales de première espèce qui ont le même support, peuvent être mises en involution.*

En effet, on peut écrire directement la dernière équation et y supposer $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \neq 0$, pour avoir une involution ne se réduisant pas à une projectivité singulière. Mais on peut aussi prendre arbitrairement quatre éléments A, B, C, D d'un même support et placer sur celui-ci la projectivité

$$(A, B, C) \overline{\wedge} (B, A, D)$$

qui sera une involution, les éléments homologues A, B étant permutables.

3° Corollaire 2. *Si A et A', B et B' sont deux couples d'éléments homologues de deux formes projectives superposées dont les éléments doubles sont les éléments E, F, les trois couples d'éléments A et B', A' et B, E et F sont en involution*

Cela résulte de ce que, ayant

$$(E, F, A, A') = (E, F, B, B'),$$

On a aussi

$$(E, F, A, A') = (F, E, B', B).$$

61. Définition. *Quand deux formes fondamentales de première espèce sont en involution, on les considère comme une seule forme qu'on dit involutive ou en involution; les éléments homologues des formes données sont appelés des éléments conjugués de la forme unique.*

62. Remarque. *Deux formes fondamentales de première espèce, de noms différents, peuvent être dites en involution si l'une des deux est perspective à une forme en involution avec l'autre.*

63. 1° Théorème. *Une involution est déterminée par deux couples d'éléments conjugués.*

En effet, si A et A', B et B' sont deux couples d'éléments d'un même support, ils sont deux couples d'éléments conjugués de l'involution définie par la projectivité

$$(A, A', B) \overline{\wedge} (A', A, B)$$

2° Remarque 1. L'équation de l'involution est

$$\begin{vmatrix} X_1X'_1 & X_1X'_2 + X_2X'_1 & X_2X'_2 \\ A_1A'_1 & A_1A'_2 + A_2A'_1 & A_2A'_2 \\ B_1B'_1 & B_1B'_2 + B_2B'_1 & B_2B'_2 \end{vmatrix} = 0.$$

3° Remarque 2. Soient

$$A = 0 \quad \text{ou} \quad a_1X^2 + a_2X + a_3 = 0 \quad \text{avec} \quad X = A_1 : A_2 \text{ et } A'_1 : A'_2,$$

$$B = 0 \quad \text{ou} \quad b_1X^2 + b_2X + b_3 = 0 \quad \text{avec} \quad X = B_1 : B_2 \text{ et } B'_1 : B'_2,$$

$$C = 0 \quad \text{ou} \quad c_1X^2 + c_2X + c_3 = 0 \quad \text{avec} \quad X = C_1 : C_2 \text{ et } C'_1 : C'_2,$$

les équations des trois couples d'éléments conjugués A et A', B et B', C et C' d'une forme fondamentale involutive de première espèce. On a

$$\frac{A_1}{A_2} \cdot \frac{A'_1}{A'_2} = \frac{a_3}{a_1}, \qquad \frac{A_1}{A_2} + \frac{A'_1}{A'_2} = -\frac{a_2}{a_1}$$

et des relations analogues pour les éléments B et B', C et C'. Donc, pour que les trois couples d'éléments soient en involution, ou pour que leurs coordonnées vérifient l'équation écrite dans la remarque pré=

cédente, il faut et il suffit que

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette condition est aussi celle pour qu'il existe trois nombres α, β, γ non tous nuls et tels qu'on ait à la fois

$$a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma = 0, \qquad a_2\alpha + b_2\beta + c_2\gamma = 0, \qquad a_3\alpha + b_3\beta + c_3\gamma = 0.$$

Dès lors, pour que les éléments définis dans une forme fondamentale de première espèce par les équations

$$A = 0, \qquad B = 0, \qquad C = 0$$

soient trois couples d'éléments conjugués d'une involution, il faut et il suffit qu'il existe trois nombres α, β, γ non tous nuls et tels qu'on ait identiquement

$$\alpha A + \beta B + \gamma C = 0.$$

On en déduit qu'en donnant aux paramètres α, β des valeurs arbitraires, l'équation

$$\alpha A + \beta B = 0$$

représente successivement les couples d'éléments conjugués de l'involution déterminée par les deux couples d'éléments A et A', B et B'.

Cette propriété établit une correspondance biunivoque entre les couples d'éléments conjugués de l'involution et les éléments d'une forme de première espèce, si le couple d'éléments conjugués déterminé par des valeurs particulières des paramètres α, β correspond à l'élément de la forme qui a les mêmes valeurs pour coordonnées binaires. On dit que l'involution est rapportée projectivement à la forme considerée et il est facile de rattacher cette généralisation de la projectivité à la notion de rapport anharmonique.

Soient X et X' les éléments conjugués représentés par l'équation

$$(1) \qquad \alpha A + \beta B = 0 \qquad \text{ou} \qquad A + \lambda B = 0,$$

si $\lambda = \beta : \alpha$, et Y, Z deux éléments pris arbitrairement sur le support de l'involution. Le groupe des éléments X, X', Y, Z sera harmonique, si $(X, X', Y, Z) = -1$, c'est-à-dire, si les rapports $X = \frac{X_1}{X_2}$, $X' = \frac{X'_1}{X'_2}$, $Y = \frac{Y_1}{Y_2}$, $Z = \frac{Z_1}{Z_2}$ des coordonnées binaires des quatre éléments vérifient la condition

$$2(XX' + YZ) = (X + X')(Y + Z),$$

ou, en vertu de l'équation (1),

$$2YZ(a_1 + \lambda b_1) + (Y + Z)(a_2 + \lambda b_2) + 2(a_3 + \lambda b_3) = 0.$$

Si la valeur de Y est constante, cette équation est bilinéaire en Z et λ ; le rapport anharmonique de quatre valeurs quelconques de Z est égal à celui des valeurs homologues de λ et la forme engendrée par l'élément Z est projective à celle engendrée sur un support de première espèce par un élément T dont λ est le quotient des coordonnées binaires. Mais les valeurs de λ sont indépendantes de la valeur donnée à Y, ou, ce qui revient au même, les positions de l'élément T ne dépendent pas de la position de l'élément Y ; dès lors, dès que quatre éléments d'une forme fondamentale de première espèce sont les conjugués harmoniques d'un élément quelconque de la forme pour quatre couples

d'éléments donnés, en involution sur le support de cette forme, leur rapport anharmonique a une valeur constante. Cette valeur s'appelle le rapport anharmonique des quatre couples d'éléments en involution, et, ainsi, la projectivité établie entre une involution et une forme fondamentale de première espèce se réduit encore à une égalité de rapports anharmoniques.

64. **Éléments doubles.** _ 1° **Définition.** Deux éléments conjugués qui se confondent déterminent un élément double de l'involution. Si l'équation de l'involution est

$$a_{11}X_1X'_1 + a_{12}(X_1X'_2 + X_2X'_1) + a_{22}X_2X'_2 = 0,$$

l'équation aux éléments doubles est

$$a_{11}X_1^2 + 2a_{12}X_1X_2 + a_{22}X_2^2 = 0.$$

Elle se réduit à une identité quand

$$a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0,$$

et alors l'équation d'involution n'a plus de sens.

Toute involution possède donc deux éléments doubles distincts ou confondus selon qu'on a

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \neq 0 \quad \text{ou} \quad = 0;$$

Dans le second cas, l'involution est dite parabolique, mais elle se réduit à une projectivité singulière et il n'y a pas lieu de s'en occuper.

2° **Théorème.** *Si E, F sont les éléments doubles et A, A' deux éléments conjugués quelconques d'une involution, ces quatre éléments forment un groupe harmonique.*

Cela résulte immédiatement de ce qu'on a

$$(E, F, A, A') = (E, F, A', A),$$

puisque A et A', A' et A sont deux couples d'éléments homologues de deux formes projectives ayant E et F comme éléments doubles.

3° **Théorème.** *Réciproquement, E, F étant deux éléments fixes et A, A' deux éléments mobiles d'une forme fondamentale de première espèce, si on a constamment*

$$(E, F, A, A') = -1,$$

les éléments A, A' sont des éléments conjugués d'une involution dont E, F sont les éléments doubles.

Le rapport anharmonique (E, F, A, A') ayant une valeur constante, les formes engendrées par les éléments A, A' sont projectives et, elles sont en involution, parce que (E, F, A, A') étant égal à -1,

$$(E, F, A, A') = (E, F, A', A)$$

de sorte que A et A' sont permutables.

65. 1° **De l'involution associée à une projectivité donnée.** Soit

$$(1) \qquad a_{11}X_1X'_1 + a_{12}X_1X'_2 + a_{21}X_2X'_1 + a_{22}X_2X'_2 = 0$$

l'équation d'une projectivité entre deux formes fondamentales de première espèce, de même support. L'équation aux éléments doubles est

$$(2) \qquad a_{11}X_1^2 + (a_{12} + a_{21})X_1X_2 + a_{22}X_2^2 = 0.$$

La projectivité a donc les mêmes points doubles que l'involution

$$(3) \qquad a_{11}X_1X'_1 + \frac{1}{2}(a_{12} + a_{21})(X_1X'_2 + X_2X'_1) + a_{22}X_2X'_2 = 0.$$

Cette involution est dite associée à la projectivité définie par l'équation (1) et elle est associée à toutes

les projectivités définies par la même équation lorsque les coefficients $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ varient, si les rapports

(4) $$a_{11} : (a_{12} + a_{21}) : a_{22}$$

conservent les mêmes valeurs. Toutes ces projectivités diffèrent les unes des autres par les valeurs de $a_{12} - a_{21}$ et on a l'involution lorsque cette différence est nulle.

2° L'involution associée à une projectivité peut se tirer de celle-ci par la considération de groupes harmoniques. Soient φ, φ' deux formes fondamentales de première espèce, projectives et de même support, ayant des éléments doubles différents E, F; Z un élément quelconque du support, désigné par X dans φ et Y' dans φ'; X' l'élément homologue de X dans φ'; Y l'élément homologue de Y' dans φ; Z_1 le conjugué harmonique de Z par rapport aux éléments X', Y. Les éléments Z, Z_1 sont conjugués dans l'involution associée à la projectivité donnée entre φ et φ'. – En effet, on sait que les éléments E et F, X et Y', Y et X' sont trois couples d'éléments conjugués d'une involution. Mais les éléments X Y', Z coïncident; Z est donc un élément double de l'involution et Z_1 est le second élément double, puisque les quatre éléments Z, Z_1, X', Y forment un groupe harmonique. Il en résulte que les éléments Z, Z_1, E, F forment un groupe harmonique; les éléments Z, Z_1 sont donc conjugués dans l'involution dont E et F sont les éléments doubles, c'est-à-dire, dans l'involution associée à la projectivité donnée.

N.B. – On peut retrouver cette propriété par le calcul suivant. En écrivant l'équation de projectivité entre φ et φ' sous la forme

(5) $$aXX' + bX + cX' + d = 0,$$

on en déduit

(6) $$X' = -\frac{bZ + d}{aZ + c}, \qquad Y = -\frac{cZ + d}{aZ + b}.$$

Mais on doit avoir

(7) $$2(X'Y + ZZ_1) - (X' + Y)(Z + Z_1) = 0.$$

Il faut donc que

(8) $$\left\{2aZZ_1 + (b+c)(Z + Z_1) + 2d\right\}.\left\{aZ^2 + (b+c)Z + d\right\} = 0,$$

et comme Z est un élément quelconque du support des formes φ, φ', on a

(9) $$aZZ_1 + \frac{1}{2}(b+c)(Z + Z_1) + d = 0$$

ce qui est l'équation de l'involution associée à la projectivité (5).

Ponctuelle involutive ayant une droite propre pour support.

66. 1° **Théorème.** Si A et A', B et B', C et C' sont trois couples de points en involution sur une droite propre, on a

$$AB'.CA'.BC' + A'B.C'A.B'C = 0.$$

L'involution étant formée par la réunion de deux formes projectives, on a

$$(A, C, B', C') = (A', C', B, C) \quad \text{ou} \quad \frac{AB'}{B'C} : \frac{AC'}{C'C} = \frac{A'B}{BC'} : \frac{A'C}{CC'},$$

et on en tire la relation proposée

$$AB'.CA'.BC' + A'B.C'A.B'C = 0.$$

2° **Remarque.** Cette relation en fournit immédiatement d'autres en y permutant deux points conjugués. Ainsi, en permutant B avec B', on a

$$AB.CA'.B'C' + A'B'.C'A.BC = 0.$$

67. Propriétés des points doubles. On rapporte la ponctuelle involutive à des abscisses et on écrit l'équation d'involution sous la forme

(1) $$aXX' + b(X+X') + c = 0$$

Deux cas sont à distinguer: $a = 0$ et $a \neq 0$.

1° Quand $a = 0$, l'équation (1) se réduit à

(2) $$b(X+X') + c = 0 \quad \text{ou} \quad X + X' = k.$$

Dans ce cas, l'involution est une symétrie dont le centre a $\frac{k}{2}$ pour abscisse. En prenant ce point pour origine des abscisses, $k = 0$ et l'équation d'involution devient

(3) $$X + X' = 0 \quad \text{ou} \quad X = -X'.$$

L'équation aux points doubles,

(4) $$aX^2 + 2bX + c = 0,$$

se réduit à

(5) $$0.X^2 + 2X + 0 = 0.$$

Donc, lorsque $a = 0$, la ponctuelle involutive a deux points doubles, le centre de symétrie et le point à l'infini.

2° Quand $a \neq 0$, l'équation (4) donne deux points doubles qui sont des points propres, distincts ou confondus, limitant un segment rectiligne dont le milieu O a $-\frac{b}{a}$ pour abscisse. En prenant le point O comme origine des abscisses, $b = 0$ et les équations (1) et (4) deviennent

$$aXX' + c = 0 \quad \text{ou} \quad XX' = k \qquad (6)$$

et

$$aX^2 + c = 0 \quad \text{ou} \quad X^2 = k. \qquad (7)$$

Si l'équation (6) admet la solution X, X', elle admet aussi la solution $-X, -X'$; le point O est donc un centre de symétrie de l'involution; on l'appelle le point central de l'involution; il est le conjugué du point à l'infini.

Il résulte de l'équation (6) que le produit des distances du point central à deux points conjugués quelconques a une valeur constante; cette valeur s'appelle la puissance de l'involution.

Remarques. 1) La propriété précédente est identique à celle trouvée pour les points limites de deux ponctuelles projectives (26) et il en résulte que pour mettre en involution deux ponctuelles projectives, il suffit de placer les supports l'un sur l'autre de manière que les points limites coïncident.

2) L'involution (6) est parabolique lorsque $k = 0$; le point O est conjugué à tous les points du support. On laisse ce cas de côté.

3) Lorsque l'involution n'est pas parabolique, les sphères décrites sur les distances XX' des points conjugués comme diamètres ont le même plan radical qu'elles coupent suivant la même circonférence γ. Si l'involution est réelle, la circonférence γ est réelle ou imaginaire selon que la puissance k de l'involution est négative ou positive, ou bien, selon que les points doubles de l'involution sont imaginaires ou réels et l'involution est dite elliptique ou hyperbolique. Dans le premier cas, tout point P de la circonférence γ s'appelle un centre orthoptique de l'involution parce que l'angle XPX' est droit quels que soient les points conjugués X, X' (voir le n° 58).

4) Les circonférences $XX'M$ déterminées par des points conjugués quelconques X, X' et un point fixe M extérieur au support de la ponctuelle involutive, passent par un second point fixe M'. Ce point est dit associé au point M par l'involution donnée et la droite MM' passe par le point central O.
N.B. Cette propriété est applicable lorsque l'involution se réduit à une symétrie et la droite MM' est parallèle au support de l'involution dont le point central est devenu le point impropre du support.

68. 1° **Problème.** *Connaissant deux couples de points conjugués réels (A, A'), (B, B') d'une ponctuelle involutive réelle, construire deux points conjugués quelconques, le point central et les points doubles.*

Le point réel M étant pris arbitrairement en dehors du support u de la ponctuelle involutive donnée, les circonférences $AA'M$, $BB'M$ se coupent au point associé M' du point M. — Une circonférence menée arbitrairement par les points M, M' dans le plan de ces points et de la droite u, coupe cette droite en deux points conjugués de l'involution. — Le point central est le point O où la droite MM' rencontre la droite u. — Les points doubles sont les points de contact de la droite u avec les circonférences tangentes à cette droite passant par les points M, M'. Si le point central O est à l'infini, il est un des points doubles et l'autre point double est le milieu de AA' et de BB' et de tout segment XX' limité par deux points conjugués. Si le point central O est à distance finie, les points doubles ne sont réels que si l'involution est hyperbolique ; dans ce cas, le point O est extérieur aux segments AA', BB', XX' ; les points doubles sont les points où la droite u coupe la circonférence ayant le point O comme centre et pour rayon la longueur de la tangente menée du point O à l'une quelconque des circonférences tracées par les points M, M'.

2° **Remarques.** 1) Les points M, M' sont de part et d'autre ou d'un même côté de la droite u selon que l'involution est elliptique ou hyperbolique, ou bien selon que les segments AA', BB' empiètent ou n'empiètent pas l'un sur l'autre.

2) Dans le cas de l'involution hyperbolique, il y a des circonférences réelles passant par les points M, M' et qui ne coupent pas la droite u en des points réels ; il y a donc des couples de points conjugués formés de points imaginaires conjugués.

3) Dans le cas de l'involution elliptique, toutes les circonférences réelles passant par les points M, M' coupent la droite u en des points réels ; l'involution ne possède aucun couple d'éléments conjugués formé de points imaginaires conjugués.

Cette propriété peut s'établir par le calcul. Les éléments doubles de l'involution dont l'équation est

(1) $$aXX' + b(X + X') + c = 0$$

sont donnés par l'équation

(2) $$aX^2 + 2bX + c = 0$$

et on doit supposer, dans le cas actuel, que a, b, c sont des nombres réels vérifiant la condition

(3) $$ac - b^2 > 0.$$

Si l'équation (1) admettait la solution

(4) $$X = \alpha + \beta i \quad , \quad X' = \alpha - \beta i$$

formée de nombres imaginaires conjugués, on aurait

(5) $$(a\alpha + b)^2 + a^2\beta^2 + (ac - b^2) = 0$$

ce qui est en contradiction avec la condition (3).

Corollaire. *Deux couples de points imaginaires conjugués d'une même droite ne peuvent*

former un groupe harmonique.

5) Quand les points M, M' sont symétriques par rapport à la droite u, ils sont les centres orthoptiques de la ponctuelle involutive, et celle-ci est elliptique. — Lorsque la droite MM' est perpendiculaire à la droite u sans que les points M, M' soient symétriques par rapport à cette droite, le point central et le point à l'infini forment le seul couple d'éléments conjugués dont la distance soit vue des points M, M' sous des angles droits. — Si la droite MM' n'est pas perpendiculaire à la droite u, il n'y a qu'une circonférence passant par les points M, M' et ayant son centre sur la droite u; cette circonférence coupe cette droite aux deux seuls points conjugués qui sont encore les seuls dont la distance soit vue sous des angles droits des points M, M'.

6) Corollaires. — a. Dans tout faisceau involutif réel dont le support est un point propre, il y a au moins deux rayons conjugués perpendiculaires; s'il y en a plus de deux, tout rayon est perpendiculaire au rayon conjugué et le faisceau involutif est engendré par un angle droit qui tourne autour de son sommet dans son plan.

b. — Dans toute feuillée involutive réelle dont le support est une droite propre, il y a au moins deux feuillets conjugués perpendiculaires; s'il y en a plus de deux, tout feuillet est perpendiculaire au feuillet conjugué et la feuillée involutive est engendrée par un dièdre droit qui tourne autour de son arête.

7) Définition. Quand les éléments conjugués d'un faisceau involutif ou d'une feuillée involutive sont constamment perpendiculaires, les deux formes sont dites rectangulaires.

8) Corollaire. Pour qu'un faisceau involutif réel dont le support est un point propre soit rectangulaire, il faut et il suffit que les rayons doubles soient des droites isotropes, (voir le n° 57).

9) Cas particulier. Pour que deux droites réelles concourantes soient perpendiculaires, il faut et il suffit qu'elles forment un groupe harmonique avec les droites isotropes menées dans leur plan par leur point de rencontre, ou bien, ce qui revient au même, il faut et il suffit que leurs points impropres forment un groupe harmonique avec les points cycliques de leur plan.

69. 1° Problème: Projeter un faisceau involutif elliptique suivant un faisceau involutif rectangulaire.

Une transversale réelle quelconque u coupe le faisceau suivant une ponctuelle involutive elliptique. Par la droite u, on mène un plan réel α différent du plan du faisceau et on construit l'un ou l'autre P des centres orthoptiques de la ponctuelle involutive u dans le plan α. Si S est le support du faisceau involutif donné, celui-ci se projette sur le plan α d'un point quelconque de la droite SP suivant un faisceau involutif rectangulaire.

2° Problème. Projeter un faisceau involutif elliptique suivant une feuillée involutive rectangulaire.

Premier cas: Le support S du faisceau est un point propre. — Si le faisceau est rectangulaire, la seule feuillée rectangulaire répondant à la question est celle dont le faisceau est une section droite. Lorsque le faisceau n'est pas rectangulaire, il ne possède que deux rayons conjugués perpendiculaires, soient x, y ces deux rayons. Deux autres rayons conjugués quelconques a, b forment deux angles aigus et deux angles obtus. On convient de ne considérer que des demi-droites, et le faisceau étant elliptique, on peut adopter des notations telles que la demi-droite x soit dans l'angle aigu des demi-droites a, b. On coupe les demi-droites a, b, x et le faisceau S par une transversale z parallèle à y et perpendiculaire à x. On obtient ainsi une ponctuelle involutive elliptique dont le point central est le point X ≡ xz conjugué

au point impropre $Y \equiv yz$ et dont les points $A \equiv \alpha z$, $B \equiv bz$ sont des points conjugués. La circonférence γ lieu des centres orthoptiques de cette involution, est dans le plan perpendiculaire au plan du faisceau par la droite x, son centre est le point X et son rayon, égal à $\sqrt{|XA.XB|}$, est plus petit que XS. Les feuillées qui projettent le faisceau donné des tangentes menées du point S à la circonférence γ sont les seules feuillées réelles répondant à la question. Si on coupait le faisceau par une transversale parallèle à x, on serait conduit à des solutions imaginaires.

Second cas: Le support S du faisceau est à l'infini. Un plan α perpendiculaire à la direction d des rayons du faisceau coupe celui-ci suivant une ponctuelle elliptique. On détermine les centres orthoptiques P, P' de cette ponctuelle dans le plan α. Les feuillées qui projettent le faisceau, des parallèles à la direction d par les points P, P', sont les seules feuillées répondant à la question.

3° Problème. *Couper une feuillée involutive elliptique suivant un faisceau involutif rectangulaire.*

Le problème n'est possible que si le support de la feuillée est une droite propre. Soit d cette droite. Si la feuillée est rectangulaire, ses sections droites répondent à la question. Quand elle n'est pas rectangulaire, elle ne contient que deux feuillets conjugués perpendiculaires. Soient ξ et η ces feuillets. Un plan θ perpendiculaire à la droite d coupe la feuillée suivant un faisceau elliptique S dont les rayons $x \equiv \xi\theta$, $y \equiv \eta\theta$ sont les seuls rayons conjugués perpendiculaires. Quand le plan θ tourne autour de la droite x, il coupe constamment la feuillée suivant un faisceau involutif et la droite y, mobile dans le plan η, reste perpendiculaire à la droite x; si le plan θ tourne autour de la droite y, le faisceau reste involutif et la droite x, mobile dans ξ, reste perpendiculaire à la droite y. Un plan qui passe par S et ne contient ni x ni y, coupe le dièdre $\xi\eta$ suivant un angle qui n'est pas droit. Des plans parallèles coupant la feuillée suivant des faisceaux égaux, la question revient à construire, parallèlement à l'une des droites x ou y, un plan dont les intersections avec deux feuillets conjugués α, β soient des droites rectangulaires a, b. — Une droite z, parallèle à la droite y dans le plan θ, coupe la feuillée suivant une ponctuelle elliptique dont les points $X \equiv \xi z$ et $Y \equiv \eta z$, $A \equiv \alpha z$ et $B \equiv \beta z$, sont deux couples de points conjugués. Le point Y étant à l'infini, le point X est le point central de la ponctuelle dont la circonférence orthoptique est la circonférence γ de centre X et de rayon $\sqrt{|XA.XB|}$ dans le plan ξ. Si S_1, S_2 sont les points où la circonférence coupe la droite d, les plans S_1z, S_2z sont les seuls plans répondant à la question par la droite z. Ils sont réels ou imaginaires selon que le rayon de la circonférence est supérieur ou inférieur à XS, ou bien selon que l'angle ASB est obtus ou aigu, ou bien encore, selon que le plan ξ est dans l'angle obtus ou aigu des plans α, β. Il y a donc quatre directions de plans répondant à la question, deux réelles et deux imaginaires.

4° Problème. *Projeter une ponctuelle involutive elliptique suivant une feuillée involutive rectangulaire dont le support passe par un point propre donné.*

La question revient à projeter suivant une feuillée rectangulaire le faisceau involutif obtenu en projetant la ponctuelle donnée du point donné, problème résolu au n° 2.

7. Faisceaux égaux et de sens contraires. *1° Si le sommet, le plan et les bissectrices d'un angle variable sont fixes, les côtés de l'angle engendrent des faisceaux projectifs superposés en involution et les rayons doubles sont les bissectrices données.*

2° Réciproquement, si les rayons doubles d'un faisceau involutif sont rectangulaires, ces rayons sont les bissectrices des angles formés par des rayons conjugués quelconques.

En effet, deux rayons conjugués quelconques d'un faisceau involutif forment groupe harmonique avec les rayons doubles; et si deux rayons conjugués d'un groupe harmonique sont perpendiculaires l'un sur l'autre, ils sont les bissectrices des angles des deux autres rayons.

3° Comme la condition pour qu'un angle soit droit est que les cotés de l'angle forment un groupe harmonique avec les droites isotropes de leur plan par leur point de rencontre, on peut dire: pour que les rayons doubles d'un faisceau involutif soient perpendiculaires et soient ainsi les bissectrices des angles de deux rayons conjugués quelconques, il faut et il suffit que le faisceau admette comme rayons conjugués les droites isotropes issues de son support dans son plan.

71. 1° Problème. *Construire les points conjugués communs à deux ponctuelles involutives réelles, superposées sur une droite propre.*

Si M', M" sont les points associés d'un même point M pour les deux involutions, la circonférence M M' M" coupe le support commun des involutions en des points qui sont les seuls répondant à la question.

2° Remarques. 1) Si l'une des ponctuelles involutives données est elliptique, les points conjugués communs sont toujours réels et distincts.

2) Par projection, le problème s'étend aux ponctuelles impropres, aux feuillées et aux faisceaux. Ainsi, on en déduit une construction des éléments conjugués rectangulaires d'un faisceau ou d'une feuillée elliptique en adjoignant une forme rectangulaire de même nom à la forme donnée.

3) D'après la première remarque, étant donnée une involution elliptique, il y a toujours deux éléments conjugués formant un groupe harmonique avec deux éléments réels donnés arbitrairement sur le support, même quand les éléments donnés sont des éléments conjugués de l'involution

Corollaires. a.- *Etant données deux ponctuelles involutives elliptiques dans un même plan, sur des supports différents, il est toujours possible de construire deux faisceaux involutifs elliptiques dont elles sont des sections.* Les supports des faisceaux sont les derniers sommets d'un quadrilatère complet dont les quatre autres sommets sont les points doubles des ponctuelles données.

b. *Etant donnés deux faisceaux elliptiques de supports différents placés dans un même plan, il est toujours possible de construire deux ponctuelles elliptiques dont ils sont les projections.* Les supports des ponctuelles sont les deux derniers cotés d'un quadrangle complet dont les quatre autres cotés sont les rayons doubles des deux faisceaux donnés.

4) Dans le cas d'une involution hyperbolique, les éléments conjugués formant un groupe harmonique avec deux éléments réels du support sont réels ou imaginaires d'après la position des éléments donnés par rapport aux éléments doubles de l'involution.

5) On peut appliquer le problème résolu au 1° à la construction des éléments doubles de deux ponctuelles projectives superposées, connaissant trois couples d'éléments homologues A et A', B et B', C et C'. Ces éléments doubles sont les éléments conjugués communs aux involutions (A, B'; A', B), (A, C'; A', C). On en déduit que les éléments conjugués communs à ces deux involutions sont aussi des éléments conjugués de l'involution (B, C'; B', C).

72. 1° Problème. *Deux ponctuelles projectives de supports différents étant dans le même plan, on demande de les projeter suivant un faisceau involutif.*

Si X_i et Y_i, X_j et Y_j sont deux couples de points homologues des ponctuelles données x, y, le point d'intersection S des droites $X_i Y_j$, $X_j Y_i$ est le support d'un faisceau répondant à la question. Lorsque i et j varient, le lieu du point S est une droite (38, 3°) qu'on appelle la polaire d'involution des ponctuelles x, y.

2° Problème. *Deux faisceaux projectifs de supports différents étant placés dans le même plan*

on demande de les couper suivant une ponctuelle involutive.
Si x_i et y_i, x_j et y_j sont deux couples de rayons homologues des faisceaux donnés X, Y, la droite joignant le point $x_i\, y_j$ au point $x_j\, y_i$ est le support d'une ponctuelle répondant à la question. Lorsque i et j varient, le lieu de la droite est un point (39, 3°) qu'on appelle le pôle d'involution des faisceaux X, Y.

73. Problème. *Mettre en involution deux formes projectives réelles de même nom.*
1° Pour mettre en involution deux ponctuelles projectives dont les points limites sont des points propres, il faut les placer sur une même droite de manière que les points limites coïncident.
2° Quand les points limites sont à l'infini, les ponctuelles sont semblables et elles ne peuvent être mises en involution que si elles sont égales, auquel cas, il suffit de les placer sur une même droite de manière que deux points homologues coïncident.
3° Si les formes données sont des faisceaux dont les supports sont à l'infini, la considération des sections droites ramène au cas des ponctuelles.
4° Si les formes données sont des faisceaux dont les supports sont un point propre et un point impropre, la question n'a pas de sens.
5° Dans le cas de deux faisceaux dont les supports sont des points propres, on détermine les angles droits homologues xy, $x'y'$, puis, on place les faisceaux l'un sur l'autre pour que x coïncide avec y' et y avec x'.
6° Les cas des feuillées se traitent comme ceux des faisceaux.

Quadrangles et quadrilatères complets. _ 74. 1° Définitions.

1) Un quadrangle complet est la figure définie par quatre points A, B, C, D situés dans un même plan sans que trois d'entre eux soient en ligne droite. Les points A, B, C, D sont les sommets et on distingue trois couples de côtés opposés: AB et CD, AC et DB, AD et BC; les points X ≡ (AB, CD), Y ≡ (AC, DB), Z ≡ (AD, BC) sont les points diagonaux et le triangle XYZ est le triangle diagonal du quadrangle ABCD.

2) Un quadrilatère complet est la figure définie par quatre droites a, b, c, d situées dans un même plan sans que trois d'entre elles soient concourantes. Les droites a, b, c, d sont les côtés et on distingue trois couples de sommets opposés: ab et cd, ac et db, ad et bc; les droites x ≡ (ab, cd), y ≡ (ac, db), z ≡ (ad, bc) sont les diagonales et le triangle xyz est le triangle diagonal du quadrilatère abcd.

Le quadrangle et le quadrilatère sont des figures homologues de deux systèmes plans réciproques

2° Théorèmes.

1) Les trois couples de côtés opposés d'un quadrangle complet coupent une droite quelconque du plan du quadrangle en trois couples de points en involution.

2) Les trois couples de sommets opposés d'un quadrilatère complet sont projetés d'un point quelconque du plan du quadrilatère suivant trois couples de droites en involution.

Il suffit de démontrer le théorème de gauche, ce qu'on fera par la considération de trois ponctuelles involutives associées ayant les côtés d'un triangle pour supports. Sur les côtés AB, AC du triangle ABC, on place des ponctuelles involutives dont les points A et B, A et C sont des points conjugués. Soient X et X' deux points conjugués sur AB, Y et Y' deux points conjugués sur AC. Lorsque les points Y, Y' varient, les faisceaux X (Y), X'(Y') qui les projettent des points X, X' sont projectifs et coupent le côté BC du triangle ABC suivant deux ponctuelles projectives BC (Z), BC (Z'). En mettant Y en A et Y' en C, puis, en mettant Y en C et Y' en A, on constate que les points homologues B, C de ces ponctuelles sont permutables; les points Z, Z' engendrent donc sur le coté BC une involution dont les points B et C sont des points conjugués. Il en est de même des ponctuelles obtenues en coupant par la droite BC les faisceaux projetant, des points fixes Y, Y', les points conjugués X, X'

variables sur AB. Mais les deux involutions déterminées ainsi sur BC ont en commun deux couples, B et C, Z et Z', d'éléments conjugués ; elles sont donc confondues en une seule dont on peut construire deux points conjugués quelconques en coupant la droite BC par les droites XY et X'Y' joignant deux couples de points conjugués (X,X'), (Y,Y') des involutions données sur AB et AC. On dit que les trois involutions sont associées sur les côtés du triangle ABC.

Les points B et C, Z et Z', T et T' où la droite BC coupe les côtés du quadrangle complet XX'YY' étant trois couples de points conjugués de l'involution placée sur le côté BC, le théorème résulte de ce que le quadrangle et la droite BC peuvent être pris arbitrairement.

3° Corollaires I,1 et I,2.

1) Si trois couples de points en ligne droite B et C, Z et Z', T et T' sont en involution et si les côtés du triangle YX'X passent par les points B, Z, T pris dans les trois couples, les droites YC, X'Z', XT' qui joignent les sommets du triangle aux trois autres points sont concourantes.

2) Si les trois couples de droites concourantes b et c, z et z', t et t' sont en involution et si les sommets du triangle yx'x sont sur les droites b, z, t prises dans les trois couples, les points yc, x'z', xt' où les côtés du triangles coupent les trois autres droites sont en ligne droite.

4° Corollaire II. Les trois couples de droites issues d'un même point et parallèles aux côtés opposés d'un quadrangle sont en involution.

5° Corollaire III. Les circonférences décrites sur les diagonales d'un quadrilatère complet comme diamètres ont deux points communs qu'on appelle les centres orthoptiques du quadrilatère, et il en résulte que les points milieux des diagonales d'un quadrilatère complet sont en ligne droite.

6° Remarque 1. _ a. Il résulte des propriétés des involutions associées sur les trois côtés du triangle ABC que si trois points X, Y, Z des trois côtés sont en ligne droite, il en est de même de leurs conjuguées X', Y', Z', et, trois pareilles involutions sont déterminées en coupant le triangle ABC par deux transversales quelconques.

b. Si X et Y sont des points doubles sur AB et AC, on a X ≡ X', Y ≡ Y' et, par suite, Z ≡ Z'; les points doubles des trois involutions sont donc trois par trois sur des lignes droites et ils sont ainsi les sommets d'un quadrilatère complet dont les diagonales sont les côtés du triangle.

c. On déduit de là que si trois involutions sont associées sur les côtés d'un triangle réel, le nombre de celles de ces involutions qui sont hyperboliques est impair, 1 ou 3.

d. Si Z ≡ Z', XY et X'Y' passent par un même point de BC. Chaque point double de l'involution placée sur BC est le support d'un faisceau involutif perspectif aux involutions mises sur AB et AC. (Voir n° 71, 2°).

e. Tout quadrilatère complet détermine trois involutions associées sur les côtés du triangle diagonal et ayant pour points doubles les sommets du quadrilatère.

7° Remarque 2. _ Les propriétés précédentes s'étendent aux faisceaux involutifs associés ayant pour supports les sommets d'un triangle, et à des involutions associées sur les faces ou les arêtes d'un trièdre.

Chapitre V: Les cinq formes de première espèce et du second degré.

§ I: Propriétés projectives de la circonférence.

75. _ Soient A, S, X, O deux points fixes, le point courant et le centre de la circonférence réelle k; a, x les tangentes aux points A, X; Y le point ax. La droite OY est la bissectrice de l'angle XOA et

l'angle dont elle tourne quand le point X se meut sur la circonférence est la moitié de celui dont tourne la droite OX; les droites OY, SX engendrent donc des faisceaux superposables et le faisceau de support S engendré par la droite SX est projectif à la ponctuelle engendrée par le point Y sur la droite a. Les points A, S ne dépendant pas l'un de l'autre, on peut donc énoncer les théorèmes suivants.

1° Les faisceaux projetant le point courant de deux points fixes de la circonférence sont projectifs.

Remarque. Si S et T sont les points fixes desquels on projette le point courant X, la droite SX a pour limite la tangente s au point S quand le point X se confond avec le point S. La tangente au point S est donc, dans le faisceau ayant ce point pour support, le rayon homologue du rayon TS dans le faisceau de support T.

2° Les ponctuelles tracées par une tangente mobile sur deux tangentes fixes de la circonférence sont projectives.

Remarque. Si s et t sont les tangentes fixes coupées par la tangente variable x, le point de contact S de la tangente s est, sur la ponctuelle ayant cette droite pour support, le point homologue du point ts de la ponctuelle de support t.

3° Les droites qui projettent quatre points fixes d'une circonférence d'un cinquième point mobile sur la courbe ont un rapport anharmonique constant.

Définition. Le rapport anharmonique constant s'appelle le rapport anharmonique des quatre points fixes.

Remarque. D'après la remarque du 1°, lorsque le cinquième point coïncide avec un des quatre points fixes, la droite projetant ce point fixe est la tangente au même point.

4° Les points d'intersection de quatre tangentes fixes d'une circonférence par une cinquième tangente mobile ont un rapport anharmonique constant.

Définition. Le rapport anharmonique constant s'appelle le rapport anharmonique des quatre tangentes fixes.

Remarque. D'après la remarque faite au 2°, lorsque la cinquième tangente coïncide avec une des quatre tangentes fixes, le point d'intersection de cette tangente fixe devient le point de contact de la même tangente.

5° Le rapport anharmonique de quatre points d'une circonférence est égal à celui des tangentes en ces points.

En effet, le faisceau de support S engendré par la droite SX étant projectif à la ponctuelle engendrée par le point Y sur a, le rapport anharmonique de quatre positions quelconques de la droite SX est égal à celui des positions homologues du point Y. Dès lors, la propriété résulte de ce que, en vertu des définitions énoncées au 3° et au 4°, ces deux rapports anharmoniques sont celui de quatre positions quelconques du point X et celui des tangentes en ces points.

§II: La ponctuelle et le faisceau du second degré.

A. Définitions.

76. 1° Soient S et T deux faisceaux projectifs, réels ou imaginaires, non perspectifs, de supports différents, placés dans un même plan propre ou impropre, réel ou imaginaire. Deux rayons homologues quelconques a, a' de ces faisceaux

2° Soient s et t deux ponctuelles projectives, réelles ou imaginaires, non perspectives, de supports différents, placées dans un même plan propre ou impropre, réel ou imaginaire. Deux points homologues quelconques A, A' de ces ponc=

se coupent en un point A dont le lieu est, par définition, une ponctuelle du second degré (P_2). Quand le rayon a' coïncide avec la droite $b' \equiv ST$ dans le faisceau T, la droite a devient une droite b différente de la droite ST dans le faisceau S. Le point S est donc un point de la ponctuelle du second degré P_2 et la droite b est la seule des droites issues du point S qui n'a qu'un point commun avec P_2. La droite b est, par définition, la tangente à la ponctuelle du second degré P_2 au point S. De même, le point T est un point de P_2 et la tangente en ce point est, dans le faisceau T, le rayon homologue c' du rayon $c \equiv ST$ du faisceau S.

Toute droite x qui ne passe ni par le point S ni par le point T et qui est située dans le plan de la ponctuelle du second degré P_2, a en commun avec celle-ci deux points distincts ou confondus; ces points sont les points doubles des ponctuelles projectives suivant lesquelles la droite x coupe les faisceaux projectifs S et T.

tuelles déterminent une droite (rayon) a dont le lieu est, par définition, un faisceau du second degré (f_2). Quand le point A' coïncide avec le point $B' \equiv st$ sur la ponctuelle t, le point A devient un point B différent du point st sur la ponctuelle s. La droite s est donc un rayon du faisceau du second degré f_2 et le point B est le seul des points de la droite s qui n'appartient qu'à un rayon de f_2. Le point B est, par définition, le point de contact du rayon s dans le faisceau du second degré f_2. De même, la droite t est un rayon de f_2 et le point de contact de ce rayon est, sur la ponctuelle t, le point homologue C' du point $C \equiv st$ de la ponctuelle s.

Tout point X qui n'est ni sur la droite s ni sur la droite t et qui est situé dans le plan du faisceau du second degré f_2, appartient à deux rayons distincts ou confondus de celui-ci; ces droites sont les rayons doubles des faisceaux projectifs projetant du point X les ponctuelles projectives s et t.

N.B. C'est à cause de ces dernières propriétés que les formes actuelles, P_2, f_2, sont dites du second degré. Par opposition, lorsque la clarté du langage l'exigera, les formes fondamentales, la ponctuelle, la feuillée et le faisceau, seront dites du premier degré.

77. Corollaires.

1° L'ensemble des points d'une circonférence est une ponctuelle du second degré.

2° L'ensemble des tangentes à une circonférence est un faisceau du second degré.

3° Si, dans un plan, les cotés du triangle ABC passent par trois points fixes D, E, F non situés en ligne droite, et si les sommets B, C glissent sur deux droites fixes b, c le lieu du point A est une ponctuelle du second degré

4° Si, dans un plan, les sommets du triangle abc glissent sur trois droites fixes d, e, f non concourantes, et si les cotés b, c tournent autour de deux points fixes B, C le lieu de la droite a est un faisceau du second degré.

5° Si deux angles de sommets différents, placés dans un même plan, tournent autour de leurs sommets de manière que deux côtés se coupent sur une droite fixe, le lieu du point de rencontre des deux autres côtés est une ponctuelle du second ou du premier degré.

78. Théorèmes.

1° On peut établir une infinité de collinéations entre deux systèmes plans pour qu'aux points d'une ponctuelle du second degré donnée dans le premier système plan correspondent les points d'une circonférence réelle donnée dans le second.

2° On peut établir une infinité de collinéations entre deux systèmes plans pour qu'aux rayons d'un faisceau du second degré donné dans le premier système plan correspondent les tangentes d'une circonférence réelle donnée dans le second.

3° On peut établir une infinité de réciprocités entre deux systèmes plans pour qu'aux points d'une ponctuelle du second degré donnée dans le

4° On peut établir une infinité de réciprocités entre deux systèmes plans pour qu'aux rayons d'un faisceau du second degré donné dans le

premier système plan correspondent les tangentes d'une circonférence réelle donnée dans le second.

premier système plan correspondent les points d'une circonférence réelle donnée dans le second.

Ces quatre théorèmes se démontrent par des procédés identiques ou s'échangent entre eux par des projectivités convenables établies entre deux systèmes plans; il suffit donc de démontrer le premier. — Soient A, B, C trois points quelconques de la ponctuelle du second degré P_2 définie par les faisceaux projectifs S et T dans le système plan ϖ; A_1, B_1, C_1 trois points quelconques d'une circonférence réelle k donnée dans le système plan ϖ_1 dont le support est un plan propre et réel. Après avoir pris arbitrairement le point X_1 sur la circonférence k, on construit les points S_1, T_1 de cette courbe tels qu'on ait

$$S(A,B,C,T)\,\pi\, X_1(A_1,B_1,C_1,T_1) \qquad \text{et} \qquad T(A,B,C,S)\,\pi\, X_1(A_1,B_1,C_1,S_1).$$

Les propriétés projectives de la circonférence donnent

$$X_1(A_1,B_1,C_1,T_1)\,\pi\, S_1(A_1,B_1,C_1,T_1) \qquad \text{et} \qquad X_1(A_1,B_1,C_1,S_1)\,\pi\, T_1(A_1,B_1,C_1,S_1).$$

On a donc

$$S(A,B,C,T)\,\pi\, S_1(A_1,B_1,C_1,T_1) \qquad \text{et} \qquad T(A,B,C,S)\,\pi\, T_1(A_1,B_1,C_1,S_1);$$

ces deux couples de faisceaux projectifs établissent entre les systèmes plans ϖ, ϖ_1 une collinéation dans laquelle les points de la ponctuelle du second degré P_2 sont les points homologues des points de la circonférence k. On voit en outre que la tangente à la ponctuelle du second degré P_2 au point S est la droite homologue de la tangente à la circonférence k au point S_1.

79. **Corollaires.** Les propriétés projectives de la circonférence sont applicables aux ponctuelles et aux faisceaux du second degré; ainsi,

1° Une ponctuelle du second degré est projetée de deux quelconques de ses points suivant des faisceaux projectifs et, par suite, il y a une tangente en chaque point d'une ponctuelle du second degré.

2° Un faisceau du second degré est coupé par deux quelconques de ses rayons suivant deux ponctuelles projectives et, par suite, il y a un point de contact sur chaque rayon d'un faisceau du second degré.

N. B. — 1) Dans les collinéations 1° (n° 78), les tangentes à la ponctuelle du second degré sont les éléments homologues des tangentes à la circonférence.

2) Dans les collinéations 2° (n° 78), les points de contact dans le faisceau du second degré sont les éléments homologues des points de la circonférence.

3° Dans les réciprocités 3° (n° 78), les tangente à la ponctuelle du second degré sont les éléments homologues des points de la circonférence.

4) Dans les réciprocités 4° (n° 78), les points de contact dans le faisceau du second degré sont les éléments homologues des tangentes à la circonférence.

Il suffit de justifier le N. B. 1 pour la collinéation établie entre les systèmes plans ϖ, ϖ_1 dans la démonstration faite au numéro 78.

A cet effet, on observe que les tangentes aux points A, A_1 de la ponctuelle du second degré P_2 et de la circonférence k sont, dans les faisceaux ayant les points A, A_1 pour supports, les éléments homologues des rayons SA, S_1A_1 des faisceaux de supports S, S_1 dans les projectivités.

$$A(B,C,T)\,\pi\, S(B,C,T) \qquad \text{et} \qquad A_1(B_1,C_1,T_1)\,\pi\, S_1(B_1,C_1,T_1).$$

Dès lors, la propriété résulte de ce que la collinéation établie entre les systèmes plans ϖ, ϖ_1 donne

$$A(B,C,T)\,\pi\, A_1(B_1,C_1,T_1) \qquad \text{et} \qquad S(B,C,T)\,\pi\, S_1(B_1,C_1,T_1)$$

3° Les ponctuelles du premier degré obtenues en coupant les tangentes d'une ponctuelle du second degré par deux quelconques d'entre elles. sont projectives. Si s et t sont les tangentes par lesquelles on coupe les tangentes de la ponctuelle du second degré P_2, le point S de celle-ci relatif à la tangente s est, sur la ponctuelle ayant cette droite pour support, le point homologue du point st de la ponctuelle ayant la tangente t pour support; les tangentes aux points d'une ponctuelle du second degré sont donc les rayons d'un faisceau du second degré avec pour points de contact les points de la ponctuelle du second degré situés sur ces rayons.

4° Les faisceaux du premier degré obtenus en projetant les points de contact d'un faisceau du second degré de deux quelconques d'entre eux sont projectifs. Si S et T sont les points de contact desquels on projette les points de contact d'un faisceau du second degré f_2, le rayon s de celui-ci relatif au point de contact S est, dans le faisceau ayant ce point pour support, le rayon homologue de la droite ST du faisceau ayant le point T pour support; les points de contact des rayons d'un faisceau du second degré sont donc les points d'une ponctuelle du second degré avec pour tangentes les rayons du faisceau du second degré qui passent par ces points.

5° Les droites qui joignent quatre points fixes d'une ponctuelle du second degré à un cinquième mobile ont un rapport anharmonique constant qu'on appelle le rapport anharmonique des quatre points fixes.

6° Les points de rencontre de quatre rayons fixes d'un faisceau du second degré par un cinquième mobile ont un rapport anharmonique constant qu'on appelle le rapport anharmonique des quatre rayons fixes.

7° Les points d'intersection de quatre tangentes fixes d'une ponctuelle du second degré par un cinquième mobile ont un rapport anharmonique constant qu'on appelle le rapport anharmonique des quatre tangentes fixes.

8° Les droites joignant quatre points de contact fixes d'un faisceau du second degré à un cinquième mobile ont un rapport anharmonique constant qu'on appelle le rapport anharmonique des quatre points de contact fixes.

9° Le rapport anharmonique de quatre points d'une ponctuelle du second degré est égal à celui des tangentes correspondantes.

10° Le rapport anharmonique de quatre rayons d'un faisceau du second degré est égal à celui des points de contact correspondants.

Conclusion. – Il y a identité entre les points et les tangentes d'une ponctuelle du second degré et les points de contact et les rayons d'un faisceau du second degré.

80. Remarques. 1° Parmi toutes les collinéations réelles qu'on peut établir entre deux systèmes plans propres et réels sur lesquels on s'est donné une ponctuelle réelle du second degré et une circonférence réelle, il y en a une infinité qui ne sont pas des affinités. Pour chacune de ces collinéations, on peut mettre les systèmes plans en perspectivité, les points et les tangentes de la ponctuelle du second degré correspondant aux points et aux tangentes homologues de la circonférence. Les ponctuelles réelles du second degré sont donc des coniques réelles.

2° Plus généralement, si dans un système plan propre ou impropre, réel ou imaginaire, rapporté à des coordonnées ternaires, les équations

$$(1) \qquad X=0, \quad Y=0, \quad Z=0, \quad T=0$$

sont les équations des côtés d'un quadrangle simple ou des sommets d'un quadrilatère simple, l'équation d'une conique circonscrite au quadrangle ou inscrite au quadrilatère peut s'écrire

$$(2) \qquad XZ-YT=0.$$

Cette équation résulte de l'élimination du paramètre λ entre les équations

$$(3) \qquad X=\lambda Y, \quad \lambda Z=T.$$

La conique est donc le lieu des points d'intersection des rayons homologues de deux faisceaux projectifs ou l'enveloppe des droites joignant les points homologues de deux ponctuelles projectives. Les points de la conique sont ainsi les points d'une ponctuelle du second degré et ses tangentes sont les rayons d'un faisceau du second degré, et réciproquement.
A cause de cette propriété, on se servira du mot conique pour désigner l'ensemble des points et des tangentes d'une ponctuelle du second degré, ou l'ensemble des rayons et des points de contact d'un faisceau du second degré. On dira ponctuelle du second degré pour désigner l'ensemble des points d'une conique et on dira faisceau du second degré pour désigner l'ensemble des tangentes. Pour tenir compte des conventions de langage de la géométrie analytique, on pourrait dire conique du second ordre et conique de seconde classe au lieu de ponctuelle du second degré et de faisceau du second degré.
3° Soient A, B, C, X trois points fixes pris arbitrairement sur une conique γ et un point mobile sur la courbe; a, b, c, x les tangentes en ces points; S un point quelconque et t une tangente quelconque de la conique. On a démontré que

$$(4) \qquad S(A,B,C,X) = t(a,b,c,x)$$

et on a dit que ces rapports anharmoniques égaux sont respectivement le rapport anharmonique des points A, B, C, X et celui des tangentes a, b, c, x de la conique γ; cela permet d'écrire

$$(5) \qquad \gamma(A,B,C,X) = \gamma(a,b,c,x),$$

en considérant la conique γ comme les supports de la ponctuelle du second degré décrite par le point X et du faisceau du second degré engendré par la tangente x. Mais si on adopte les droites SA, SB, SC et les points ta, tb, tc comme éléments fondamentaux des coordonnées binaires dans le faisceau et la ponctuelle du premier degré ayant le point S et la droite t comme supports, il résulte de la formule (4) que le rapport des coordonnées binaires du rayon SX dans le faisceau S est égal à celui des coordonnées binaires du point tx sur la ponctuelle t; en tenant compte du caractère d'homogénéité des coordonnées binaires, on peut dire que le rayon SX et le point tx ont les mêmes coordonnées binaires X_1, X_2 dans les deux formes. De plus, cette propriété se conserve si on remplace le point S et la tangente t par un autre point et une autre tangente de γ, car le point S ne dépend pas de la tangente t. On convient de dire que les nombres X_1, X_2 sont les coordonnées binaires du point X et de la tangente x de la conique γ par rapport aux points fondamentaux A, B, C et aux tangentes fondamentales a, b, c. Les considérations qui ont précédé justifient cette définition, car elles montrent que, par rapport aux points fondamentaux A, B, C ou aux tangentes fondamentales a, b, c les nombres X_1, X_2 définissent le point X ou la tangente x par l'intermédiaire d'un faisceau ou d'une ponctuelle du premier degré dont les supports sont un point et une tangente arbitraires de la conique γ. On constate aussi que, comme dans les formes fondamentales ou du premier degré, le quotient $X_1 : X_2$ des coordonnées binaires du point X ou de la tangente x est la valeur des rapports anharmoniques (A, B, C, X), (a, b, c, x) des groupes de quatre éléments formés des éléments fondamentaux et du point X ou de la tangente x. De plus, si les deux formes du second degré ont la même conique pour support et si les points fondamentaux sont les points de contact des tangentes fondamentales, il résulte de la formule (5) que tout point de la conique a les mêmes coordonnées binaires que la tangente en ce point. - C'est la possibilité de rapporter la conique à des coordonnées binaires, qu'elle soit considérée comme support de points ou comme support de tangentes, qui en fait une forme de première espèce dans chacun de ses deux modes de génération.

4° Une ponctuelle réelle du second degré et une circonférence réelle pouvant être mises en perspectivité (1°), toute conique réelle partage le plan en deux régions, une région extérieure que traversent les tangentes réelles et une région intérieure dans laquelle ne passe aucune tangente réelle. Tout segment rectiligne terminé dans les deux régions coupe la conique en un point réel. Une droite réelle, propre ou impropre, tracée dans le plan de la conique coupe celle-ci en deux points qui sont réels et distincts, réels et confondus, ou imaginaires conjugués. D'un point réel, propre ou impropre, du plan de la conique, on peut mener à celle-ci deux tangentes qui sont réelles et distinctes, réelles et confondues, ou imaginaires conjuguées. – Lorsque les points d'intersection d'une droite réelle et de la conique sont imaginaires ou réels et confondus, la droite n'a aucun point intérieur à la conique; si les points d'intersection sont réels et distincts, ils séparent les points de la droite qui sont intérieurs de ceux qui sont extérieurs à la conique. – Lorsque les tangentes issues d'un point réel sont imaginaires ou réelles et confondues, le point est intérieur à la conique ou sur la conique, toute droite issue de ce point coupe la conique en deux points réels; mais si les tangentes sont réelles et distinctes, elles séparent les droites issues du point qui coupent la conique en des points réels de celles pour lesquelles les points d'intersection sont imaginaires.

5° Les considérations établies dans la remarque précédente sont applicables à la conique suivant laquelle le plan de l'infini coupe le cône projetant une circonférence d'un point propre et réel extérieur au plan de la circonférence.

81. **Théorèmes.** 1° On peut établir une infinité de collinéations entre deux systèmes plans pour qu'aux points et aux tangentes d'une conique donnée dans le premier système plan correspondent les points et les tangentes d'une conique donnée dans le second système plan.

2°. On peut établir une infinité de réciprocités entre deux systèmes plans pour qu'aux points et aux tangentes d'une conique donnée dans le premier système plan correspondent les tangentes et les points d'une conique donnée dans le second système plan.

On peut démontrer ces théorèmes directement en leur appliquant la démonstration faite au numéro 78, ou bien, on peut les déduire des théorèmes du même numéro par l'intermédiaire d'un système plan auxiliaire dans lequel on aurait tracé une circonférence.

Remarque. Aux deux théorèmes qui précèdent se rattache le suivant dont la démonstration est immédiate: Quand deux systèmes plans sont projectifs, à toute conique de l'un correspond une conique de l'autre.

B. Classification des coniques appartenant à un plan propre et réel.

82. 1° Une conique d'un plan propre et réel est une ellipse, une parabole ou une hyperbole selon qu'elle coupe la droite de l'infini du plan en des points imaginaires, en des points réels et confondus, ou en des points réels et distincts.

2° Les directions des droites qui joignent un point propre et réel du plan de la conique aux points impropres de celle-ci sont les directions asymptotiques de la conique, et les tangentes aux points impropres sont les asymptotes de la conique.

3° Une hyperbole équilatère est une hyperbole dont les directions asymptotiques sont rectangulaires; les points impropres d'une hyperbole équilatère forment un groupe harmonique avec les points cycliques du plan de l'hyperbole.

4° Quand une conique est le lieu des points d'intersection des rayons homologues de deux faisceaux projectifs réels ayant des points propres pour supports, les points impropres de la conique sont les points d'intersection des rayons homologues parallèles; les directions asymptotiques de la conique sont les rayons doubles des deux faisceaux projectifs superposés obtenus en menant par un point propre et réel des droites parallèles aux rayons des deux faisceaux donnés.

5° Lorsque la conique est une circonférence réelle, les faisceaux qui la projettent de deux quelconques de ses points réels sont égaux et de même sens; les faisceaux projectifs superposés définis dans la construction précédente ont des droites isotropes pour rayons doubles, et réciproquement. Donc, pour qu'une conique réelle située dans un plan propre soit une circonférence, il faut et il suffit que ses directions asymptotiques soient des droites isotropes, ou ce qui revient au même, que la conique passe par les points cycliques de son plan.

6° La droite de l'infini du plan d'une parabole étant tangente à la courbe, il en résulte que les ponctuelles projectives tracées par les tangentes d'une parabole sur deux quelconques d'entre elles ont leurs points limites à l'infini et sont semblables. Réciproquement, lorsque deux ponctuelles réelles, semblables, non perspectives et de supports différents, sont dans un même plan, lequel est nécessairement un plan propre et réel, les droites joignant les points homologues sont les tangentes d'une parabole et on dit qu'elles enveloppent une parabole (Apollonius).

C. Théorèmes de Pascal et de Brianchon;

83. Problèmes.

1) Connaissant cinq points d'une conique, construire un sixième point quelconque de la courbe et la tangente en un des points connus.

2) Connaissant cinq tangentes d'une conique, construire une sixième tangente quelconque et le point de contact d'une tangente connue.

On passe du premier problème au second par une réciprocité entre deux systèmes plans; il suffit donc de considérer le premier problème. Après avoir indiqué le moyen de construire un sixième point quelconque de la conique, on en déduira plusieurs conséquences, parmi lesquelles le théorème de Pascal et, par dualité, le théorème de Brianchon; on montrera ensuite comment la règle établie pour la construction d'un sixième point est applicable à la construction de la tangente en un des points connus de la conique. _ Soient A, B, C, D, E les points donnés et ϖ leur plan. Les points appartenant à une conique, trois quelconques d'entre eux ne sont pas en ligne droite et la conique est déterminée comme le lieu des points d'intersection des rayons homologues des faisceaux projectifs

$$A(C,D,E) \barwedge B(C,D,E).$$

En coupant ces faisceaux par les droites $x \equiv CD$, $y \equiv CE$, on obtient les ponctuelles projectives

$$x(C',D',E') \barwedge y(C'',D'',E'').$$

Mais les points C', C'' sont confondus avec le point C et les deux ponctuelles sont perspectives. Leur centre de perspectivité est le point X où se coupent les droites D'D'', E'E'' ou BD et AE. Une droite quelconque issue du point A rencontre la droite x en un point F'; la droite F'X coupe la droite y en un point F''; la droite BF'' est dans le faisceau B, la droite homologue de la droite AF' du faisceau A et le point d'intersection F de ces droites est un point de la conique.

2° Corollaires.

1) Une conique est déterminée si elle doit passer par cinq points donnés d'un plan lorsque trois quelconques de ces points ne sont pas en ligne droite.

2) Une conique est déterminée si elle doit être tangente à cinq droites données d'un plan, lorsque trois quelconques de ces droites ne sont pas concourantes.

3° Remarques.

1) En numérotant de 1 à 6 les côtés consécutifs de l'hexagone simple AECDBF,

on constate que les côtés, dits opposés, 1 et 4, 2 et 5, 3 et 6 se coupent en trois points X, F'', F' qui sont en ligne droite. Les sommets de l'hexagone pouvant être pris arbitrairement sur la conique, on a :

a) **Théorème de Pascal.** Les côtés opposés d'un hexagone simple inscrit à une conique se coupent en trois points en ligne droite.

2) Réciproquement, si un hexagone simple situé dans un plan n'a pas trois sommets en ligne droite et si les points d'intersection des côtés opposés sont en ligne droite, l'hexagone est inscrit à une conique.

b) **Théorème de Brianchon.** Les droites joignant les sommets opposés d'un hexagone circonscrit à une conique sont concourantes.

3) Réciproquement, si un hexagone simple situé dans un plan n'a pas trois côtés concourants et si les droites joignant les sommets opposés passent par un même point, l'hexagone est circonscrit à une conique.

Il suffit de démontrer la première propriété (2). En employant les notations du 1°, on a la suite de projectivités

$$A(C,D,E,F) \barwedge x(C,D,E',F') \barwedge X(C,D,E',F') \barwedge y(C,D'',E'',F) \barwedge B(C,D,E,F) ;$$

donc

$$A(C,D,E,F) \barwedge B(C,D,E,F)$$

ce qui démontre le théorème.

4° Définitions. - Un hexagone de Pascal est un hexagone simple situé dans un plan et dont les côtés opposés se coupent en trois points en ligne droite ; un hexagone de Brianchon est un hexagone simple situé dans un plan et dont les droites joignant les sommets opposés sont concourantes. Lorsque les sommets impairs d'un hexagone de Pascal sont en ligne droite, il en est de même des sommets pairs (voir le n° 38) et on dit que l'hexagone est inscrit à une conique dégénérée formée des deux droites sur lesquelles sont les sommets de l'hexagone. Lorsque les côtés impairs d'un hexagone de Brianchon sont concourants, il en est de même des côtés pairs (voir le n° 39) et on dit que l'exagone est circonscrit à une conique dégénérée formée des deux points par lesquels passent les côtés de l'hexagone.

5° **Construction de la tangente au point** B (1°, 1). En mettant la droite 6 sur AB, le côté 5 ou BF de l'hexagone simple AECDBF devient la tangente au point B et on en déduit, en outre, que le théorème de Pascal est applicable à l'hexagone ainsi modifié (voir ci-dessous le n° 84, 3°, 1)

6° Remarques. 1) Si les points C, D, E (1°, 1) étaient en ligne droite ou si l'un d'eux, C, par exemple, était sur la droite AB, les faisceaux A, B considérés dans la solution donnée au 1° (1) deviendraient perspectifs, et on dirait que les droites AB, DE forment une conique dégénérée passant par les cinq points A, B, C, D, E.

2) Si les trois points A, C, D étaient en ligne droite, la projectivité $A(C,D,E) \barwedge B(C,D,E)$ serait une projectivité singulière et on considererait les droites AC, BE comme formant une conique dégénérée passant par les cinq points donnés.

3) Quand quatre des cinq points donnés sont sur une droite, celle-ci et toute droite passant par le cinquième point donné forment une conique dégénérée passant par les cinq points.

4) Quand les cinq points sont en ligne droite, celle-ci et elle-même ou toute droite qui la coupe forment une conique dégénérée passant par les cinq points.

5) En appliquant des considérations analogues aux précédentes dans le cas du second problème (1°, 2), on sera conduit à des coniques dégénérées formées de deux points distincts ou confondus et qui sont les figures corrélatives des coniques dégénérées décomposables en droites. Pour tenir compte de cette corrélation, on pourra dire que l'ensemble de deux ponctuelles du premier degré dont les supports sont dans un même plan

ou confondus est une ponctuelle dégénérée du second degré et que l'ensemble de deux faisceaux du premier degré situés dans un même plan ayant des supports distincts ou confondus est un faisceau dégénéré du second degré.

84. 1° Problèmes.

1) Connaissant quatre points d'une conique et la tangente en un de ces points, construire un cinquième point quelconque de la conique et la tangente en un des points donnés, différente de celle donnée.

2) Connaissant quatre tangentes d'une conique et le point de contact de l'une d'elles, construire une cinquième tangente quelconque et le point de contact d'une tangente donnée, différent de celui donné.

Il suffit de résoudre le problème (1). Comme dans le cas précédent (n° 83) on montrera d'abord comment on peut construire un cinquième point quelconque de la conique. A cet effet, on observe que si une conique non dégénérée passe par les points A, B, C, D donnés dans un plan ϖ et est tangente en A à la droite a de ce plan, trois quelconques des quatre points ne sont pas en ligne droite, la droite a ne passe par aucun des points B, C, D et la conique est le lieu des points d'intersection des rayons homologues des faisceaux projectifs

$$A(A,C,D)\,\overline{\wedge}\,B(A,C,D).$$

En coupant ces faisceaux par les droites $x \equiv CD$, $y \equiv AC$, on obtient les ponctuelles projectives

$$x(A',C',D')\,\overline{\wedge}\,y(A'',C'',D'')$$

Les points C', C'' étant confondus avec le point C, les ponctuelles sont perspectives et le centre de perspectivité est le point X où se coupent les droites A'A'', D'D'' ou a et BD. Une droite quelconque issue du point A coupe la droite x au point E'; la droite E'X coupe la droite y en un point E''; la droite BE'' est, dans le faisceau B, la droite homologue de la droite AE' du faisceau A et le point d'intersection E de ces droites est donc un point de la conique.

2° Corollaires.

1) Une conique est déterminée si elle doit passer par quatre points donnés d'un plan, dont trois quelconques ne sont pas en ligne droite, et être tangente en un des points à une droite donnée, cette droite ne passant pas par un des trois autres points.

2) Une conique est déterminée si elle doit être tangente à quatre droites données d'un plan, dont trois quelconques ne sont pas concourantes, et avoir sur une des droites un point de contact donné, ce point n'étant pas sur une des trois autres droites.

N.B. – Les coniques déterminées par ces deux propriétés dégénèrent en couples de ponctuelles ou de faisceaux du premier degré lorsque certaines conditions imposées aux éléments donnés ne sont pas remplies.

3° Remarques. – 1) En numérotant de 1 à 5 les côtés consécutifs du pentagone simple ACDBE et en donnant le numéro 6 à la tangente a, on constate que les droite 1 et 4, 2 et 5, 3 et 6 se coupent en trois points E'', E', X situés en ligne droite. On retrouve ainsi les théorèmes de Pascal et de Brianchon appliqués aux pentagones comme on l'a déjà vu dans le numéro précédent (83, 5°):

a) Quand un pentagone simple est inscrit à une conique et qu'on l'assimile à un hexagone par l'adjonction de la tangente en un des sommets, cette tangente coupe le coté opposé en un point de la droite joignant les points d'intersection des deux autres couples de côtés opposés.

b) Quand un pentagone simple est circonscrit à une conique et qu'on l'assimile à un hexagone par l'adjonction du point de contact d'un des côtés, la droite joignant ce point au sommet opposé passe par le point de rencontre des droites joignant les deux autres couples de sommets opposés.

On tire de là une construction de la tangente en un point quelconque ou du point de contact d'une tangente quelconque d'une conique déterminée par cinq points ou cinq tangentes.

4° Construction de la tangente au point B (1°, 1) En remplaçant la droite quelconque issue du point A par la droite AB, la construction faite au 1°, 1 fournit la tangente b au point B. Cette tangente s'obtient donc en joignant le point B au point E" où la droite AC coupe celle qui joint le point d'intersection X des droites a et BC au point de rencontre E' des droites AB, CD. On obtient ainsi et corrélativement des cas particuliers des théorèmes de Pascal et Brianchon pour les quadrilatères simples inscrits ou circonscrits à une conique :

a) Les tangentes à deux sommets consécutifs d'un quadrilatère simple inscrit à une conique coupent les côtés opposés issus de ces sommets en deux points en ligne droite avec le point d'intersection des deux autres côtés opposés du quadrilatère.

b) Les points de contact de deux côtés consécutifs d'un quadrilatère simple circonscrit à une conique déterminant avec les sommets opposés sur ces côtés deux droites qui se coupent sur la droite joignant les deux autres sommets opposés du quadrilatère.

N.B. Le quadrilatère simple pour la propriété (a) et avec les notations employées dans ce qui précède, est le quadrilatère ABDC.

86. 1° Problèmes.

1) Connaissant trois points d'une conique et les tangentes en deux de ces points, construire un quatrième point quelconque de la conique et la tangente au troisième point donné.

2) Connaissant trois tangentes d'une conique et les points de contact de deux de ces tangentes, construire une quatrième tangente et le point de contact de la troisième tangente donnée.

Il suffit de résoudre le premier problème. On construira d'abord un quatrième point quelconque de la conique. Soient A, B, C, a, b les points donnés et les tangentes données aux points A, B. Si la conique n'est pas une conique dégénérée, les points A, B, C ne sont pas en ligne droite, la tangente a ne passe ni par B ni par C, la tangente b ne passe ni par A ni par C et la conique est déterminée comme le lieu des points d'intersection des rayons homologues des faisceaux projectifs

$$A(A, B, C) \,\pi\, B(A, B, C).$$

En coupant ces faisceaux par les droites $x \equiv BC$, $y \equiv AC$, on obtient les ponctuelles projectives

$$x(A', B', C') \,\pi\, y(A'', B'', C'').$$

Les points C', C" étant confondus avec le point C, les ponctuelles sont perspectives et le centre de perspectivité est le point X où se coupent les droites A', A", B', B" ou a, b. Une droite quelconque menée par le point X rencontre les droites x, y en des points D', D" et les droites AD', AD" se coupent en un point D de la conique.

2° Corollaires.

1) Une conique est déterminée si elle doit passer par les sommets d'un triangle donné et être tangente en deux sommets à des droites données différentes des côtés du triangle.

2) Une conique est déterminée si elle doit être inscrite à un triangle donné et être tangente à deux côtés en des points donnés, différents des sommets du triangle.

3) Quand deux coniques sont tracées dans deux systèmes plans, elles sont des figures homologues dans une projectivité déterminée entre ces systèmes plans dès qu'ayant pris trois points sur l'une d'elles, on se donne les points homologues ou les tangentes homologues de l'autre.

Ainsi, A, B, C et a', b', c' étant trois points quelconques et trois tangentes quelconques des coniques γ, γ' tracées dans les systèmes plans ϖ, ϖ', si D et d' sont le point de rencontre des tangentes en A et B à γ et la droite des points de contact des tangentes a', b' de γ', les deux coniques sont des figures homologues dans la réciprocité établie entre les systèmes plans ϖ, ϖ' par les couples d'éléments homologues A et a', B et b', C et c', D et d'.

3° **Remarques.** 1) En numérotant de 1 à 6 les droites a, AC, CB, b, BD, DA, on constate que les droites 1 et 4, 2 et 5, 3 et 6 se coupent en trois points X, D'', D' qui sont en ligne droite. Il en résulte que, dans le cas des quadrilatères inscrits ou circonscrits à une conique, les théorèmes de Pascal et de Brianchon deviennent aussi (Cfr n° 35, 4°):

a) Quand un quadrilatère simple est inscrit à une conique, les tangentes à deux sommets opposés se coupent en un point de la droite déterminée par les points d'intersection des deux couples de côtés opposés du quadrilatère.

b) Quand un quadrilatère simple est circonscrit à une conique, la droite joignant les points de contact de deux côtés opposés passe par le point de rencontre des droites joignant les sommets opposés du quadrilatère.

2) Ce cas particulier du théorème de Pascal fournit quatre points en ligne droite. En effet, soient ABCD un quadrilatère simple inscrit à la conique γ; E, F les points de rencontre des côtés opposés AB et CD, AD et BC; G, H les points de rencontre des tangentes aux sommets opposés A et C, B et D. En appliquant le théorème, une première fois, aux tangentes A et C, puis, une seconde fois, aux tangentes en B et D, on constate que la droite EF passe par les points G, H.

D'autre part les points A, B, C, D sont également les sommets des quadrilatères simples ACDB, ADBC et chacun de ces quadrilatères fournit encore quatre points en ligne droite; donc,

a) Quand un quadrangle complet est inscrit à une conique, les tangentes aux quatre sommets sont les côtés d'un quadrilatère complet circonscrit à la conique et dont chaque diagonale contient deux des points diagonaux du quadrangle.

b) Quand un quadrilatère complet est circonscrit à une conique, les points de contact des quatre côtés sont les sommets d'un quadrangle complet inscrit à la conique et dont chaque point diagonal est sur deux diagonales du quadrilatère.

4° **Construction de la tangente au point D** (1°, 1). On peut se proposer de mener la droite D'D'' par le point X pour que le point D soit le second point d'intersection de la droite CX avec la conique. A cet effet, on observe que si le point D se meut sur la droite CX, les ponctuelles x (D'), y (D'') restent perspectives, mais leur centre de perspectivité devient le point Y à l'intersection des droites A'B'', AB. On aura donc le point cherché en menant la droite D'D'' par les points X, Y. Il résulte de là que, dans la position actuelle du point D, le point de rencontre Z des droites AB, CX est le conjugué harmonique du point X sur le segment rectiligne CD; les points A, B, X ne dépendant pas de la position du point C sur la conique, la droite AB est le lieu du conjugué harmonique Z du point X sur la corde CD quand cette corde tourne autour du point X. Le point Y est le conjugué harmonique du point X par rapport aux deux points où la droite XY coupe la conique, et, comme le point Y est déjà le conjugué harmonique du point Z sur la corde AB, en vertu des propriétés harmoniques du quadrilatère complet, on en déduit que la droite XZ ou CD est le lieu des conjugués harmoniques du point Y sur les cordes de la conique qui passent par ce point et que les tangentes à la conique aux points C, D se coupent donc au point Y, ce qui donne le moyen de construire la tangente au point C. En ne considérant que les points A, B, C et les tangentes en ces points, on obtient le cas particulier du théorème de Pascal relatif au triangle inscrit. Les tangentes aux sommets d'un triangle inscrit à une conique coupent les côtés opposés en trois points en ligne droite; d'où, par corrélation, on a le cas particulier du théorème de Brianchon relatif au triangle circonscrit: Les droites joignant les sommets d'un triangle circonscrit aux points de contact

des côtés opposés avec une conique inscrite au triangle sont concourantes.

Corollaire. Si les points A, B, C sont des points propres et réels non situés en ligne droite, il existe une parabole tangente aux droites AB, AC aux points B, C et la direction asymptotique de cette parabole est la médiane AD du triangle ABC.

D. Théorème de Carnot.-

86. 1° Si les sommets du triangle ABC sont des points propres et réels, et si une conique réelle γ coupe les droites BC, CA, AB aux points réels A' et A", B' et B", C' et C", on a

$$(1) \qquad \frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{BA''}{A''C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{CB''}{B''A}\cdot\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{AC''}{C''B}=+1.$$

L'hexagone A'A"B'B"C'C" étant inscrit à la conique γ, les droites B"C', C"A', A"B' coupent les droites BC, CA, AB en des points A_1, B_1, C_1 qui sont en ligne droite. On a donc

$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}\cdot\frac{AC''}{C''B}=-1, \qquad \frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA''}{A''C}=-1, \qquad \frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB''}{B''A}=-1$$

et

$$\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}\cdot\frac{AC_1}{C_1B}=-1.$$

Il suffit de diviser le produit des trois premières relations par la quatrième pour obtenir la formule (1).

2° Si six points réels A' et A", B' et B", C' et C" situés sur les côtés d'un triangle ABC dont les sommets sont des points propres et réels sont tels que la formule (1) soit vérifiée et si trois quelconques d'entre eux ne sont pas en ligne droite, les six points sont sur une conique réelle.

Les cinq points A', A", B', B", C' déterminent une conique réelle qui recoupe la droite AB en un point C_0 pour lequel on a

$$\frac{AC_0}{C_0B}=\frac{AC''}{C''B}$$

et qui coïncide donc avec le point C".

N.B.- Si trois des six points considérés étaient en ligne droite, il en serait de même des trois autres et les six points seraient sur une conique dégénérée.

3° **Corollaires.** 1) Lorsque les droites AA', BB', CC' sont concourantes, il résulte immédiatement de la formule (1) qu'il en est de même des droites AA", BB", CC" et les théorèmes précédents conduisent ainsi à des conséquences que des projectivités entre systèmes plans permettent d'étendre à des figures dont les éléments sont quelconques, propres ou impropres, réels ou imaginaires. Donc,

a) Si la conique γ coupe les côtés du triangle ABC aux points A' et A", B' et B", C' et C" et si les droites AA', BB', CC' sont concourantes, il en est de même des droites AA", BB", CC".

b) Si a' et a", b' et b", c' et c" sont les tangentes menées à la conique γ par les sommets du triangle abc et si les points aa', bb', cc' sont en ligne droite, il en est de même des points aa", bb", cc".

c) Si les droites AA', BB', CC' issues des sommets du triangle ABC sont concourantes ainsi que les droites AA", BB", CC" les six points A', A", B', B", C', C" où les six droites coupent les côtés du triangle sont sur une conique.

d) Si les points aa', bb', cc' des côtés du triangle abc sont en ligne droite ainsi que les points aa", bb", cc", les six droites a', a", b', b", c', c" issues des sommets du triangle sont tangentes à une conique.

2) Si la conique γ considérée dans le théorème de Carnot (1°) est inscrite au triangle ABC, les points A", B", C" se confondent avec les points A', B', C'; ceux-ci ne pouvant être en ligne droite, puisque la conique γ n'est pas une conique dégénérée, il résulte de la formule (1) qu'on a

$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=+1,$$

et les droites AA', BB', CC' sont concourantes. On retrouve ainsi un cas particulier du théorème de Brianchon relatif à un triangle circonscrit à une conique; des projectivités convenables entre systèmes plans permettent d'étendre le théorème à une figure dont les éléments sont quelconques et d'en déduire le théorème de Pascal pour le triangle inscrit à une conique.

E. Théorème de Poncelet.

87. 1° Lemmes.

1) Quand deux triangles sont inscrits à une conique, ils sont circonscrits à une seconde conique.

2) Quand deux triangles sont circonscrits à une conique, ils sont inscrit à une seconde conique.

Il suffit de démontrer la première partie. Soient ABC, DEF deux triangles inscrits à la conique γ. En coupant les faisceaux projectifs

$$A(B,C,E,F)\ \overline{\wedge}\ D(B,C,E,F)$$

par les droites EF, BC, on a les ponctuelles projectives et non perspectives

$$EF(B',C',E,F)\ \overline{\wedge}\ BC(B,C,E',F').$$

Les droites EF, BC, BB' ou AB, CC' ou AC, EE' ou DE, FF' ou DF sont donc tangentes à une conique.

2° **Théorème.** Quand deux coniques sont telles qu'un triangle inscrit à l'une soit circonscrit à l'autre, il y a une infinité de pareils triangles.

Soient ABC un triangle inscrit à la conique γ et circonscrit à une seconde conique γ'; D, E les points où une tangente quelconque à la conique γ' coupe la conique γ; F le point d'intersection des secondes tangentes menées des points D, E à la conique γ'. Les triangles ABC, DEF étant circonscrits à la conique γ', doivent être inscrits à une autre conique; mais cette autre conique a cinq points A, B, C, D, E en commun avec la conique γ avec laquelle elle coïncide donc, ce qui démontre le théorème.

F.– Faisceaux de coniques; Théorèmes de Desargues et de Sturm.–

88. Faisceau ponctuel de coniques circonscrites à un quadrangle et faisceau tangentiel de coniques inscrites à un quadrilatère.– 1° Définitions.

1) En vertu de définitions déjà admises dans ce qui précède, l'ensemble de deux ponctuelles du premier degré dont les supports sont des droites distinctes a, b situées dans un même plan ϖ, est une ponctuelle dégénérée du second degré qu'on désigne aussi sous le nom de conique dégénerée, la conique (a, b). Le point ab commun aux ponctuelles a, b est appelé le point double de la conique (a, b) dont les autres points sont dits simples. Par définition, toute droite, différente des droites a, b, menée dans le plan ϖ par le point double coupe la conique (a, b) en deux points confondus avec le point double et est considérée comme une tangente en ce point; tout point simple a pour tangente celle des droites a, b sur laquelle il se trouve.

2) En vertu de définitions déjà admises dans ce qui précède, l'ensemble de deux faisceaux du premier degré situés dans un même plan ϖ et ayant des supports différents A, B, est un faisceau dégénéré du second degré qu'on désigne aussi sous le nom de conique dégénérée, la conique (A, B). La droite AB commune aux faisceaux A, B est appelée la tangente double de la conique (A, B) dont les autres rayons des faisceaux A, B sont les tangentes simples. Par définition, tout point, différent des points A, B de la tangente double est sur deux tangentes confondues avec la tangente double et est considéré comme un point de contact de cette tangente; toute tangente simple a pour point de contact celui des points A, B par lequel elle passe.

3) Les points et les tangentes d'une conique non dégénérée sont appelés des points simples et des tangentes simples.

4) On dit que l'ensemble des coniques circonscrites à un quadrangle est un faisceau ponctuel de coniques et qu'il a pour supports les sommets du quadrangle ; il contient trois coniques dégénérées dont chacune est formée de deux côtés opposés du quadrangle et a pour point double un des points diagonaux du quadrangle.

5) On dit que l'ensemble des coniques inscrites à un quadrilatère est un faisceau tangentiel de coniques et qu'il a pour supports les côtés du quadrilatère, il contient trois coniques dégénérées dont chacune est formée de deux sommets opposés du quadrilatère et a pour tangente double une des diagonales du quadrilatère.

2° Théorèmes.

1) Dans tout faisceau ponctuel de coniques circonscrites à un quadrangle, les faisceaux des tangentes aux sommets du quadrangle sont projectifs aux ponctuelles des points où les coniques recoupent les droites issues des sommets du quadrangle et différentes des côtés de celui-ci.

2) Dans tout faisceau de coniques inscrites à un quadrilatère, les ponctuelles des points de contact sur les côtés du quadrilatère sont projectives aux faisceaux des secondes tangentes issues des points situés sur les côtés du quadrilatère et différents des sommets de celui-ci.

Il suffit de démontrer le théorème (1). Soient A, B, C, D les sommets du quadrangle auquel sont circonscrites les coniques d'un faisceau ponctuel (le faisceau ABCD). Les coniques dégénérées $\gamma_1 \equiv (AB, CD)$, $\gamma_2 \equiv (AC, BD)$, $\gamma_3 \equiv (AD, BC)$ recoupent une droite u issue du point A aux points $E_1 \equiv (u, CD)$, $E_2 \equiv (u, BD)$, $E_3 \equiv (u, BC)$ et leurs tangentes au point B sont les droites $b_1 \equiv BA$, $b_2 \equiv BD$, $b_3 \equiv BC$. Soient E, b le point où une conique non dégénérée γ du faisceau recoupe la droite u et la tangente à cette conique au point B. Il résulte du théorème de Pascal appliqué au pentagone simple ABDCE auquel on adjoint la tangente b au sommet B, que les points $F \equiv (AB, DC)$, $G \equiv (b, CE)$, $E_2 \equiv (BD, EA)$ sont sur une droite m. Lorsque la conique γ varie, la droite $x \equiv EG$ tourne autour du point C et les points E, G décrivent des ponctuelles projectives sur les droites fixes u, m ; mais la ponctuelle m (G) est perspective au faisceau B(b), celui-ci est donc projectif à la ponctuelle u (E), ce qui démontre le théorème.

N.B. 1_ On aurait pu observer qu'en appelant H le point (m, BC), on a la suite des projectivités

$$B(b_1, b_2, b_3, b)\ \pi\ m(F, E_2, H, G)\ \pi\ C(F, E_2, H, G)\ \pi\ u(E_1, E_2, E_3, E)$$

ce qui prouve que le théorème est applicable aux coniques dégénérées du faisceau considéré.

N.B. 2._ A toute position de la droite $x \equiv EG$ menée par le point C correspondent un point E de la ponctuelle u, une droite b du faisceau B et une conique γ du faisceau ABCD. Par définition, la valeur commune des rapports anharmoniques de quatre positions du point E et des positions homologues de la droite b est la valeur du rapport anharmonique des quatre coniques correspondantes γ. De plus, si on adopte des éléments homologues comme éléments fondamentaux des coordonnées binaires sur la ponctuelle u et dans le faisceau B, on dit que les coordonnées binaires d'une conique γ du faisceau ABCD sont celles du point E ou de la droite b qui lui correspondent sur la ponctuelle u ou dans le faisceau B. Si on donne le nom de coniques fondamentales à celles qui passent par les points fondamentaux de la ponctuelle u et qui sont tangentes aux rayons fondamentaux du faisceau B, le quotient des coordonnées binaires de la conique γ est donc égal au rapport anharmonique du groupe formé par les trois coniques fondamentales et la conique γ.

N.B.3._ Lorsque la droite $x \equiv EG$ passe par A, le point E est confondu avec le point A, le point G devient le point $G' \equiv (m, CA)$, la droite b devient la droite BG'. Parmi les coniques du faisceau ABCD, il y en a donc une qui est tangente en A et B aux droites u et BG' qui rencontrent BD et AC en des points en ligne droite avec

le point F (Cfr. n°85, 4°, a).

N. B. 4 – Les considérations précédentes s'étendent par corrélation au faisceau tangentiel des coniques inscrites à un quadrilatère et il en résulte que les faisceaux ponctuel et tangentiel des coniques circonscrites à un quadrangle ou inscrites à un quadrilatère doivent être considérés comme des formes de première espèce.

3) Etant donné un faisceau ponctuel de coniques circonscrites à un quadrangle, les faisceaux des tangentes aux sommets du quadrangle sont deux à deux perspectifs et les axes de perspectivité sont les côtés du triangle des points diagonaux du quadrangle.

4) Etant donné un faisceau tangentiel de coniques inscrites à un quadrilatère, les ponctuelles des points de contact sur les côtés du quadrilatère sont deux à deux perspectives et les centres de perspectivité sont les sommets du triangle des diagonales du quadrilatère.

Ces propriétés sont des conséquences immédiates des cas particuliers des théorèmes de Pascal et de Brianchon relatifs aux quadrangles et aux quadrilatères complets inscrits ou circonscrits à une conique (85, 3°, 1) et on constate en outre qu'elles sont applicables aux coniques dégénérées des faisceaux considérés.

5) Les ponctuelles décrites par les points où les coniques circonscrites à un quadrangle recoupent deux droites issues de deux sommets de celui-ci et différentes des côtés, sont perspectives et le centre de perspectivité est sur le côté joignant les deux autres sommets du quadrangle.

6) Les faisceaux engendrés par les secondes tangentes menées aux coniques inscrites à un quadrilatère de deux points pris sur deux côtés de celui-ci et différents des sommets, sont perspectifs et l'axe de perspectivité passe par le sommet commun aux deux autres côtés du quadrilatère.

Il suffit de démontrer le théorème (5). Soient E, K les points où une conique quelconque γ du faisceau ABCD recoupe deux droites u, v issues des points A, B. Les ponctuelles projectives $u(E)$, $v(K)$ sont perspectives parce que le point $L \equiv uv$ détermine une conique du faisceau ABCD et est donc un point double des deux ponctuelles. Lorsque ce point L n'est pas situé sur la droite CD, celle-ci est la position E_1K_1 de la droite EK correspondant à la conique dégénérée $\gamma_1 \equiv (AB, CD)$ et elle contient donc le centre de perspectivité des ponctuelles $u(E)$, $v(K)$. Lorsque le point L est sur CD, les droites E_2K_3, E_3K_2 correspondant aux coniques dégénérées $\gamma_2 \equiv (AC, BD)$, $\gamma_3 \equiv (AD, BC)$, se coupent au conjugué harmonique M du point (AB, CD) par rapport aux points A, B ; la droite CD passe par les conjugués harmoniques du point M par rapport aux points E_2 et K_3, E_3 et K_2 ; les droites E_2K_2, E_3K_3 se coupent donc sur la droite CD, ce qui achève la démonstration du théorème.

N.B. 1. – Si on recoupe les coniques circonscrites au quadrangle ABCD par deux droites u, u' issues du même sommet A, les ponctuelles projectives $u(E)$, $u'(E')$ ne sont pas perspectives et la droite EE' enveloppe une conique inscrite au triangle BCD et tangente aux droites u, u'.

N.B. 2. – Par corrélation, si on mène les secondes tangentes aux coniques inscrites au quadrilatère abcd de deux points V, V' d'un même côté a, les faisceaux projectifs $V(e)$, $V'(e')$ ne sont pas perspectifs et le lieu du point ee' est une conique circonscrite au triangle bcd et passant par les points V, V'.

N.B. 3. – Les tangentes aux coniques circonscrites à un quadrangle aux points où les coniques recoupent une droite issue d'un sommet du quadrangle, enveloppent une conique inscrite au triangle des trois autres sommets et tangente à la droite considérée. Pour le

démontrer, il suffit d'appliquer le théorème de Pascal au pentagone ABCDE auquel on adjoint la tangente en E à la conique γ (voir 2°, 1) ; on trouve ainsi que celle-ci trace des ponctuelles projectives et non perspectives sur les droites u et BC.

N.B. 4. – Par corrélation le lieu des points de contact des tangentes menées aux coniques inscrites à un quadrilatère d'un point situé sur un des côtés du quadrilatère est une conique passant par le point considéré et circonscrite au triangle des trois autres côtés.

3° Théorèmes de Desargues et de Sturm.

1) Les coniques circonscrites à un quadrangle coupent une droite quelconque de leur plan en des couples de points qui sont en involution.

2) Les tangentes menées d'un point quelconque de leur plan aux coniques inscrites à un quadrilatère sont des couples de droites en involution.

Il suffit de démontrer le théorème (1) dont le théorème (2) peut se déduire par une réciprocité entre systèmes plans. D'autre part, le théorème (1) n'a de sens que si la droite dont on considère les points de rencontre avec les coniques circonscrites à un quadrangle, ne passe pas par un des sommets de celui-ci. Considérons le faisceau ponctuel des coniques circonscrites au quadrangle ABCD; soient X et X', Y et Y', Z et Z' les points où une droite quelconque d est rencontrée par une conique quelconque γ du faisceau et par les coniques dégénérées (AB, CD), (AD, BC). La conique γ donne

$$A(B,D,X,X') \barwedge C(B,D,X,X')$$

et on en déduit

$$d(Y,Z,X,X') \barwedge d(Z',Y',X,X').$$

on a donc aussi

$$d(Y,Z,X,X') \barwedge d(Y',Z',X',X)$$

et lorsque la conique γ engendre le faisceau ponctuel ABCD, elle coupe la droite d en des couples de points X, X' conjugués dans l'involution déterminée par les deux couples de points conjugués Y et Y', Z et Z'; le théorème est donc démontré et on voit en outre qu'il est applicable aux coniques dégénérées du faisceau.

4° Corollaires.

1) Parmi les coniques qui sont circonscrites à un quadrangle, il y en a deux qui sont tangentes à une droite tracée arbitrairement dans le plan du quadrangle ; ces deux coniques se confondent lorsque la droite passe par un sommet du quadrangle.

2) Parmi les coniques qui sont inscrites à un quadrilatère, il y en a deux qui passent par un point pris arbitrairement dans le plan du quadrilatère ; ces deux coniques se confondent lorsque le point donné est sur un côté du quadrilatère.

5° Théorèmes. –

1) L'involution des couples de points d'intersection d'une droite quelconque et des coniques circonscrites à un quadrangle est projective aux faisceau des tangentes aux sommets du quadrangle et aux ponctuelles des points où les coniques recoupent les droites issues des sommets du quadrangle.

2) L'involution des couples de tangentes menées d'un point quelconque aux coniques inscrites à un quadrilatère est projective aux ponctuelles des points de contact sur les côtés du quadrilatère et aux faisceaux des secondes tangentes issues des points situés sur les côtés du quadrilatère.

Il suffit de démontrer le théorème (1). On considère l'involution des couples de points d'intersection d'une droite d et des coniques circonscrites au quadrangle ABCD. Soient E, X, X' le point où

la droite d coupe le côté AB du quadrangle et ceux où elle coupe une quelconque γ des coniques circonscrites au quadrangle; F le conjugué harmonique de E sur AB; G le point de rencontre des tangentes en A et B; H, K les points diagonaux (AC, BD), (AD, BC) du quadrangle; X" le point de rencontre des droites d et FG. Lorsque la conique γ varie en restant circonscrite au quadrangle ABCD, le point F reste fixe, le point G parcourt la droite HK et on a la suite de perspectivités entre formes du premier degré.

$$(1) \qquad A(AG) \overline{\wedge} HK(G) \overline{\wedge} F(FG \text{ ou } FX'') \overline{\wedge} d(X'').$$

D'autre part, la droite AB est le lieu des conjugués harmoniques du point G par rapport aux couples de points où les droites issues de ce point G coupent la conique γ; les points F, G sont les conjugués harmoniques du point E par rapport aux couples de points où les droites EF, EG sont rencontrées par la conique γ et tout point, tel X", de la droite FG est le conjugué harmonique du point E par rapport aux points X, X' où la conique γ coupe la droite EX" ou d. Donc, en vertu des relations (1), la propriété résulte de ce que, le point E étant fixe sur la droite d, la ponctuelle engendrée par le point X" sur cette droite est projective à l'involution formée sur cette droite par les couples de points X, X'.

6° **Remarque.** On peut établir une collinéation ou une réciprocité entre systèmes plans contenant un faisceau de coniques passant par quatre points ou tangentes à quatre droites et un système plan propre et réel pour que les coniques correspondent à des circonférences passant par deux points propres et réels. On déduit de là une seconde démonstration de toutes les propriétés précédentes parmi lesquelles celles des N.B 1 et 2 à la fin du 2° se déduisent de: *La droite qui joint les points où une circonférence quelconque passant par les points fixes A, B recoupe deux droites issues du point A enveloppe une parabole.*

89. Faisceau ponctuel des coniques circonscrites à un triangle et tangentes à une droite donnée en un des sommets du triangle; Faisceau tangentiel des coniques inscrites à un triangle et tangentes en un point donné à un des côtés du triangle.

1° **Préliminaires.** 1) Les coniques du faisceau ponctuel sont circonscrites au triangle ABC et tangentes au sommet A à une droite donnée a située dans le plan du triangle et différente des côtés AB, AC. Ce faisceau contient deux coniques dégénérées formées respectivement des droites a et BC, AB et AC.

2) Les coniques du faisceau tangentiel sont inscrites au triangle abc et tangentes au côté a en un point A différent des sommets ab, ac. Ce faisceau contient deux coniques dégénérées formées respectivement des points A et bc, ab et ac.

3) Les deux faisceaux peuvent être considérés comme des cas de dégénérescence ou des cas limites de ceux étudiés dans le numéro précédent. Les coniques du faisceau ponctuel sont ce que deviennent les coniques circonscrites à un quadrangle ABCD dont le sommet D glisse sur la droite a et finit par se confondre avec le point A. Les coniques du faisceau tangentiel sont ce que deviennent les coniques inscrites à un quadrilatère abcd dont le côté d tourne autour du point A et finit par se confondre avec la droite a.

2° **Théorèmes.**

1) Dans le faisceau ponctuel des coniques circonscrites au triangle ABC et tangentes au sommet A à la droite a, les faisceaux des tangentes aux sommets B, C sont projectifs aux ponctuelles décrites

2) Dans le faisceau tangentiel des coniques inscrites au triangle abc et tangentes au côté a au point A, les ponctuelles des points de contact sur les côtés b, c sont projectives au faisceau

par les points où les coniques recoupent les droites issues des sommets du triangle et différentes des côtés de celui-ci

des secondes tangentes issues des points situés sur les côtés du triangle et différents des sommets de celui-ci.

Il suffit de démontrer le théorème (1). Soient γ une conique quelconque du faisceau considéré; E un point quelconque de cette conique et b la tangente en B; u et v les droites AE, CE; F, G, H les points d'intersection des droites a et BC, AB et v ou CE, b et u ou AE. Les droites a, b étant tangentes à la conique γ aux sommets consécutifs A, B du quadrilatère simple ABCE inscrit à la conique, les points F, G, H sont en ligne droite. Lorsque la conique γ varie, le point F ne change pas et suivant celle des droites u, v, qui reste fixe, on a les suites de perspectivités entre formes du premier degré

$$(1) \qquad B(b) \overline{\wedge} u(H) \overline{\wedge} F(H \text{ ou } G) \overline{\wedge} AB(G) \overline{\wedge} C(v) \overline{\wedge} u(E)$$

ou

$$(2) \qquad B(b) \overline{\wedge} FG(H) \overline{\wedge} A(u) \overline{\wedge} v(E),$$

ce qui démontre le théorème.

N.B. 1. On constate facilement que la propriété s'applique aux coniques dégénérées du faisceau.

N.B. 2. A toute position du point E sur celle des droites u ou v qui est fixe, correspond une droite b du faisceau de support B et une conique γ passant par les points A, B, C, E et tangentes aux droites a, b aux points A et B. Par définition, la valeur commune de quatre positions du point E et des positions homologues de la droite b est la valeur du rapport anharmonique des quatre coniques correspondantes du faisceau. De plus, si on adopte des éléments homologues comme éléments fondamentaux des coordonnées binaires sur la ponctuelle u ou v et dans le faisceau B, on dit que les coordonnées binaires d'une conique γ sont celles du point E ou de la droite b qui lui correspondent sur la ponctuelle u ou v et dans le faisceau B. Si on donne le nom de coniques fondamentales à celles qui passent par les points fondamentaux de la ponctuelle u ou v et sont tangentes aux droites fondamentales du faisceau B, le quotient des coordonnées binaires de la conique γ est donc égal au rapport anharmonique du groupe formé par les trois coniques fondamentales et la conique γ

N.B. 3. Les considérations précédentes s'étendent par corrélation au faisceau tangentiel des coniques inscrites au triangle abc et tangentes au côté a en un point donné A, et il en résulte que les deux faisceaux de coniques étudiés dans ce numéro doivent encore être considérés comme des formes de première espèce.

3) Dans le faisceau ponctuel des coniques circonscrites au triangle ABC et tangentes au sommet A à la droite a, les faisceaux des tangentes aux points B, C sont perspectifs et l'axe de perspectivité est la droite conjuguée harmonique de la droite a par rapport aux droites AB, AC.

4) Dans le faisceau tangentiel des coniques inscrites au triangle abc et tangentes au côté a au point A, les ponctuelles des points de contact avec les droites b, c sont perspectives et le centre de perspectivité est le conjugué harmonique du point A par rapport aux points ab, ac.

Il suffit de démontrer le théorème (3). Soit γ une des coniques du faisceau. Les tangentes a, b, c à cette conique coupent les côtés BC, CA, AB du triangle ABC en trois points F, K, L qui sont en ligne droite. Si M est le point de rencontre, des tangentes b, c les droites AM, BC, KL sont les diagonales du quadrilatère complet ayant pour côtés les droites AB, AC, b, c. La droite AM passe donc par le conjugué harmonique N de F sur BC et est la droite conjuguée harmonique de AF ou a dans l'angle BAC.

5) Les ponctuelles décrites par les points où les coniques circonscrites au triangle ABC et tan-

6) Les faisceaux décrits par les secondes tangentes menées aux coniques inscrites au triangle

gentes au sommet A à la droite a recoupent deux droites issues des sommets B et C, A et B ou A et C sont perspectives et le centre de perspectivité est sur la droite a, sur la droite AC ou sur la droite AB.-

abc et tangentes au coté a au point A de deux points situés sur b et c, a et b ou a et c, sont perspectifs et l'axe de perspectivité passe par le point A, par le point ac ou par le point ab.

Il suffit de démontrer le théorème (5) a) Soient X, Y les points où les droites x, y issues des points B, C recoupent une quelconque γ des coniques considérées ; en appliquant le théorème de Pascal au pentagone ABXYC auquel on adjoint la tangente a en A, on trouve que celle-ci coupe la droite XY au même point E que la droite déterminée par les points F ≡ (AB, CY), G ≡ (BX, CA); les droites a, FG étant fixes, il en est de même du point E.- b) Soient X, Z les points où les droites x, z issues des points B et A recoupent une quelconque γ des coniques considérées ; en appliquant le théorème de Pascal au pentagone AZXBC auquel on adjoint la tangente a, on trouve que les droites XZ, AC se coupent au point H de la droite déterminée par les points K ≡ (AZ, BC), L ≡ (a, BX); les droites AC, KL étant fixes, il en de même du point H

N.B. 1.- Soient Z' le point où la conique γ recoupe une seconde droite z' issue de A et H' le point d'intersection des droites AC, XZ'. Lorsque la conique γ varie, les droites XZ, XZ' tournent autour des points H, H'; le point X glisse sur la droite x; les points Z, Z' engendrent des ponctuelles projectives sur les droites z, z' et ces ponctuelles sont perspectives car elles ont le point A pour point double ; on s'en assure en constatant que le point X est sur AC lorsque la conique γ est la conique dégénérée (AB, AC). D'autre part, la droite BC est la position de la droite ZZ' lorsque la conique γ devient la conique dégénérée (a, BC). Les coniques circonscrites au triangle ABC et tangentes en A à la droite a déterminent donc des ponctuelles perspectives sur deux droites quelconques issues du point A et le centre de perspectivité de ces ponctuelles est sur BC.

N.B. 2.- Par corrélation, les secondes tangentes menées de deux points de la droite a aux coniques inscrites au triangle abc et tangentes au côté a en un point A engendrent des faisceaux perspectifs dont l'axe de perspectivité passe par le point bc.

N.B. 3- Si les droites z, z' coïncident (N.B. 1), la droite ZZ' est tangente à la conique γ au point Z et lorsque cette conique varie, la tangente en Z tourne autour d'un point fixe de BC. Mais cette propriété peut se démontrer directement en prouvant d'abord que les tangentes aux points B et C coupent les droites CZ, BZ en des points homologues de deux ponctuelles perspectives dont les supports passent par le point A. On trouve ensuite que le centre de perspectivité de ces ponctuelles est sur la droite BC le point fixe de la tangente en Z.

N.B. 4.- Par corrélation, les points de contact des secondes tangentes menées d'un point de la droite a aux coniques inscrites au triangle abc et tangentes à la droite a au point A sont sur une droite qui passe par le point bc.

N.B. 5.- Si X, X' sont les points où la conique γ (N.B. 1) recoupent deux droites fixes issues du point B, la droite XX' et la tangente en X enveloppent des coniques tangentes aux droites a et AC.

N.B. 6.- Par corrélation, les lieux des points d'intersection et des points de contact des secondes tangentes menées de deux points de la droite b aux coniques inscrites au triangle abc et tangentes à la droite a au point A sont des coniques passant par les points A et ac.

3° Théorèmes de Desargues et de Sturm. Ces théorèmes sont applicables aux faisceaux de coniques considérés dans ce numéro. Soient X et X', Y et Y', Z et Z' les points où une droite quelconque d coupe une conique non dégénérée γ et les coniques dégénérées (BC, a), (AB, AC) du faisceau ponctuel. On a, à la fois,

$$A(A,C,X,X') \,\overline{\wedge}\, d(Y',Z',X,X'),\ B(A,C,X,X') \,\overline{\wedge}\, d(Z,Y,X,X'),\ A(A,C,X,X') \,\overline{\wedge}\, B(A,C,X,X').$$

on en tire
$$d(Y',Z',X,X') \,\overline{\wedge}\, d(Z,Y,X,X')$$
et le théorème résulte de ce qu'on a aussi
$$d(Y',Z',X,X') \,\overline{\wedge}\, d(Y,Z,X',X).$$

4° Théorèmes.

1) L'involution des couples de points d'intersection d'une droite quelconque et des coniques circonscrites au triangle ABC et tangentes au point A à la droite a est projectif aux faisceaux des tangentes aux points B,C et aux ponctuelles des points où les coniques recoupent les droites issues des sommets du triangle ABC.

2) L'involution des couples de tangentes menées d'un point quelconque aux coniques inscrites au triangle a b c et tangentes au côté a au point A est projective aux ponctuelles des points de contact sur les droites b, c et aux faisceaux des secondes tangentes issues des points des côtés du triangle abc.

Il suffit de démontrer le théorème (1). Soient X, X', E les points où une droite donnée arbitrairement d coupe la conique γ du faisceau et la droite AB; F le conjugué harmonique de E par rapport aux points A, B; G le point où la tangente en B à γ coupe la tangente donnée a relative au point A; X'' le point d'intersection des droites d et FG. Lorsque la conique γ varie en restant circonscrite au triangle ABC et tangente à la droite a au point A, on a la suite de formes perspectives du premier degré,
$$B(G) \,\overline{\wedge}\, a(G) \,\overline{\wedge}\, F(G \text{ ou } X'') \,\overline{\wedge}\, d(X''),$$
et la propriété résulte de ce que le point X'' est le conjugué harmonique du point fixe E de la droite d par rapport aux points X, X' (voir le numéro 88, 5°).

5° Remarque. On peut établir une collinéation ou une réciprocité entre deux systèmes plans pour que les faisceaux de coniques considérées dans ce numéro, se transforment en un faisceau de circonférences tangentes à une droite donnée en un point donné, ce qui fournit une autre démonstration des propriétés précédentes.

90. Faisceau ponctuel et tangentiel des coniques tangentes à deux droites données en des points donnés.

1° Préliminaires. 1) On dit que l'ensemble des coniques tangentes à deux droites données en des points donnés est un faisceau à la fois ponctuel et tangentiel. Si a et b, A et B sont les droites et les points donnés, le faisceau considéré comme faisceau ponctuel contient deux coniques dégénérées, la conique formée des droites distinctes a, b et celle formée de deux droites confondues avec la droite c ≡ AB joignant les points A, B; considéré comme faisceau tangentiel, il contient également deux coniques dégénérées, la conique formée des points distincts A, B et celle formée de deux points confondus avec le point C ≡ ab où se coupent les droites a, b.

2) On peut dire que le faisceau ponctuel des coniques tangentes aux droites a, b aux points A, B est le cas limite ou de dégénérescence du faisceau ponctuel des coniques circonscrites à un triangle ABC et tangentes au point A à la droite a, si on imagine que le point C, situé sur la droite b, se rapproche indéfiniment du point B et finit par se confondre avec celui-ci. D'une manière analogue, le faisceau considéré comme un faisceau tangentiel est le cas limite ou de dégénérescence du faisceau tangentiel des coniques inscrites à un triangle abc et tangentes à la droite a au point A, si la droite c qui passe par le point B tourne autour de ce point et vient se confondre avec la droite b.

3) Les points d'une conique dégénérée en deux droites confondues sont appelés des points doubles; on dit que toute droite qui passe par l'un d'eux y coupe la conique en deux points confondus et y est tan=

gente à la conique. Par corrélation, si une conique dégénère en deux faisceaux confondus chaque rayon de ces faisceaux est appelé une tangente double et on dit qu'il est formé de deux tangentes confondues issues de n'importe lequel de ses points qui est considéré comme un point de contact.

2° Théorèmes 1) *Dans le faisceau ponctuel et tangentiel des coniques tangentes aux points A, B aux droites a, b les points de contact des secondes tangentes menées aux coniques du faisceau d'un même point de la droite a ou de la droite b sont sur une même droite passant par le point B ou le point A et réciproquement.*

Soit E le point de contact de la seconde tangente d menée d'un point D de la droite b à une conique quelconque γ du faisceau considéré. Les points F, G, H où les tangentes d, a, b, à la conique γ aux sommets E, A, B du triangle EAB coupent les côtés opposés AB, BE, EA étant en ligne droite, les droites BD, FE, AG sont les diagonales du quadrilatère complet ayant pour côtés des droites ABF, FGH, AEH, BEG. La droite AE est la droite conjuguée harmonique de la droite AB par rapport aux droites AD, $a \equiv AC$ et le point D est le conjugué harmonique du point $C \equiv ab$ par rapport aux points B et $H \equiv (b, AE)$. Dès lors, si le point D est fixe, il en est de même de la droite AE et réciproquement.

N.B. 1. – A toute position du point E sur la droite AE correspond, dans le faisceau des coniques, une conique γ qui passe par ce point et y est tangente à la droite DE du faisceau D. Lorsque le point E est confondu avec le point H ou avec le point A, la droite DE devient la droite $DH \equiv b$ ou la droite DA et la conique γ est l'une des coniques dégénérées (a, b), (AB, AB) auxquelles le théorème est donc applicable.

N.B. 2. – Le rapport anharmonique de quatre positions quelconques du point E sur la droite AE et le rapport anharmonique égal des quatre positions correspondantes de la droite DE dans le faisceau D sont, par définition, le rapport anharmonique des quatre coniques γ passant par les quatre points ou tangentes aux quatre droites. De plus, si on adopte des couples d'éléments homologues comme éléments fondamentaux des coordonnées binaires sur la ponctuelle AE et dans le faisceau D, les coordonnées binaires égales d'un point E et de la droite DE passant par ce point sont les coordonnées binaires de la conique γ correspondante. On donne le nom de coniques fondamentales à celles qui passent par les points fondamentaux et sont tangentes aux droites fondamentales de la ponctuelle et du faisceau; de cette manière, le quotient des coordonnées binaires d'une conique quelconque γ du faisceau est la valeur du rapport anharmonique du groupe formé par les trois coniques fondamentales et la conique γ. On déduit de l'ensemble de ces considérations que le faisceau à la fois ponctuel et tangentiel des coniques tangentes à deux droites en des points donnés doit également être considéré comme une forme de première espèce.

2) *Dans le faisceau ponctuel et tangentiel des coniques tangentes aux droites a, b aux points A, B les faisceaux des secondes tangentes issues des points des droites a, b sont projectifs aux ponctuelles des seconds points d'intersection des coniques du faisceau et des droites issues des points A, B.*

En vertu du théorème précédent, il suffit de démontrer le théorème pour deux ponctuelles situées sur des droites x, y issues des points A, B. Soient X, Y les points où ces deux droites recoupent une conique quelconque γ du faisceau. Il résulte du théorème de Pascal appliqué au quadrilatère simple AXBY et aux tangentes a, b que les points $C \equiv ab$, $D \equiv (x, y)$, $Z \equiv (AY, BX)$ sont sur une même droite m. Si la conique γ varie et si les droites x, y ne changent pas, les points C, D sont fixes il en est de même de la droite m et on a la suite des perspectivités

$$x(X) \overline{\wedge} B(X \text{ ou } Z) \overline{\wedge} m(Z) \overline{\wedge} A(Z \text{ ou } Y) \overline{\wedge} y(Y),$$

ce qui démontre le théorème.

3) Dans le faisceau ponctuel et tangentiel des coniques tangentes aux droites a, b aux points A, B, les ponctuelles des seconds points d'intersection sur deux droites issues des points A, B sont perspectives et leur centre de perspectivité est sur la droite $c \equiv AB$; par corrélation, les faisceaux des secondes tangentes issues de deux points des droites a, b sont perspectifs et l'axe de perspectivité passe par le point $C \equiv ab$.

Conservant la figure employée dans la démonstration précédente, il résulte des propriétés harmoniques du quadrilatère complet appliquées au quadrilatère ayant pour côtés les droites AYZ, ADX, BDY, BXZ que le point $E \equiv (AB, XY)$ est le conjugué harmonique du point $F \equiv (AB, DZ)$ par rapport aux points A, B. Les points A, B, F étant fixes, il en est de même du point E qui est donc le centre de perspectivité des ponctuelles $x(X)$, $y(Y)$.

N.B. 1.– La droite $m \equiv CD$ est l'axe de perspectivité des faisceaux des tangentes aux points X, Y, faisceaux dont les supports sont respectivement les points où la droite DE coupe les droites b et a.

N.B. 2.– Le point A étant un point double des ponctuelles projectives $x(X)$, $x'(X')$ déterminée par les coniques γ sur deux droites x, x' menées par le point A, ces ponctuelles sont perspectives et leur centre de perspectivité est sur la droite b, celle-ci étant une position de la droite XX'. Par corrélation, les faisceaux des secondes tangentes issues de deux points de la droite b sont perspectifs et l'axe de perspectivité passe par le point A.

3° Théorèmes de Desargues et de Sturm. – Ces théorèmes sont encore applicables; il suffit de le démontrer pour le théorème de Desargues. Soient X et X', Y et Y', D les points où une droite d menée arbitrairement dans le plan du faisceau coupe une conique quelconque γ de celui-ci et les coniques dégénérées (a, b), (AB, AB). On a, à la fois,

$$A(A,B,X,X') \barwedge B(A,B,X,X'),\ A(A,B,X,X') \barwedge d(Y,D,X,X'),\ B(A,B,X,X') \barwedge d(D,Y',X,X').$$

on en tire

$$d(Y,D,X,X') \barwedge d(D,Y',X,X')$$

et le théorème résulte de ce qu'on a également

$$d(Y,D,X,X') \barwedge d(Y',D,X',X)$$

N.B. 1.– Il résulte de la relation précédente que le point double D de la conique dégénérée (AB, AB) est un point double de l'involution.

N.B. 2.– Lorsque la droite d passe par le point double $C \equiv ab$ de la conique dégénérée (a, b), les points Y, Y' se confondent avec ce point qui est donc le second point double de l'involution. On en déduit que le point D de la droite AB est le conjugué harmonique du point C sur la corde XX' de γ qui passe par les points C et D; ce qui est une propriété connue et on sait en outre que les tangentes à la conique γ aux points X, X' se coupent au conjugué harmonique E du point D sur AB. Le faisceau involutif des tangentes menées du point E aux coniques du faisceau projette donc de ce point la ponctuelle involutive déterminée par les mêmes coniques sur la droite CD et ses rayons doubles sont les droites EAB et EC.

4° Corollaire. Dans le faisceau des coniques tangentes aux points A, B aux droites a, b, il n'y a qu'une conique tangente à une droite donnée arbitrairement et il n'y a qu'une conique passant par un point pris arbitrairement dans le plan du faisceau.

5° Théorème. L'involution des couples de points d'intersection d'une droite quelconque et des coniques tangentes aux droites a, b aux points A, B et celle des couples de tangentes menées d'un point quelconque aux mêmes coniques, sont projectives aux ponctuelles des seconds points d'intersection des coniques avec les droites issues des points A, B et avec les faisceaux des secondes tangentes issues

des points des droites a, b.

Il suffit de démontrer le théorème pour les couples de points d'intersection d'une droite quelconque d et des coniques du faisceau. On distingue deux cas. 1) La droite d ne passe pas par le point $C \equiv ab$. Soient X, X' les points où elle coupe la conique γ du faisceau; E le point différent du point A où elle rencontre la droite a; Y le point de contact de la seconde tangente menée du point E; X'' le point d'intersection des droites d et AY. Lorsque la conique γ varie, le point Y décrit la droite fixe $p \equiv BY$ et on a la suite des perspectivités

$$E(Y) \,\overline{\wedge}\, p(Y) \,\overline{\wedge}\, A(Y \text{ ou } X'') \,\overline{\wedge}\, d\,(X'').$$

Le théorème résulte de ce que le point X'' est le conjugué harmonique du point fixe E de la droite d par rapport aux points X et X'.

2) Lorsque la droite d passe par le point $C \equiv ab$, les tangentes à la conique γ aux points X, X' se coupent sur la droite $c \equiv AB$ en un point D qui est le même pour toutes les coniques du faisceau. Soient E le point d'intersection de la droite d et d'une droite fixe y menée arbitrairement par le point A; Y le second point d'intersection de la conique γ et de la droite y; G le point fixe et Y_1 le point variable où la tangente au point Y coupe les tangentes b, a; X'' le point de rencontre des droites d, DY_1. Quand la conique γ varie, on a la suite des perspectivités

$$y(Y) \,\overline{\wedge}\, G(Y \text{ ou } Y_1) \,\overline{\wedge}\, D(Y_1 \text{ ou } X'') \,\overline{\wedge}\, d\,(X'')$$

et la propriété résulte encore de ce que le point X'' est le conjugué harmonique du point fixe E de la droite d par rapport aux points X, X'.

6° Remarques. 1) On a vu que le point $D \equiv (d, AB)$ est un des points doubles de l'involution déterminée sur la droite d par les couples des points d'intersection de cette droite avec les coniques tangentes aux droites a, b aux points A, B. Le second point double E est le point où la droite d est rencontrée par la droite joignant le point $C \equiv a, b$ au conjugué harmonique F du point D par rapport aux points A et B. Le point E est le point où la droite d touche celle des coniques non dégénérées du faisceau considéré qui lui est tangente et le point de contact de la seconde tangente menée du point D à cette conique est le conjugué harmonique G du point E par rapport aux points C, F. Lorsque les points A, B, C sont des points propres et réels, si la droite d est la droite impropre de leur plan, le point D est le point impropre de la droite AB, le point F est le milieu de la distance AB et le point E est le milieu de la médiane CF du triangle ABC. On voit par là qu'étant donné un triangle ABC dont les sommets sont des points propres et réels, il existe une parabole non dégénérée et il n'en existe qu'une qui soit tangente en A et B aux côtés CA, CB du triangle; la direction asymptotique de cette parabole est la médiane CF du triangle donné et le milieu G de cette médiane est le point de contact de la parabole avec une tangente parallèle à AB.

2) Deux triangles $ABC, A'B'C'$ dont les sommets sont des points propres et réels établissent une affinité entre les systèmes plans qui les contiennent. Par cette affinité, la parabole P tangente aux droites CA, CB aux points A, B se transforme en une parabole P' tangente aux droites CA', CB' aux points A', B'. Dès lors, si A et B, A' et B' sont deux couples de points propres pris arbitrairement sur les paraboles P, P' appartenant aux systèmes plans ϖ, ϖ', il existe, entre ceux-ci, une affinité dans laquelle les deux paraboles P, P' sont des courbes homologues et les points A et A', B et B' des points homologues ainsi que les points C, C' où se coupent les tangentes a et b, a' et b' aux points A et B, A' et B'. D'autre part, on sait que si deux systèmes plans sont alliés, le rapport de deux aires homologues quelconques est constant; donc, si on donne le nom de segment parabolique à la partie du plan limitée par un arc de parabole et la corde qui le sous-tend, on a la relation

entre aires

(1) segment parabolique AB : triangle ABC = segment parabolique A'B' : triangle A'B'C'.

Les paraboles P, P' et les points A, B, A', B' de ces courbes étant arbitraires, on déduit de là qu'il existe un rapport constant entre l'aire d'un segment parabolique et celle du triangle circonscrit.
3) Pour évaluer la valeur de ce rapport, on mène la médiane CF du triangle ABC; elle coupe la parabole P en un point à l'infini et en un point propre G, milieu de la distance CF; la tangente à la parabole P est parallèle à AB et passe par les milieux H, K de CA et CB. En appliquant la propriété (1) aux couples de points A et B, A et G, G et B de la parabole P, on a

(2) segt. par. AB : trig. CAB = segt. par. AG : trig. HAG = segt. par. GB : trig. KGB;

mais

(3) segt. par. AB − segt. par. AG − segt. par. GB = $\frac{1}{2}$ triangle CAB

et

(4) trig. CAB − trig. HAG − trig. KGB = $\frac{3}{4}$ triangle CAB;

la valeur commune des rapports (2) est donc $\frac{2}{3}$ et ainsi, *l'aire de tout segment parabolique est les deux tiers de celle du triangle circonscrit.*

Corollaire. *Quand une parabole est inscrite à un triangle, l'aire de celui-ci est la moitié de celle du triangle des points de contact.*

4) Par collinéation ou réciprocité entre deux systèmes plans, le faisceau à la fois ponctuel et tangentiel des coniques tangentes à deux droites données en des points donnés peut être remplacé par un faisceau de circonférences concentriques situées dans un plan propre et réel, et ayant pour centre commun un point réel; on pourrait déduire de là une autre démonstration des propriétés établies dans ce numéro.

5) Bien qu'on ait dit « le faisceau à la fois ponctuel et tangentiel des coniques tangentes à deux droites données en des points donnés », le faisceau considéré comme un faisceau ponctuel n'est pas absolument identique au faisceau considéré comme un faisceau tangentiel, les coniques dégénérées ne sont pas les mêmes.

91. Autres faisceaux de coniques. – 1° Etant donné le faisceau ponctuel des coniques circonscrites à un triangle ABC et tangentes au point A à une droite a, si on fait tourner la droite AC autour du point A pour l'amener à coïncider avec la droite a et si, en même temps, le point C se rapproche indéfiniment du point A et finit par se confondre avec ce point, les coniques du faisceau primitif sont remplacées par des coniques qui passent par le point B et sont tangentes à la droite a au point A où elles ont deux à deux un contact triponctuel ou du second ordre. On dit que l'ensemble des coniques ainsi obtenues est un faisceau ponctuel; il ne contient qu'une seule conique dégénérée, la conique formée des droites a et AB.

Abandonnant les notations précédentes, on prend le triangle de référence ABC ≡ abc tel que les coniques passent par le point B et aient un contact du second ordre au sommet A avec le côté b comme tangente commune en ce point. Alors, le point C étant un point arbitraire de la tangente b, on peut choisir le quatrième point fondamental des coordonnées ternaires pour que l'équation ponctuelle des coniques soit

(1) $$x_3^2 + 2h\,x_2x_3 + 2x_1x_2 = 0,$$

dans laquelle h est un paramètre arbitraire.

L'équation du faisceau des tangentes en B est

(2) $$X_1 + k X_3 = 0.$$

Les équations des faisceaux projetant du point A et du point B les ponctuelles des points où les coniques recoupent la droite BC, qui est une droite quelconque menée par le point B, et la droite

(3) $$X_2 - \lambda X_3 = 0$$

menée arbitrairement par le point A, sont

(4) $$2kX_2 + X_3 = 0 \qquad \text{et} \qquad 2\lambda X_1 + X_3 + 2k\lambda X_3 = 0. \qquad (5)$$

Enfin l'équation du faisceau des couples de droites projetant du point A la ponctuelle des couples de points d'intersection des coniques et de la droite

(6) $$X_1 - p X_2 = 0$$

qui est une droite quelconque du plan, est

(7) $$X_3^2 + 2k X_2 X_3 + 2 p X_2^2 = 0.$$

Le paramètre k figurant au premier degré dans les équations (2), (4), (5), (7), les coniques du faisceau ponctuel (1) coupent une droite quelconque du plan en des couples de points en involution et cette involution est projective au faisceau des tangentes au point B et aux ponctuelles des seconds points où les coniques recoupent des droites menées arbitrairement par les points A et B. — Ces propriétés permettent, comme dans les cas précédents, de définir le rapport anharmonique de quatre coniques quelconques du faisceau en disant qu'il est égal à ceux des quatre couples de points d'intersection des quatre coniques et d'une droite quelconque, des quatre tangentes au point B, et des quatre points où les quatre coniques recoupent une droite menée arbitrairement par le point A ou le point B. Si les notations $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ désignent les quatre coniques, on représente le rapport anharmonique par $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$ et il résulte des équations (2), (4), (5), (7) qu'on a

(8) $$(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4) = \frac{k_1 - k_3}{k_3 - k_2} : \frac{k_1 - k_4}{k_4 - k_2}.$$

Si on adopte les coniques $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ comme éléments fondamentaux de coordonnées binaires dans le faisceau, la valeur du rapport anharmonique $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$ est égale au quotient des coordonnées binaires de la conique γ_4 et on déduit de là que le faisceau des coniques défini par l'équation (1) doit également être considéré comme une forme de première espèce.

2° Par corrélation, le faisceau tangentiel des coniques inscrites à un triangle et tangentes à un des côtés du triangle en un point donné a pour cas limite ou de dégénérescence un faisceau tangentiel de coniques tangentes aux côtés a, b du triangle ABC ≡ abc, le point de contact sur le côté a étant le point B où les coniques ont en outre un contact du second ordre. La seule conique dégénérée du faisceau est formée des points B, C. On peut, après avoir pris arbitrairement le côté c du triangle, choisir la quatrième droite fondamendale pour que l'équation tangentielle des coniques du faisceau soit

(9) $$x_3^2 + 2k x_2 x_3 + 2 x_1 x_2 = 0.$$

Ce faisceau possède donc les propriétés corrélatives de celles du faisceau ponctuel considéré au 1°.

3° Les deux faisceaux qui précèdent ont un même cas de dégénérescence, le faisceau à la fois ponctuel et tangentiel des coniques ayant entre elles un contact du troisième ordre en un point donné d'une

droite donnée. Si ce contact se produit au sommet A sur le côté b du triangle fondamental $ABC \equiv abc$, on peut, après avoir pris arbitrairement le point C sur la droite b et le point A dans le plan, choisir le quatrième point fondamental et, par suite, la quatrième droite fondamentale, pour que les équations ponctuelle et tangentielle des coniques soient

$$(10) \qquad k X_2^2 + X_3^2 + 2 X_1 X_2 = 0 \qquad \text{et} \qquad k x_1^2 - x_3^2 - 2 x_1 x_2 = 0, \qquad (11)$$

dans lesquelles k est un paramètre arbitraire ayant la même valeur dans les deux équations pour une même conique, ou pour les coniques dégénérées ($k = \infty$).

Le faisceau considéré comme faisceau ponctuel contient une seule conique dégénérée, la conique formée de deux fois la droite b, et considéré comme faisceau tangentiel, il ne contient qu'une seule conique dégénérée, la conique formée de deux points confondus avec le point A.

En écrivant les équations (10) et (11) sous la forme

$$(12) \qquad X_3^2 + X_2(k X_2 + 2 X_1) = 0, \qquad x_3^2 - x_1(k x_1 - 2 x_2) = 0, \qquad (13)$$

et en observant que le point C et la droite AB sont un point quelconque de la droite b ou une droite quelconque menée par le point A, on trouve que les points de contact des secondes tangentes issues d'un même point de la droite b sont sur une droite qui passe par le point A, et réciproquement.

Les seconds points d'intersection des coniques du faisceau et des droites

$$(14) \qquad X_2 - \lambda_1 X_3 = 0, \qquad X_2 - \lambda_2 X_3 = 0$$

sont projetés du point B par les faisceaux projectifs définis par les équations

$$(15) \qquad k \lambda_1^2 X_3 + X_3 + 2 \lambda_1 X_1 = 0, \qquad k \lambda_2^2 X_3 + X_3 + 2 \lambda_2 X_1 = 0.$$

Les coniques coupent la droite BC, qui est une droite quelconque du plan, en des couples de points projetés du point A suivant les couples de rayons conjugués du faisceau involutif.

$$(16) \qquad k X_2^2 + X_3^2 = 0,$$

et les couples de tangentes issues du point B, qui est un point quelconque du plan, coupent la droite AC suivant les couples de points conjugués de la ponctuelle involutive

$$(17) \qquad k x_1^2 - x_3^2 = 0.$$

Les théorèmes de Desargues et de Sturm sont donc applicables au faisceau actuel; de plus, la présence du paramètre k au premier degré dans les équations (15), (16) et (17) et la propriété déjà déduite des équations (12) et (13) prouvent que les involutions des couples de points d'intersection des coniques du faisceau par une droite quelconque et des couples de tangentes issues d'un point quelconque sont projectives aux faisceaux des secondes tangentes issues des points de la droite b et aux ponctuelles des seconds points d'intersection des coniques par les droites issues du point B. – On déduit encore de là le moyen de définir le rapport anharmonique de quatre coniques quelconques du faisceau et les coordonnées binaires de chaque conique du faisceau par rapport à trois coniques fondamentales prises arbitrairement dans le faisceau qui doit donc encore être considéré comme une forme de première espèce.

4° Remarque. – 1) En choisissant convenablement les points et les droites fondamentales, les équations ponctuelles ou tangentielles des faisceaux ponctuels ou tangentiels dont on avait étudié les propriétés dans les numéros 88, 89 et 90, sont respectivement

$$(18) \qquad X_2^2 - X_3^2 + k(X_2^2 - X_1^2) = 0, \qquad X_2^2 - X_3^2 + k X_1 X_3 = 0, \qquad 2 X_1 X_2 + k X_3^2 = 0$$

et

(19) $$x_2^2 - x_3^2 + k(x_2^2 - x_1^2) = 0, \qquad x_2^2 - x_3^2 + k x_1 x_3 = 0, \qquad 2 x_1 x_2 + k x_3^2 = 0,$$

dans lesquelles k est un paramètre arbitraire. On pourrait, par des calculs analogues à ceux qu'on a faits ci-dessus (1° et 3°) se servir de ces équations pour établir les propriétés des faisceaux qu'elles représentent et on trouverait ainsi que la formule (8) est applicable à tous ces faisceaux.

Les équations précédentes et les équations (1), (8), (10), (11) sont toutes de la forme

(20) $$\Gamma + k\Gamma' = 0,$$

dans laquelle k est un paramètre arbitraire, et avec la condition que les équations $\Gamma = 0$, $\Gamma' = 0$ sont dans un même système de référence, les équations, toutes deux ponctuelles ou toutes deux tangentielles, de deux coniques distinctes.

Quand on passe des coordonnées tangentielles aux coordonnées ponctuelles, ou inversement, l'équation d'un faisceau ne reste linéaire en k que s'il s'agit d'un faisceau que l'on a dit être à la fois ponctuel et tangentiel; dans les autres cas, l'équation se transforme en une équation du second degré en k et ne représente plus un faisceau. On déduit de là les conséquences suivantes: si un faisceau de coniques est à la fois ponctuel et tangentiel, tout point quelconque du plan appartient à une seule conique du faisceau et toute droite quelconque du plan est tangente à une seule conique du faisceau; si un faisceau de coniques est ponctuel et n'est pas tangentiel, tout point quelconque du plan appartient à une seule conique du faisceau et toute droite quelconque du plan est tangente à deux coniques du faisceau; si un faisceau est tangentiel et n'est pas ponctuel, toute droite quelconque du plan est tangente à une seule conique du faisceau et tout point quelconque du plan est situé sur deux coniques du faisceau.

2) On démontrera dans une autre partie du cours que si

(21) $$F_1(X,Y,Z) = 0, \qquad F_2(X,Y,Z) = 0$$

sont les équations ponctuelles ou tangentielles de deux coniques distinctes Γ_1, Γ_2 rapportées au même système fondamental, l'ensemble des coniques représentées par l'équation

(22) $$F_1(X,Y,Z) + k F_2(X,Y,Z) = 0$$

où k est un paramètre arbitraire, est un des faisceaux considérés dans ce qui précède.

Un faisceau de coniques est donc formé, suivant qu'il est ponctuel ou tangentiel, de l'ensemble des coniques passant par les points communs ou tangentes aux tangentes communes à deux coniques distinctes. Ces coniques appartiennent au faisceau, mais il est facile de démontrer qu'elles peuvent être remplacées par deux coniques quelconques du faisceau. En effet, si on considère le faisceau défini par l'équation (22) et si, ayant donné au paramètre k deux valeurs particulières k', k'', on pose

$$\varphi'(X,Y,Z) = F_1(X,Y,Z) + k' F_2(X,Y,Z),$$
$$\varphi''(X,Y,Z) = F_1(X,Y,Z) + k'' F_2(X,Y,Z),$$

on a

$$(k' - k'')F_1(X,Y,Z) = -k''\varphi'(X,Y,Z) + k'\varphi''(X,Y,Z),$$
$$(k' - k'')F_2(X,Y,Z) = \varphi'(X,Y,Z) - \varphi''(X,Y,Z).$$

L'équation (22) est donc équivalente à la suivante

(23) $$\varphi'(X,Y,Z) + \lambda\varphi''(X,Y,Z) = 0$$

dans laquelle λ est un paramètre arbitraire lié d'une manière biunivoque au paramètre k par l'équation

(24) $$\lambda(k - k'') + (k' - k) = 0.$$

Mais, remplacer l'équation (22) par l'équation (23), c'est remplacer les coniques Γ_1, Γ_2 par les coniques Γ', Γ'' dont les équations sont

$$\varphi'(X,Y,Z) = 0 \quad \text{ou} \quad F_1(X,Y,Z) + k'F_2(X,Y,Z) = 0,$$

$$\varphi''(X,Y,Z) = 0 \quad \text{ou} \quad F_1(X,Y,Z) + k''F_2(X,Y,Z) = 0$$

et qui sont donc deux coniques distinctes quelconques du faisceau.

3) En remplaçant k par $k_2 : k_1$, l'équation (22) devient

(25) $$k_1F_1(X,Y,Z) + k_2F_2(X,Y,Z) = 0$$

et des valeurs particulières de k_1 et k_2 sont les coordonnées binaires de la conique à laquelle elles correspondent, si les trois coniques fondamentales sont celles qu'on obtient en donnant à k_1 de k_2 les valeurs 1 et 0, 0 et 1, 1 et 1.

§ III: Le cône et la feuillée du second degré.

92. Définitions.

1° Soient s et t deux feuillées projectives, réelles ou imaginaires, non perspectives, de supports différents et placées dans une même gerbe dont le support S est un point propre ou impropre, réel ou imaginaire. Deux feuillets homologues quelconques α, α' se coupent suivant une droite a dont le lieu est, par définition, un cône du second degré Γ_2 ayant le point S pour sommet. – Chacune des droites a est une génératrice rectiligne ou un rayon du cône Γ_2. – Quand le plan α' coïncide avec le plan $st \equiv \beta'$, le plan α devient le plan β qui est le seul des plans passant par s ne contenant qu'une génératrice rectiligne du cône Γ_2; le plan β est dit tangent au cône suivant la droite s. De même, le plan γ' homologue dans la feuillée t du plan $\gamma \equiv st$ de la feuillée s est appelé le plan tangent au cône Γ_2 suivant la droite t. – Tout plan ϖ mené par le point S contient deux génératrices rectilignes distinctes ou confondues du cône Γ_2; ces droites sont les rayons doubles des faisceaux projectifs superposés suivant lesquels le plan ϖ est coupé par les feuillées s et t. (C'est à cause de cette propriété que le cône Γ_2 est dit du second degré.).

2) Soient σ et τ deux plans différents contenant deux faisceaux projectifs, réels ou imaginaires, non perspectifs, appartenant à une même gerbe dont le support S est un point propre ou impropre, réel ou imaginaire. Deux rayons homologues quelconques a, a' déterminent un plan dont le lieu est, par définition, une feuillée du second degré φ_2 ayant le point S pour sommet. – Chacun des plans α est un feuillet ou un plan de la feuillée φ_2. – Quand la droite a' devient la droite $\sigma\tau \equiv b'$, la droite a devient la droite b qui est la seule droite du plan σ n'appartenant qu'à un plan de la feuillée φ_2; la droite b est dite la droite de contact du plan σ. De même, la droite c' homologue dans le faisceau τ de la droite $c \equiv \sigma\tau$ du faisceau σ est appelée la droite de contact du plan τ dans la feuillée φ_2. – Toute droite p menée par le point S est dans deux feuillets distincts ou confondus de la feuillée φ_2; ces feuillets sont les plans doubles des feuillées projectives suivant lesquelles on projette de la droite p les faisceaux σ et τ. (C'est à cause de cette propriété que la feuillée φ_2 est dite du second degré).

93 1° Théorèmes.

1) Les droites qui projettent les points d'une ponc=

2) Les plans qui projettent les rayons d'un fais=

tuelle du second degré P_2 d'un point S extérieur au plan de la ponctuelle, sont les génératrices rectilignes d'un cône du second degré Γ_2.

ceau du second degré f_2 d'un point S extérieur au plan du faisceau, sont les feuillets d'une feuillée du second degré φ_2.

On ne doit démontrer que le premier théorème et, pour cela, il suffit d'observer que les faisceaux projectifs qui projettent la ponctuelle du second degré P_2 de deux de ses points sont, eux-mêmes projetés du point S suivant deux feuillées projectives dont les feuillets homologues ont pour intersections les droites projetant les points de la ponctuelle du second degré P_2. Ces droites sont donc, en vertu de la définition donnée ci-dessus (92, 1°), les génératrices rectilignes d'un cône du second degré Γ_2 répondant à la question.

3) Réciproquement, quand on coupe les génératrices rectilignes d'un cône du second degré Γ_2 de sommet S par un plan ϖ ne passant pas par le point S, on obtient les points d'une ponctuelle du second degré P_2.

4) Réciproquement, quand on coupe les plans d'une feuillée du second degré φ_2 de sommet S par un plan ϖ ne passant pas par le point S, on obtient les droites d'un faisceau du second degré f_2.

2° Les propriétés du cône et de la feuillée du second degré se déduisent des propriétés de la ponctuelle et du faisceau du second degré par l'intermédiaire d'une gerbe perspective au système plan contenant la ponctuelle ou le faisceau du second degré. Dans cette perspectivité, aux tangentes à la ponctuelle du second degré correspondent les plans tangents au cône du second degré et le lieu de ces plans est la feuillée du second degré qui correspond au faisceau du second degré dont les droites sont les tangentes considérées; de même aux points de contact des droites d'un faisceau du second degré, correspondent les droites de contact des plans de la feuillée du second degré et le lieu de ces droites est le cône du second degré qui projette la ponctuelle du second degré dont les points sont les points de contact considérés. On peut donc, comme on l'a fait pour la ponctuelle et le faisceau du second degré, superposer le cône et la feuillée du second degré en une seule forme à laquelle on conserve le nom de cône du second degré et qui est ainsi à la fois un lieu de droites, les génératrices rectilignes, et de plans, les plans tangents. Pour tenir compte des conventions de langage de la géométrie analytique, on pourrait dire cône du second ordre et cône de seconde classe suivant que le cône du second degré est considéré comme lieu de droites ou comme lieu de plans.

3° Remarques. – 1) Lorsque le sommet est un point impropre, les génératrices rectilignes sont parallèles et le cône prend le nom de cylindre.

2) Le cône et le cylindre de révolution sont un cône et un cylindre du second degré qu'on obtient en projetant une circonférence située à distance finie d'un point propre ou impropre de la perpendiculaire au plan de la circonférence en son centre.

3) Un cône réel du second degré partage l'espace en deux régions; une région dite intérieure au cône dans laquelle ne passe aucun plan tangent réel et une région dite extérieure au cône que traversent les plans tangents réels. – Si le sommet est un point propre, un plan mené par ce point coupe le cône suivant deux génératrices rectilignes imaginaires, réelles et confondues, ou réelles et distinctes; en même temps, tout plan parallèle coupe le cône suivant une ellipse, une parabole ou une hyperbole; la direction asymptotique de la parabole est celle de la génératrice rectiligne suivant laquelle le plan mené par le sommet est tangent au cône; les asymptotes de l'hyperbole sont les intersections du plan de la courbe avec les plans tangents au cône le long des génératrices rectilignes contenues dans le plan mené par le sommet au cône. – Si le sommet est un point impropre, le cône devient un cylindre elliptique, parabolique ou hyperbolique, selon que le plan de l'infini est extérieur tangent ou sécant au cylindre, et les sections planes dont les plans ne sont pas parallèles aux génératrices rectilignes sont toutes des ellipses, des paraboles ou des hyperboles. Quand le cylindre est

hyperbolique, les plans tangents suivant les génératrices rectilignes impropres sont les plans asymptotes du cylindre et ils contiennent les asymptotes de toutes les hyperboles tracées sur le cylindre. Un cylindre hyperbolique équilatère est un cylindre hyperbolique dont les plans asymptotes sont perpendiculaires; tout plan perpendiculaire à l'intersection de ces plans coupe le cylindre suivant une hyperbole équilatère.

4) Le rapport anharmonique de quatre génératrices rectilignes d'un cône du second degré est celui des plans qui projettent ces quatre droites d'une cinquième génératrice rectiligne quelconque; lorsque la cinquième génératrice rectiligne est l'une des premières, le plan qui projette celle-ci devient le plan tangent correspondant. – Le rapport anharmonique de quatre plans tangents d'un cône du second degré est celui des droites d'intersection de ces quatre plans par un cinquième plan tangent quelconque; lorsque le cinquième plan tangent est l'un des premiers, la droite d'intersection avec celui-ci devient la génératrice rectiligne de contact correspondante. – Le rapport anharmonique de quatre génératrices rectilignes d'un cône du second degré est égal à celui des plans tangents suivant ces génératrices rectilignes.

5) Ces propriétés permettent d'étendre l'emploi des coordonnées binaires au cône et à la feuillée du second degré. Le quotient des coordonnées binaires d'une génératrice rectiligne d'un cône du second degré ou de quatre plans d'une feuillée du second degré sera la valeur du rapport anharmonique du groupe formé par les trois génératrices rectilignes dites fondamentales et la génératrice rectiligne considérée ou par les trois plans dits fondamentaux et le plan considéré; si les génératrices rectilignes fondamentales sont les génératrices rectilignes de contact des trois plans fondamentaux, toute génératrice rectiligne a les mêmes coordonnées binaires que le plan tangent correspondant. Si les génératrices rectilignes fondamentales ou les plans fondamentaux passent par les points fondamentaux d'une ponctuelle du second degré ou par les droites fondamentales d'un faisceau du second degré que l'on obtient en coupant les génératrices rectilignes et les plans tangents d'un cône du second degré par un plan quelconque, toute génératrice rectiligne et tout plan tangent du cône du second degré ont les mêmes coordonnées binaires que le point de la ponctuelle du second degré ou la droite du faisceau du second degré qui sont sur la génératrice rectiligne ou dans le plan tangent du cône.

6) Les formes dégénérées du cône du second degré sont deux faisceaux de même support dans des plans différents ou deux faisceaux confondus; celles de la feuillée du second degré sont deux feuillées dont les supports différents sont placés dans le même plan ou deux feuillées confondues.

96. Théorèmes. *1° On peut établir une infinité de collinéations entre un système plans et une gerbe pour qu'aux points et aux tangentes d'une conique donnée dans le système plan correspondent les génératrices rectilignes et les plans tangents d'un cône du second degré dans la gerbe.*

2° On peut établir une infinité de réciprocités entre un système plan et une gerbe pour qu'aux points et aux tangentes d'une conique donnée dans le système plan correspondent les plans tangents et les génératrices rectilignes d'un cône du second degré dans la gerbe.

3° On peut établir une infinité de collinéations entre deux gerbes pour qu'aux génératrices rectilignes et aux plans tangents d'un cône du second degré donné dans la première gerbe correspondent les génératrices rectilignes et les plans tangents d'un cône du second degré donné dans la seconde gerbe.

4° On peut établir une infinité de réciprocités entre deux gerbes pour qu'aux génératrices rectilignes et aux plans tangents d'un cône du second degré donné dans la première gerbe correspondent les plans tangents et les génératrices rectilignes d'un cône du second degré donné dans la seconde gerbe.

La démonstration de ces théorèmes est analogue à celle faite au numéro 78 et il en résulte aussi que toute projectivité répondant à la question est déterminée par trois couples d'éléments homologues de même

nom pour chacune des deux formes considérées, conique ou cône du second degré.

§IV: Le système réglé.

A. Définition._

95.1° On peut donner deux définitions corrélatives du système réglé.

1) Soient $d_1(A_1, A_2, A_3, \ldots)$, $d_2(B_1, B_2, B_3, \ldots)$ deux ponctuelles projectives dont les supports d_1, d_2 sont des droites gauches, propres ou impropres, réelles ou imaginaires. Les droites

$$g_1 \equiv A_1B_1,\quad g_2 \equiv A_2B_2,\quad g_3 \equiv A_3B_3, \ldots$$

qui joignent les points homologues des deux ponctuelles, sont, par définition, les génératrices rectilignes d'un système réglé Σ_2 dont les droites d_1, d_2 sont appelées des directrices._ On dit que les ponctuelles $d_1(A_i)$, $d_2(B_i)$ sont les sections du système réglé Σ_2 par les droites d_1, d_2.

2) Soient $d_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots)$, $d_2(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots)$ deux feuillées projectives dont les supports d_1, d_2 sont des droites gauches, propres ou impropres, réelles ou imaginaires. Les droites

$$g_1 \equiv \alpha_1\beta_1,\quad g_2 \equiv \alpha_2\beta_2,\quad g_3 \equiv \alpha_3\beta_3, \ldots$$

suivant lesquelles se coupent les feuillets homologues des deux feuillées, sont, par définition, les génératrices rectilignes d'un système réglé Σ_2 dont les droites d_1, d_2 sont appelées des directrices._ On dit que les feuillées $d_1(\alpha_i)$, $d_2(\beta_i)$ projettent le système réglé Σ_2 des droites d_1, d_2.

2° **Théorème.** *Les deux définitions du système réglé sont concordantes.*

1) La droite g_i qui joint les points A_i, B_i (1°,1) est aussi l'intersection des feuillets $\alpha_i \equiv d_1B_i$, $\beta_i \equiv d_2A_i$ des feuillées projetant les ponctuelles $d_2(B_i)$, $d_1(A_i)$ respectivement des droites d_1, d_2. Ses ponctuelles étant projectives, il en est de même des feuillées et le système réglé Σ_2 construit dans la première définition satisfait aux conditions de la seconde.

2) La droite g_i intersection des plans α_i, β_i (1°,2) joint aussi les points $A_i \equiv d_1\beta_i$, $B_i \equiv d_2\alpha_i$ des ponctuelles obtenues en coupant les feuillées $d_2(\beta_i)$, $d_1(\alpha_i)$ respectivement par les droites d_1, d_2. Ses feuillées étant projectives, il en est de même des ponctuelles et le système réglé Σ_2 construit dans la seconde définition satisfait aux conditions de la première.

3° **Corollaires.**

1) Par tout point de chacune des directrices d_1, d_2 passe une seule génératrice rectiligne du système réglé Σ_2.

2) Tout plan passant par une des directrices d_1, d_2 contient une seule génératrice rectiligne du système réglé Σ_2.

3) Deux génératrices rectilignes d'un système réglé sont toujours des droites gauches.

4) Les deux ponctuelles et les deux feuillées formant les sections du système réglé Σ_2 par les directrices d_1, d_2 ou projetant le système réglé de ces deux droites sont projectives entre elles.

B._ Systèmes réglés complémentaires; Quadriques.

96._1° N.B._ Deux droites qui ont un point commun étant dans un même plan et réciproquement, on dira qu'elles s'appuient l'une sur l'autre, qu'il s'agisse du point ou du plan qu'elles ont en commun.

2° **Théorème.** *Il existe une infinité de droites qui s'appuient sur trois droites deux à deux gauches, elles sont les génératrices rectilignes d'un système réglé dont les trois droites sur lesquelles elles s'appuient sont des directrices.*

On peut construire de deux manières les droites qui s'appuient sur trois droites a, b, c deux à deux gauches; ces deux manières correspondent aux deux définitions corrélatives du système réglé.

1) Si A est un point pris arbitrairement sur la droite a, la droite g suivant laquelle se coupent les plans $\beta \equiv bA$, $\gamma \equiv cA$, est la seule droite qui passe par le point A et s'appuie sur les droites b, c. Lorsque le point A parcourt la droite a, les plans β, γ qui projettent la ponctuelle $a(A)$ des droites b, c engendrent des feuillées projectives ayant ces deux droites comme supports. Les positions successives de la droite g sont toutes les droites qui s'appuient sur les droites a, b, c; elles sont les génératrices rectilignes d'un système réglé Σ_2

ayant les droites b, c pour directrices, en vertu de la seconde définition du système réglé (95, 1°, 2).
2) Si α est un plan mené arbitrairement par la droite a, la droite g joignant les points $B \equiv b\alpha$, $C \equiv c\alpha$ est la seule droite qui est située dans le plan α et s'appuie sur les droites b, c. Lorsque le plan α tourne autour de la droite a, les ponctuelles $b(B)$, $c(C)$, intersections de la feuillée $a(\alpha)$ par les droites b, c sont projectives. Les positions successives de la droite g sont toutes les droites qui s'appuient sur les droites a, b, c; elles sont les génératrices rectilignes d'un système réglé Σ_2 ayant les droites b, c comme directrices en vertu de la première définition du système réglé (95, 1°, 1)

3° Théorème. *Toute droite qui s'appuie sur trois génératrices rectilignes d'un système réglé, s'appuie sur toutes et est une directrice du système réglé.*

Soient

$$g_1 \equiv A_1 B_1 \equiv \alpha_1 \beta_1, \quad g_2 \equiv A_2 B_2 \equiv \alpha_2 \beta_2, \quad g_3 \equiv A_3 B_3 \equiv \alpha_3 \beta_3, \quad g_i \equiv A_i B_i \equiv \alpha_i \beta_i$$

des génératrices rectilignes du système réglé Σ_2 défini par les formes projectives (94, 1°, 1, 2 et 3°, 4)

$$d_1(A_1, A_2, A_3, A_i) \,\pi\, d_2(B_1, B_2, B_3, B_i) \,\pi\, d_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_i) \,\pi\, d_2(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_i);$$

d_3 une droite qui coupe les génératrices rectilignes g_1, g_2, g_3 aux points C_1, C_2, C_3 et déterminant avec ces trois droites les plans $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

1) On démontre d'abord que la droite d_3 coupe la droite g_i en un point C_i et est avec cette droite dans un plan γ_i. La démonstration peut se faire de deux manières corrélatives.

a.- Les feuillées projectives $d_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_i)$, $d_2(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_i)$ tracent sur la droite d_3 deux ponctuelles projectives dont les points C_1, C_2, C_3 sont trois points doubles; ces ponctuelles sont donc identiques et le point $d_3\alpha_i \equiv d_3\beta_i$ est le point C_i où la droite d_3 rencontre la droite $g_i \equiv \alpha_i\beta_i$.

b.- Les ponctuelles projectives $d_1(A_1, A_2, A_3, A_i)$, $d_2(B_1, B_2, B_3, B_i)$ sont projetées de la droite d_3 suivant deux feuillées projectives dont les plans $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sont trois plans doubles; ces feuillées sont donc identiques et le plan $d_3 A_i \equiv d_3 B_i$ est le plan γ_i que la droite d_3 détermine avec la droite $g_i \equiv A_i B_i$.

2) On démontre ensuite que la droite d_3 est une directrice du système réglé Σ_2, ce qu'on peut également faire de deux manière corrélatives.

a.- Les ponctuelles $d_1(A_1, A_2, A_3, A_i)$, $d_3(B_1, B_2, B_3, B_i)$ sont projectives, car elles sont les sections de la feuillée $d_2(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_i)$ par les droites d_1, d_3; les génératrices rectilignes du système réglé Σ_2 joignent les points homologues de ces deux ponctuelles et la droite d_3 est une directrice du système réglé Σ_2, en vertu de la première définition du numéro 94, 1°, 1.

b.- Les feuillées $d_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_i)$, $d_3(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_i)$ sont projectives, car elles projettent la ponctuelle $d_2(B_1, B_2, B_3, B_i)$ des droites d_1, d_3; les génératrices rectilignes du système réglé Σ_2 sont les intersections des plans homologues de ces deux feuillées et la droite d_3 est une directrice du système réglé Σ_2 en vertu de la seconde définition donnée au numéro 94, 1°, 2.

4° Corollaire. *Tout système réglé Σ_2 possède une infinité de directrices (3°), elles sont les génératrices rectilignes d'un second système réglé Σ_2' ayant les génératrices rectilignes du premier pour directrices (2°).*

5° Définitions et Corollaires.- 1) Chacun des deux systèmes réglés Σ_2, Σ_2' est dit complémentaire de l'autre; leur ensemble s'appelle une quadrique, on dit aussi qu'ils sont des demi-quadriques complémentaires; leurs génératrices rectilignes constituent ce qu'on appelle les deux modes ou les deux systèmes de génératrices rectilignes de la quadrique qu'ils forment. Les propriétés établies dans ce qui précède peuvent s'énoncer de la manière suivante.

a.- *Deux génératrices rectilignes d'une quadrique sont gauches ou se coupent et sont dans un même plan, selon qu'elles sont ou ne sont pas de même mode.*

b.- Par tout point d'une génératrice rectiligne d'une quadrique passe une seule génératrice rectiligne de l'autre mode.

c.- Tout plan mené par une génératrice rectiligne d'une quadrique contient une seule génératrice rectiligne de l'autre mode.

Les points des génératrices rectilignes s'appellent les points de la quadrique; le plan de deux génératrices rectilignes de modes contraires est dit tangent à la quadrique au point où les deux droites se coupent et ce point s'appelle le point de contact du plan avec la quadrique.

d.- *Les ponctuelles et les feuillées obtenues en coupant les génératrices rectilignes d'un même mode d'une quadrique par les génératrices rectilignes de l'autre mode ou en projetant celles-ci des premières, sont projectives entre elles.*

e.- De la définition du plan tangent en un point d'une quadrique et de la propriété précédente, on déduit: *La ponctuelle des points d'une génératrice rectiligne d'une quadrique est projective à la feuillée des plans tangents en ces points.*

6° Rapport anharmonique de quatre génératrices rectilignes d'un même mode.- La propriété (d), ci-dessus (5°), admet ce cas particulier: *Si on coupe quatre génératrices rectilignes d'un même mode d'une quadrique par une génératrice rectiligne de l'autre mode, ou si on les projette de celle-ci, on trouve quatre points ou quatre plans dont les rapports anharmoniques conservent la même valeur commune, quelle que soit la génératrice rectiligne du second mode par laquelle on coupe ou de laquelle on projette; cette valeur s'appelle le rapport anharmonique des quatres génératrices rectilignes considérées du premier mode.*

7° De l'emploi des coordonnées binaires dans le système réglé.- Le rapport anharmonique de quatre génératrices rectilignes d'un même mode d'une quadrique est, par définition, le quotient des coordonnées binaires de la quatrième de ces droites, les trois autres prenant le nom d'éléments fondamentaux et formant le système de référence du système réglé auquel appartiennent les génératrices rectilignes considérées.- Si on coupe les génératrices rectilignes d'un système réglé par une directrice ou si on les projette de celle-ci, il résulte de la propriété précédente (6°) qu'on a une ponctuelle et une feuillée dont les éléments ont les mêmes coordonnées binaires que les génératrices rectilignes correspondantes, lorsque les éléments fondamentaux sur la ponctuelle ou dans la feuillée sont les points ou les plans déterminés par les génératrices rectilignes fondamentales du système réglé.- Cette extension de l'emploi des coordonnées binaires au système réglé fait considérer ce dernier comme une forme de première espèce.

G. Points communs à une droite et une quadrique ou plans tangents menés de la droite à la quadrique.-

97. 1° Théorème. *Une droite qui n'est pas une des génératrices rectilignes a avec la quadrique deux points communs, distincts ou confondus, et elle est dans deux plans tangents qui sont différents ou coïncident en même temps que les deux points.*

Soient $d_1(\alpha_i)$, $d_2(\beta_i)$ les feuillées projectives qui projettent les génératrices rectilignes g_i d'un même mode de la quadrique Q, de deux génératrices rectilignes d_1, d_2, de l'autre mode. Si la droite a n'est pas une génératrice rectiligne de la quadrique, on peut supposer qu'elle ne coupe ni d_1 ni d_2; de cette manière, les feuillées $d_1(\alpha_i)$, $d_2(\beta_i)$ tracent sur la droite a deux ponctuelles projectives distinctes dont les points doubles A, A' sont les points communs à la droite a et à la quadrique Q.- Par réciprocité, si $d_1(A_i)$, $d_2(B_i)$ sont les ponctuelles déterminées par les génératrices rectilignes g_i sur les droites d_1, d_2, les plans tangents menés à la quadrique Q de la droite a sont les deux feuillets doubles α, α' des feuillées projectives projetant de la droite a les ponctuelles $d_1(A_i)$, $d_2(B_i)$.- Les points A, A' sont les points où la droite a rencontre deux (g, g') des génératrices rectilignes g_i; les plans α, α' sont les plans ag, ag' et ils sont distincts ou confondus en même temps que les points A, A'.

2° Remarques.- 1) Lorsque les points A, A' sont distincts, on dit qu'ils sont les points d'intersection

de la quadrique Q et de la droite a ; si g et d, g' et d' sont les génératrices rectilignes qui se coupent en ces points, et si B, B' sont les points d'intersection des droites g et d', g' et d, les plans α, α' sont les plans gd' ≡ BAA', g'd ≡ B'AA' et leurs points de contact sont les points B, B'. Les plans gd ≡ ABB', g'd' ≡ A'BB' sont tangents à la quadrique aux points A, A' et ils se coupent suivant la droite BB'. Les côtés du quadrilatère gauche ABA'B' sont donc sur la quadrique qui est tangente en A et A', B et B' aux faces du quadrilatère qui se coupent suivant les droites BB' et AA'.

2) Lorsque les points A, A' sont confondus, les droites g, d se confondent avec les droites g', d'; les plans α, α' sont confondus en un seul contenant les droites a, g ≡ g', d ≡ d' et tangent à la quadrique au point A ≡ A'. On dit que la droite a est tangente à la quadrique au point A ≡ A'; les tangentes en un point d'une quadrique sont donc les droites différentes des génératrices rectilignes dans le plan tangent en ce point.

3° Corollaires. 1) *Pour qu'une droite soit une génératrice rectiligne d'une quadrique, il faut et il suffit que trois de ces points soient sur la quadrique ou qu'elle soit dans trois plans tangents à la quadrique (Cfr 3°).*

2) *Les génératrices rectilignes des deux modes sont les seules droites dont tous les points appartiennent à la quadrique et telles que tous les plans qui les contiennent soient tangents à la quadrique.*

4° N.B. 1.– C'est à cause de la propriété énoncée dans le théorème précédent (1°) qu'on dit que les systèmes réglés et, par suite, les quadriques sont du second degré. Pour tenir compte des conventions de langage de la géométrie analytique, on dit aussi qu'une quadrique est une surface du second ordre ou de seconde classe selon qu'on en considère les points ou les plans tangents, ou bien, selon qu'on les considère comme lieux de points ou comme enveloppes de plans.

N.B. 2.– Les quadriques dont on s'occupe ici ne diffèrent pas des quadriques proprement dites de la géométrie analytique. 1) Les équations

$$A + \lambda A' = 0, \qquad B + \lambda B' = 0,$$

où λ est un paramètre arbitraire, sont les équations de plans ou de points homologues de deux feuillées ou de deux ponctuelles projectives, selon que les coordonnées courantes sont ponctuelles ou tangentielles; l'élimination du paramètre λ donne l'équation d'une surface du second ordre ou de seconde classe

$$AB' - BA' = 0;$$

les quadriques de la géométrie projective sont donc des quadriques de la géométrie analytique.

2) Inversement, en rapportant une quadrique proprement dite de la géométrie analytique à un tétraèdre polaire, son équation s'écrit d'abord

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + T^2 = 0;$$

mais cette équation peut être mise sous la forme

$$AB' - BA' = 0$$

et elle est alors le résultat de l'élimination du paramètre λ entre les équations

$$A + \lambda A' = 0, \qquad B + \lambda B' = 0$$

des éléments homologues de ponctuelles ou de feuillées projectives. Toute quadrique proprement dite de la géométrie analytique est donc également une quadrique de la géométrie projective.

D. Sections planes et cônes circonscrits.

98. 1° Théorèmes.

1) Tout plan qui n'est pas tangent à une quadrique a en commun avec celle-ci une infinité de points dont le lieu est une ponctuelle du second degré;

2) Tout point qui n'est pas sur une quadrique est dans une infinité de plans tangents dont le lieu est une feuillée du second degré;

ou bien :

Tout plan qui ne passe pas par une des génératrices rectilignes d'un système réglé, coupe ces droites en des points dont le lieu est une ponctuelle du second degré.

Tout point qui n'est pas sur une des génératrices rectilignes d'un système réglé, détermine avec ces droites des plans dont le lieu est une feuillée du second degré.

Soient d_1, d_2 deux génératrices rectilignes d'un même mode tracées arbitrairement sur la quadrique Q ; A, B les points où elles coupent un plan ϖ qui n'est pas tangent à la quadrique ; g_1, g_2 les génératrices rectilignes du second mode qui passent respectivement par les points A, B et qui sont donc différentes de la droite AB ; g une troisième génératrice rectiligne quelconque du second mode et C le point où elle rencontre le plan ϖ ; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha$ et β_1, β_2, β les plans $d_1 g_1$, $d_1 g_2$, $d_1 g$ et $d_2 g_1$, $d_2 g_2$, $d_2 g$; $a_1 \not\equiv AB$, $a_2 \equiv AB$, $a \equiv AC$ et $b_1 \equiv BA$, $b_2 \not\equiv BA$, $b \equiv BC$ les droites suivant lesquelles ces plans coupent le plan ϖ. – Lorsque la génératrice rectiligne g décrit la quadrique, les plans α, β engendrent des feuillées projectives ayant les droites d_1, d_2 pour supports et dont les plans α_1 et β_1, α_2 et β_2 sont deux couples de feuillets homologues ; les droites a, b décrivent donc dans le système plan ϖ des faisceaux projectifs dont les droites a_1 et b_1, a_2 et b_2 sont des couples de rayons homologues ; dès lors, le lieu du point de rencontre C des droites a, b est une ponctuelle du second degré P_2 tangente aux droites a_1, b_2 aux points A, B.

Soient d_1, d_2 deux génératrices rectilignes d'un même mode tracées arbitrairement sur la quadrique Q ; α, β les plans qu'elles déterminent avec un point P qui n'est pas sur la quadrique ; g_1, g_2 les génératrices rectilignes du second mode qui sont respectivement dans les plans α, β et qui sont donc différentes de la droite $\alpha\beta$; g une troisième génératrice rectiligne quelconque du second mode et γ le plan qu'elle détermine avec le point P ; A_1, A_2, A et B_1, B_2, B les points $d_1 g_1$, $d_1 g_2$, $d_1 g$ et $d_2 g_1$, $d_2 g_2$, $d_2 g$; $a_1 \not\equiv \alpha\beta$, $a_2 \equiv \alpha\beta$, $a \equiv \alpha\gamma$ et $b_1 \equiv \beta\alpha$, $b_2 \not\equiv \beta\alpha$, $b \equiv \beta\gamma$ les droites joignant ces points au point P. – Lorsque la génératrice rectiligne g décrit la quadrique, les points $A B$ engendrent des ponctuelles projectives ayant les droites d_1, d_2 pour supports et dont les points A_1 et B_1, A_2 et B_2 sont deux couples de points homologues ; les droites a, b décrivent donc dans la gerbe P des faisceaux projectifs dont les droites a_1 et b_1, a_2 et b_2 sont des couples de rayons homologues ; dès lors, le lieu du plan γ des droites a, b est une feuillée du second degré φ_2 dont les droites a_1, b_2 sont les droites de contact des feuillets α, β.

N. B. – On dit que la ponctuelle du second degré P_2 (ou la conique γ support de P_2) est l'intersection du plan ϖ et de chacun des systèmes réglés formés des génératrices rectilignes des deux modes de la quadrique Q, et aussi qu'elle est l'intersection du plan ϖ et de la quadrique Q.

N. B – On dit que la feuillée du second degré φ_2 projette du point P chacun des systèmes réglés formés des génératrices rectilignes des deux modes de la quadrique Q, et aussi qu'elle est circonscrite du point P à la quadrique Q.

2° Corollaires.

– Le plan α_1 est tangent à la quadrique Q au point A et il en est de même de la droite a_1 qui passe par le point A dans le plan α_1 et n'est pas une génératrice rectiligne de la quadrique. Comme le point A est un point quelconque de la ponctuelle du second degré P_2, on peut énoncer les propriétés qui suivent.

Le point A_1 est le point de contact de la quadrique Q et du plan α ainsi que de la droite a_1 qui passe par le point A_1 dans α et n'est pas une génératrice rectiligne de la quadrique. – Comme le plan α est un feuillet quelconque de la feuillée du second degré φ_2, on peut énoncer les propriétés qui suivent.

1) La tangente en un point à la ponctuelle du second degré des points communs à un plan non tangent et à la quadrique, est l'intersection de ce plan et du plan tangent au point considéré.

2) La droite de contact d'un feuillet de la feuillée du second degré des plans tangents menés d'un point extérieur à la quadrique, est la droite joignant ce point au point de contact du feuillet considéré.

3) Les plans tangents à la quadrique aux points de la ponctuelle du second degré des points communs à un plan non tangent et à la quadrique, coupent ce plan suivant le faisceau du second degré des tangentes à la ponctuelle du second degré, on dit que le faisceau du second degré est circonscrit à la quadrique.

4) Les points de contact de la quadrique et des feuillets de la feuillée des plans tangents menés d'un point extérieur à la quadrique, sont projetés de ce point suivant les génératrices rectilignes du cône du second degré des droites de contact de la feuillée du second degré. on dit que le cône du second degré est circonscrit à la quadrique.

3° Théorèmes.

1) Les plans tangents à une quadrique aux points de la conique d'intersection par un plan non tangent, sont les plans tangents d'un cône circonscrit à la quadrique.

2) Les points de contact d'une quadrique et des plans tangents d'un cône circonscrit d'un point extérieur, sont les points de la conique d'intersection de la quadrique par un plan.

Soient P le point d'intersection des plans tangents α, β, γ à la quadrique Q en trois points A, B, C de la conique θ suivant laquelle un plan non tangent ϖ coupe la quadrique; Γ le cône circonscrit du point P.– Les plans α, β, γ coupent le plan ϖ suivant les tangentes a, b, c aux points A, B, C à la conique θ et ils sont tangents au cône Γ le long des génératrices rectilignes 0A, 0B, 0C. La conique θ est donc l'intersection du cône par le plan ϖ; les génératrices rectilignes de ce cône joignent le point P aux points de la conique; elles sont tangentes en ces points à la quadrique et les plans tangents à celle-ci aux mêmes points sont tangents au cône Γ.

4° Définition.–

On dit que le cône Γ est circonscrit ou se raccorde à la quadrique Q et que celle-ci est inscrite ou se raccorde au cône Γ suivant la conique θ qu'on appelle la courbe de contact ou de raccordement des deux surfaces. Tout plan tel que le plan PAB qui passe par le point P et n'est tangent ni au cône Γ ni à la quadrique Q coupe celle-ci suivant une conique tangente aux droites PA, PB aux points A, B; il en résulte que le plan ϖ est le lieu des conjugués harmoniques du point P sur les cordes de la quadrique qui passent par le point P; (une corde d'une quadrique est tout segment rectiligne limité à deux points de la quadrique, si ces points ne sont pas sur une même génératrice rectiligne; on dit qu'une corde passe par un point, si la droite sur laquelle elle se trouve, passe par ce point).

5° Théorèmes.–

1) Si par deux points d'une conique on mène, en dehors du plan de la courbe, deux droites gauches, elles sont deux génératrices rectilignes d'un même mode d'une quadrique passant par la conique.

2) Si dans deux plans tangents d'un cône du second degré on mène deux droites gauches ne passant pas par le sommet du cône, ces droites sont deux génératrices rectilignes d'un même mode d'une quadrique inscrite au cône.

Il suffit de démontrer le premier théorème. Soient d_1, d_2 les droites gauches menées en dehors du plan ϖ de la conique γ par deux points A, B de celle-ci; a, b et α, β les droites et les plans qui projettent des points A, B et des droites d_1, d_2 un point quelconque C de la conique γ; g la droite suivant laquelle se coupent les plans α, β. La droite g passe par le point C et elle s'appuie sur les droites d_1, d_2. Les faisceaux engendrés par les droites a, b lorsque le point C passant la conique γ sont projectifs; les feuil=

lées d_1 (α), d_2 (β_2) décrites par les plans α, β sont perspectives à ces faisceaux, elles sont donc projectives entre elles et les positions successives de la droite g sont les génératrices rectilignes d'un même mode de la quadrique répondant à la question.

N.B.— Cette démonstration permet de considérer le théorème comme une réciproque de celui du 1°.

E. Quadriques à génératrices rectilignes réelles.—

99.— Une quadrique dont les génératrices rectilignes sont réelles prend le nom de quadrique réelle; on dit qu'elle est un paraboloïde hyperbolique ou un hyperboloïde à une nappe selon qu'elle est tangente ou n'est pas tangente au plan de l'infini.

1° **Paraboloïde hyperbolique.**— 1) Tout paraboloïde hyperbolique a deux génératrices rectilignes, une de chaque mode, dans le plan de l'infini; le point d'intersection de ces deux droites est le point de contact de la quadrique avec le plan de l'infini.

2) Soient PH un paraboloïde hyperbolique; A le point de contact avec le plan α de l'infini; d, g les génératrices rectilignes passant par le point A dans le plan α; O un point quelconque situé à distance finie; δ, γ, a le plan Od, le plan Og, la droite OA $\equiv \delta\gamma$; d_1, d_2, d_3..... les génératrices rectilignes de mode de d (le mode d); g_1, g_2, g_3,..... les génératrices rectilignes du mode de g (le mode g).

3) Les droites d_1, d_2, d_3,..... s'appuient sur la droite g, elles sont donc parallèles au plan γ; de même, les droites g_1, g_2, g_3...... s'appuient sur la droite d et elles sont parallèles au plan δ. Donc, *les génératrices rectilignes d'un même mode d'un paraboloïde hyperbolique sont parallèles à un même plan et elles coupent les génératrices rectilignes de l'autre mode en parties proportionnelles.*

4) Le plan γ s'appelle le plan directeur des génératrices rectilignes de mode d et le plan δ s'appelle le plan directeur des génératrices rectilignes de mode g. Les deux plans s'appellent les plans directeurs du paraboloïde hyperbolique considéré et quand ils sont perpendiculaires ce paraboloïde hyperbolique est dit équilatère.

5) *Tout plan ϖ qui est parallèle à la droite a et n'est parallèle ni au plan γ ni au plan δ, coupe le paraboloïde hyperbolique PH suivant une parabole dont la direction asymptotique est la droite a.* Le plan de l'infini étant tangent à la quadrique au point A de la parabole, celle-ci est la courbe de contact du paraboloïde et d'un cylindre circonscrit.

6) *Tout plan ϖ non parallèle à la droite a coupe le paraboloïde hyperbolique PH suivant une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles aux intersections du plan ϖ par les plans γ et δ.* Pour construire ces asymptotes, on détermine les génératrices rectilignes d', g' parallèles aux droites $\varpi\gamma$, $\varpi\delta$; par la droite d', on mène le plan γ' parallèle au plan γ; par la droite g', on mène le plan δ' parallèle au plan δ; les asymptotes sont les droites $\varpi\gamma'$, $\varpi\delta'$. L'hyperbole est la courbe de contact d'un cône circonscrit ayant son sommet sur la droite $\gamma'\delta'$.

7) *Quand trois droites deux à deux gauches sont réelles et parallèles à un même plan, une droite mobile qui les rencontre engendre un paraboloïde hyperbolique.*

8) *Quand une droite mobile s'appuie sur deux droites gauches réelles et reste parallèle à un plan réel, elle engendre un paraboloïde hyperbolique.*

2° **Hyperboloïde à une nappe.**— 1) L'hyperboloïde à une nappe H_1 coupe le plan de l'infini suivant une conique γ. Les plans tangents aux points de cette conique sont les plans asymptotes de l'hyperboloïde; ils sont tangents à un cône du second degré Γ dont le sommet O est situé à distance finie; ce cône s'appelle le cône asymptote de l'hyperboloïde à une nappe H_1.

2) Les conjugués harmoniques du point O sur les cordes de la quadrique menées par ce point étant dans le plan de l'infini, le point O est le milieu des cordes de l'hyperboloïde H_1 sur lesquelles il se trouve et on l'appelle le centre de l'hyperboloïde H_1.

3) Les plans réels tangents au cône Γ sont les plans qui projettent du point O les génératrices rectilignes

réelles de la quadrique; toutes ces génératrices rectilignes sont donc extérieures au cône Γ et l'hyperboloïde H_1 n'a aucun point réel à l'intérieur du cône asymptote.

4) Le plan tangent à l'hyperboloïde H_1 au point A de la conique γ est tangent au cône Γ suivant la génératrice rectiligne OA et il contient deux génératrices rectilignes d, g passant par le point A de l'hyperboloïde H_1; les droites d, g sont donc parallèles à la droite OA et elles sont symétriques l'une de l'autre par rapport à cette droite (voir ci-dessus 2°, 2); donc, les génératrices rectilignes d'un hyperboloïde à une nappe sont deux à deux parallèles à celles du cône asymptote de telle manière que tout plan tangent à ce cône coupe l'hyperboloïde à une nappe suivant les génératrices rectilignes parallèles à la génératrice rectiligne de contact et équidistantes de cette droite.

5) Une section plane de l'hyperboloïde à une nappe H_1 est une ellipse, une parabole ou une hyperbole selon que le plan parallèle au plan de la section par le point O est extérieur, tangent ou sécant au cône asymptote. Les coniques obtenues en coupant un hyperboloïde à une nappe et son cône asymptote par un même plan sont donc des coniques de même nom, de plus, si ces coniques sont des paraboles, elles ont la même direction asymptotique, et si elles sont des hyperboles, elles ont les mêmes asymptotes; ces asymptotes sont les droites suivant lesquelles le plan de l'hyperbole est rencontré par les plans tangents au cône asymptote le long des génératrices rectilignes contenues dans le plan mené par le sommet parallèlement au plan de l'hyperbole.

Quand trois droites deux à deux gauches sont réelles et ne sont pas parallèles à un plan, une droite mobile qui les rencontre engendre un hyperboloïde à une nappe.–

3° Exemples de quadriques réglées.– 1) Si A et A', B et B', C et C' sont trois couples de points réels pris sur les arêtes d'un trièdre, les droites AB', BC', CA' et A'B, B'C, C'A sont deux groupes de trois génératrices rectilignes des deux modes d'une quadrique réglée.

Par réciprocité, si α et α', β et β', γ et γ' sont trois couples de plans réels menés par les côtés d'un triangle, les droites αβ', βγ', γα' et α'β, β'γ, γ'α sont deux groupes de trois génératrices rectilignes des deux modes d'une quadrique réglée.

2) Quand on projette un dodécaèdre régulier sur un plan parallèle à une face, les dix arêtes formant le contour apparent sont deux groupes de cinq génératrices rectilignes des deux modes d'un hyperboloïde à une nappe.

3) Quand on projette un icosaèdre régulier sur un plan perpendiculaire à une diagonale passant par le centre, les dix arêtes formant le contour apparent sont deux groupes de cinq génératrices rectilignes des deux modes d'un hyperboloïde à une nappe.

4) Les quatre hauteurs d'un tétraèdre quelconque sont quatre génératrices rectilignes d'un même mode d'un hyperboloïde à une nappe; les perpendiculaires aux faces en leurs orthocentres sont quatre génératrices rectilignes de l'autre mode de la même quadrique.

Soient ABCD ≡ αβγδ le tétraèdre donné; AE la hauteur issue du sommet A; EF la perpendiculaire du point E sur la droite CD; AF la hauteur issue du sommet A dans le triangle ACD; H l'orthocentre de ce triangle; a, b, c, d les perpendiculaires aux faces du tétraèdre en leurs orthocentres.– Le plan AEF perpendiculaire à la droite CD est perpendiculaire au plan ACD et contient la perpendiculaire b à ce plan au point H; la droite AE s'appuie donc sur les droites b, c, d en des points situés à distance finie, alors qu'elle rencontre la droite a en un point rejeté à l'infini; les droites a, b, c, d n'étant pas parallèles à un même plan, la droite AE et, par suite, les quatre hauteurs du tétraèdre considéré sont quatre génératrices rectilignes d'un même mode d'un hyperboloïde à une nappe dont les droites a, b, c, d sont quatre génératrices rectilignes du second mode.

Remarques.– a.– Les plans perpendiculaires aux faces du tétraèdre par les droites joignant les orthocentres de ces faces aux pieds des hauteurs du tétraèdre sont quatre plans asymptotes de l'hyper=

boloïde à une nappe; ils se coupent donc en un même point qui est le centre de cette quadrique.
b.- Les plans menés par les arêtes AB, AC, AD du trièdre A perpendiculairement aux faces opposées se coupent suivant une droite qui rencontre les quatre hauteurs du tétraèdre. On obtient ainsi quatre autres génératrices rectilignes de même mode que a, b, c, d.
c.- Ces propriétés ne s'appliquent qui si deux des hauteurs du tétraèdre ne se coupent pas.- Quand les hauteurs h_A, h_B issues des sommets A, B se coupent, elles déterminent un plan perpendiculaire aux plans α, β et à la droite CD; les arêtes AB, CD du tétraèdre sont donc perpendiculaires l'une à l'autre.- Réciproquement, si ces deux arêtes sont perpendiculaires, le plan perpendiculaire à l'arête CD par l'arête AB est perpendiculaire aux plans α, β, il contient les hauteurs h_A, h_B et celles-ci se coupent; de même, le plan perpendiculaire à l'arête AB par l'arête CD est perpendiculaire aux plans γ, δ, il contient les hauteurs h_C, h_D et ces deux hauteurs se coupent également. Donc, si les hauteurs h_A, h_B se coupent, il en est de même des hauteurs h_C, h_D et, pour que cela se produise, il faut et il suffit que les arêtes AB, CD du tétraèdre soient perpendiculaires; de plus, les points d'intersection des droites h_A et h_B, h_C et h_D sont sur la perpendiculaire commune aux droites AB, CD. Ces points d'intersection ne seront confondus que si deux autres arêtes opposées du tétraèdre sont encore perpendiculaires l'une à l'autre, et alors les deux dernières arêtes opposées du tétraèdre sont également perpendiculaires; dans ce cas, le tétraèdre est dit orthocentrique, ses hauteurs se coupent au même point que les perpendiculaires communes aux arêtes opposées et les pieds des hauteurs sont les orthocentres des faces.

Chapitre VI: De la projectivité dans les formes élémentaires de première espèce.

§ I: Théorie générale.

A. Formes projectives.

100. 1° Il y a huit formes élémentaires de première espèce, trois du premier et cinq du second degré. Les trois formes du premier degré sont la ponctuelle du premier degré ou l'ensemble des points d'une droite appelée le support de la ponctuelle, la feuillée du premier degré ou l'ensemble des plans passant par une droite appelée le support de la feuillée, le faisceau du premier degré ou l'ensemble des droites d'un plan passant par un même point appelé le support du faisceau. Les cinq formes du second degré sont la ponctuelle du second degré ou l'ensemble des points d'une conique appelée le support de la ponctuelle, le faisceau du second degré ou l'ensemble des tangentes à une conique appelée le support du faisceau, le cône du second degré ou l'ensemble des génératrices rectilignes d'un cône du second ordre appelé le support du cône du second degré, la feuillée du second ordre ou l'ensemble des plans tangents d'un cône de seconde classe appelé le support de la feuillée, le système réglé ou l'ensemble des génératrices rectilignes d'un même mode d'une quadrique appelée le support du système réglé.

2° On représente par (A, B, C, X) le rapport anharmonique de quatre éléments arbitraires A, B, C, X d'une forme élémentaire quelconque φ; si on pose $(A, B, C, X) = X_1 : X_2$, X_1 et X_2 sont les coordonnées binaires de l'élément X de la forme φ rapportée aux éléments fondamentaux A, B, C. Il résulte de la manière dont on a étendu successivement la notion du rapport anharmonique et l'emploi des coordonnées binaires dans les huit formes élémentaires, que l'élément X de la forme φ est déterminé par le rapport $X_1 : X_2$ de ses coordonnées binaires, si on connait les éléments A, B, C; de plus, toute transformation de coordonnées binaires dans l'une ou l'autre des formes du second degré se réduit, comme dans le cas des formes du premier degré, à une substitution linéaire ayant un module différent de zéro.

3° On applique à toute les formes élémentaires la définition de la projectivité donnée pour les formes

fondamentales ou du premier degré. On dit que les formes élémentaires φ, φ' engendrées par les éléments X, X' sont projectives et on écrit.

$$(1) \qquad \varphi(X) \,\pi\, \varphi'(X')$$

toutes les fois que les coordonnées binaires des éléments X, X' s'expriment les unes en fonction des autres par les formules d'une substitution linéaire ayant un module différent de zéro; par exemple, quand on a

$$(2) \qquad X'_1 = aX_1 + bX_2 \quad \text{et} \quad X'_2 = cX_1 + dX_2,$$

les lettres a, b, c, d ayant des valeurs constantes vérifiant la condition

$$(3) \qquad D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

Les éléments X, X' sont appelés des éléments homologues ou correspondants et on peut aussi remplacer les équations (1) par l'équation bilinéaire

$$(4) \qquad a_{11} X_1 X'_1 + a_{12} X_1 X'_2 + a_{21} X_2 X'_1 + a_{22} X_2 X'_2 = 0,$$

dont le module est le déterminant différent de zéro.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

4° Il résulte de là, comme dans le cas des formes fondamentales, que :
1) La forme des équations de projectivité ne dépend pas du choix des coordonnées binaires.
2) Deux formes élémentaires projectives à une troisième sont projectives l'une à l'autre.
3) Pour que deux formes élémentaires soient projectives, il faut et il suffit qu'il existe entre leurs éléments une correspondance biunivoque telle que le rapport anharmonique de quatre éléments quelconques de l'une soit égal à celui des éléments homologues de l'autre.
4) Toute projectivité entre deux formes élémentaires est déterminée par trois couples d'éléments homologues.
5° Quand deux formes élémentaires projectives, de même nom, ont le même support, deux éléments homologues qui coïncident déterminent par leur réunion un élément double de la projectivité ou des formes considérées; la projectivité se réduit à la transformation identique dès qu'il y a plus de deux éléments doubles.
6° Si le déterminant D, (3) ou (6), était nul, on dirait encore que les équations (1) ou (4) définissent une projectivité singulière; il y aurait dans chacune des deux formes un élément correspondant, à lui seul, à tous les éléments de l'autre forme.
7° Il est utile d'observer que les considérations précédentes (2° à 6°) restent applicables si on adjoint aux huit formes élémentaires les formes involutives du premier degré, les divers faisceaux de coniques et les faisceaux de cônes dont les faisceaux de coniques sont des sections planes.

B. Formes perspectives.

101. 1° Il y a différents cas dans lesquels on dit que les formes élémentaires sont perspectives.
1) Soient x la tangente au point X de la conique Γ; S un point arbitraire et t une tangente arbitraire de cette conique. On désigne par $S(X)$ le faisceau du premier degré de support S engendré par la droite SX, par $t(x)$ la ponctuelle du premier degré de support t engendrée par le point tx, par

$\gamma(X)$ et $\gamma(x)$ la ponctuelle et le faisceau du second degré dont le support est la conique γ et qui sont engendrés par le point X et la droite x, lorsque le point X parcourt la conique, le point S et la droite t restant fixes. On dit que les formes $S(X)$ et $\gamma(X)$ sont perspectives, de même que les formes $t(x)$ et $\gamma(x)$, $\gamma(X)$ et $\gamma(x)$.

2) Soient ξ le plan tangent au cône du second degré Γ suivant la génératrice rectiligne x; s une génératrice rectiligne arbitraire et θ un plan tangent arbitraire du cône Γ. On désigne par $s(x)$ la feuillée du premier degré de support s engendrée par le plan sx, par $\theta(\xi)$ le faisceau du premier degré engendré par la droite $\theta\xi$ dans le plan θ et dont le support est le sommet du cône Γ, par $\Gamma(x)$ le cône du second degré de support Γ engendré par la droite x, par $\Gamma(\xi)$ la feuillée du second degré de support Γ engendrée par le plan ξ, lorsque la droite x décrit le cône Γ, la droite s et le plan θ restant fixes. On dit alors que les formes $s(x)$ et $\Gamma(x)$ sont perspectives, de même que les formes $\theta(\xi)$ et $\Gamma(\xi)$, $\Gamma(x)$, et $\Gamma(\xi)$.

3) Soient x la tangente au point X à la conique γ; S un point arbitraire et t une tangente arbitraire de la conique γ; O_1 un point extérieur au plan ϖ de la conique; Γ_1 le cône du second degré $O_1\gamma$; ξ_1 le plan tangent O_1x au cône Γ_1 suivant la génératrice rectiligne $x_1 \equiv O_1X$; s_1 la génératrice rectiligne O_1S et θ_1 le plan tangent O_1t. On dit que les quatre formes $S(X)$, $\gamma(X)$, $s_1(x_1)$, $\Gamma_1(x_1)$ sont perspectives deux à deux, de même que les quatre formes $t(x)$, $\gamma(x)$, $\theta_1(\xi_1)$, $\Gamma_1(\xi_1)$ et ainsi que les quatre formes $\gamma(X)$, $S(X)$, $\Gamma_1(x_1)$, $\Gamma_1(\xi_1)$, lorsque le point X décrit la conique γ.

4) On désigne par $Q(g)$, $Q(d)$ les systèmes réglés complémentaires formés par les deux modes de génératrices rectilignes de la quadrique Q; par $d(G)$ la ponctuelle du premier degré obtenue en coupant le système réglé $Q(g)$ par la génératrice rectiligne d de l'autre mode; par $d(\theta)$ la feuillée du premier degré projetant le système réglé $Q(g)$ de la droite d; par $g(D)$ la ponctuelle du premier degré obtenue en coupant le système réglé $Q(d)$ par la génératrice rectiligne de l'autre mode g; par $g(\delta)$ la feuillée du premier degré projetant le système réglé $Q(d)$ de la droite g. – On dit que le système réglé $Q(g)$ est perspectif à la ponctuelle $d(G)$ et à la feuillée $d(\theta)$, et que le système réglé $Q(d)$ est perspectif à la ponctuelle $g(D)$ et à la feuillée $g(\delta)$.

5) Soient $\gamma_1(G_1)$ la ponctuelle du second degré obtenue en coupant le système réglé $Q(g)$ par un plan quelconque ϖ; $\gamma_1(g_1)$ le faisceau du second degré formé des tangentes à la ponctuelle du second degré $\gamma_1(G_1)$; $\Gamma_2(g_2)$ le cône du second degré et $\Gamma_2(\theta_2)$ la feuillée du second degré de sommet O_2 circonscrits à la quadrique Q suivant la ponctuelle du second degré $\gamma_1(G_1)$. On dit que les cinq formes $Q(g)$, $\gamma_1(G_1)$, $\gamma_1(g_1)$, $\Gamma_2(g_2)$, $\Gamma_2(\theta_2)$ sont perspectives deux à deux.

6) En considérant le système réglé $Q(d)$, on obtiendra, de la même manière, cinq formes du second degré $Q(d)$, $\gamma_1(D_1)$, $\gamma_1(\delta_1)$, $\Gamma_2(d_2)$, $\Gamma_2(\delta_2)$ que l'on dira encore perspectives deux à deux.

2° Corollaires. 1) *Deux formes élémentaires perspectives sont projectives.*

2) *Deux formes élémentaires projectives sont perspectives dès que les conditions de perspectivité sont remplies par la position de leurs supports et par trois couples d'éléments homologues.*

G. Des formes projectives du second degré qui se correspondent dans deux formes fondamentales projectives de seconde ou de troisième espèce.

102. Théorèmes. 1°. *Quand deux formes fondamentales de seconde espèce sont projectives, les formes du second degré qui s'y correspondent sont projectives.*

Les formes fondamentales de seconde espèce sont les systèmes plans, et les gerbes, et une projectivité entre deux telles formes est une collinéation ou une réciprocité. Pour fixer les idées, soient ϖ et P' un système plan et une gerbe collinéaires; γ une ponctuelle du second degré définie dans le plan ϖ par les faisceaux projectifs $A(a)$, $B(b)$. Au faisceau $A(a)$ du système plan ϖ correspond une feuillée $a'(\alpha')$ projective à ce faisceau dans la gerbe P'; de même, au faisceau $B(b)$ correspond une feuillée $b'(\beta')$ qui lui est projective; les faisceaux $A(a)$ $B(b)$ étant projectifs et non perspectifs, il en est de

même des feuillées $a'(\alpha')$, $b'(\beta')$ et le lieu de la droite $\alpha'\beta'$ dans la gerbe P' est un cône du second degré Γ'. Ce cône est projectif à la ponctuelle du second degré γ, car les deux formes sont respectivement perspectives à des formes projectives, la feuillée $a'(\alpha')$ et le faisceau $A(a)$.

2° Réciproquement, quand deux formes du second degré, ponctuelles, faisceaux, cônes ou feuillées, sont projectives, elles établissent entre les formes fondamentales de seconde espèce auxquelles elles appartiennent, une projectivité dans laquelle elles se correspondent.

Pour fixer les idées, soient γ et Γ' une ponctuelle du second degré et un cône du second degré qui sont projectifs et qui sont placés dans le système plan ϖ et dans la gerbe P'; A,B deux points pris arbitrairement sur la ponctuelle du second degré; a', b' les génératrices rectilignes homologues des points A,B sur le cône Γ'; C un point mobile sur la ponctuelle du second degré; c' la génératrice rectiligne homologue de ce point sur le cône. On a

$$A(C) \,\pi\, B(C) \,\pi\, \gamma(C) \qquad \text{et} \qquad a'(c') \,\pi\, b'(c') \,\pi\, \Gamma'(c').$$

Mais on suppose

$$\gamma(C) \,\pi\, \Gamma'(c'),$$

on a donc

$$A(C) \,\pi\, a'(c') \qquad \text{et} \qquad B(C) \,\pi\, b'(c'),$$

avec la condition que la droite AB correspond au plan $a'b'$ dans ces deux projectivités; celles-ci établissent donc entre le plan ϖ et la gerbe P' une collinéation respondant à la question.

Cette collinéation est la seule pouvant répondre à la question. En effet, s'il y en avait une seconde, on pourrait considérer le plan ϖ comme le support de deux systèmes plans différents et collinéaires; ces systèmes plans auraient une infinité de points doubles non situés en ligne droite, les points de la ponctuelle du second degré γ, ce qui est absurde.

3° Quand deux formes fondamentales de troisième espèce sont projectives, les formes du second degré qui s'y correspondent sont projectives.

La démonstration de ce théorème est analogue à celle du premier théorème (1°), mais, dans le cas actuel, les formes correspondantes peuvent être des systèmes réglés.

D.- Formes projectives de même support.-

103. 1° **Eléments doubles.**- Si

$$(1) \qquad a_{11}X_1X'_1 + a_{12}X_1X'_2 + a_{21}X_2X'_1 + a_{22}X_2X'_2 = 0$$

est l'équation d'une projectivité entre deux formes élémentaires de même support rapportées aux mêmes coordonnées binaires, les éléments doubles sont déterminés par l'équation

$$(2) \qquad a_{11}X_1^2 + (a_{12}+a_{21})X_1X_2 + a_{22}X_2^2 = 0$$

et leurs propriétés générales sont les mêmes que dans le cas des formes fondamentales.

2° **Involution.**- Il y a involution lorsque les éléments homologues des deux formes projectives sont permutables ou se correspondent doublement. Dans ce cas, les coefficients a_{12}, a_{21} de l'équation (1) de projectivité sont égaux et l'équation s'écrit

$$(3) \qquad a_{11}X_1X'_1 + a_{12}(X_1X'_2 + X_2X'_1) + a_{22}X_2X'_2 = 0.$$

Les propriétés générales des formes du second degré en involution sont les mêmes que dans le cas des formes fondamentales; on considère encore les deux formes comme n'en faisant qu'une seule dite en involution ou involutive, et les éléments appelés d'abord des éléments homologues ou correspondants

s'appellent des éléments conjugués.

E. Applications.–

104. 1° Définition. Quand deux formes élémentaires projectives, de supports différents, sont placées de telle façon que deux éléments homologues coïncident, ces éléments déterminent par leur réunion un élément double des deux formes.

2° Théorèmes.

1) Quand une ponctuelle du premier degré et une ponctuelle du second degré sont projectives et ont deux points doubles, elles sont perspectives à un même faisceau du premier degré.

2) Quand une feuillée du premier degré et une feuillée du second degré sont projectives et ont deux feuillets doubles, elles sont perspectives à un faisceau du premier degré.

3) Quand un faisceau du premier degré et un faisceau du second degré sont projectifs et ont deux rayons doubles, ils sont perspectifs à une même ponctuelle du premier degré.

4) Quand un faisceau du premier degré et un cône du second degré sont projectifs et ont deux droites doubles, ils sont perspectifs à une même feuillée du premier degré.

Il suffit de démontrer le théorème (1). Soient u la droite et γ la conique servant de supports à deux ponctuelles projectives du premier et du second degré; A, B les points doubles; C, C' deux points homologues arbitraires; S le point où la droite CC' recoupe la conique γ. Le faisceau projetant du point S la ponctuelle du second degré donnée sur la conique γ est projectif à cette ponctuelle, et, par suite, il est également projectif à la ponctuelle du premier degré donnée sur la droite u. Mais les trois points A, B, C de la ponctuelle u sont sur les rayons homologues SA, SB, SC' du faisceau S; ces deux formes sont donc perspectives et le faisceau S répond à la question.

3° a. Théorèmes.

1) Quand une ponctuelle du premier degré et une ponctuelle du second degré, projectives l'une à l'autre, ne sont pas dans un même système plan et qu'elles ont un point double, elles sont perspectives à un même système réglé.

2) Quand une feuillée du premier degré et une feuillée du second degré, projectives l'une à l'autre, ne sont pas dans une même gerbe et qu'elles ont un plan double, elles sont perspectives à un même système réglé.

Il suffit de démontrer le théorème (1). Soient u la droite et γ la conique servant de supports aux deux ponctuelles considérées; A le point double; B et B', C et C' deux couples de points homologues des deux formes; Σ le système réglé formé des droites qui s'appuient sur la conique γ et sur les droites BB', CC' (voir le n° 98, 5°, 1); Σ' le système réglé complémentaire de Σ. En associant chaque génératrice rectiligne du système réglé Σ' au point où elle coupe la conique γ, le système réglé Σ' est perspectif à la ponctuelle du second degré donnée sur cette conique, et, par suite, il est projectif à la ponctuelle du premier degré donnée sur la droite u. Mais les trois points A, B, C de la ponctuelle u sont sur les génératrices rectilignes homologues du système réglé Σ'; la ponctuelle u est donc perspective au système réglé Σ' et celui-ci répond à la question.

b. Corollaires.

1) Quand une ponctuelle du premier degré et un cône du second degré sont projectifs et qu'un seul point de la ponctuelle est sur la génératrice rectiligne homologue du cône, les éléments homologues des deux formes sont dans les plans d'une feuillée du second degré perspective à la ponctuelle donnée.

2) Quand une feuillée du premier degré et un faisceau du second degré sont projectifs et qu'un seul plan de la feuillée passe par le rayon homologue du faisceau, les éléments homologues des deux formes se coupent aux points d'une ponctuelle du second degré perspective à la feuillée donnée.

On démontre la première propriété en coupant le cône par un plan qui passe par le point de

la ponctuelle situé sur la génératrice rectiligne homologue du cône et qui ne contient pas le support de la ponctuelle. L'intersection est une ponctuelle du second degré perspective au cône et, par suite, projective à la ponctuelle donnée; ces deux ponctuelles du premier et du second degré sont donc projectives à un même système réglé et la feuillée du second degré répondant à la question projette ce système réglé du sommet du cône donné.

3) Quand deux ponctuelles projectives du premier et du second degré, situées dans le même plan, ont un seul point double, les points homologues sont sur les rayons d'un faisceau du second degré perspectif à la ponctuelle du premier degré.

4) Quand deux faisceaux projectifs du premier et du second degré, situés dans le même plan, ont un seul rayon double, les rayons homologues se coupent sur une ponctuelle du second degré perspective au faisceau du premier degré.

On obtient la propriété (3) en coupant la figure relative à la propriété (1) par un plan mené arbitrairement par le support de la ponctuelle du premier degré considérée sur cette figure. La propriété (4) se déduit de la propriété (3) par une réciprocité entre deux systèmes plans. En projetant les propriétés (3) et (4) des points extérieurs à leurs plans, on trouve les propriétés suivantes de la gerbe.

5) Quand un faisceau du premier degré et un cône du second degré, projectifs l'un à l'autre, sont situés dans une même gerbe et n'ont qu'un élément double, les éléments homologues sont dans les feuillets d'une feuillée du second degré perspective au faisceau du premier degré.

6) Quand une feuillée du premier degré et une feuillée du second degré, projectives l'une à l'autre, sont situées dans une même gerbe et n'ont qu'un élément double, les éléments homologues se coupent suivant les génératrices rectilignes d'un cône du second degré perspectif à la feuillée du premier degré.

N.B. – On peut déduire ces deux propriétés des propriétés (1) et (2) sans passer par (3) et (4).

105. – 1° Théorème. Quand deux formes projectives du second degré et de même nom, deux ponctuelles du second degré, deux faisceaux du second degré, deux cônes du second degré, ou deux feuillées du second degré, ont quatre éléments doubles, elles coïncident.

Pour fixer les idées, soient A, B, C, D quatre points doubles de deux ponctuelles projectives du second degré dont les supports sont les coniques γ, γ'. Ces coniques sont donc déjà dans un même plan et les ponctuelles projectives données établissent, entre deux systèmes plans superposés, une collinéation dont les points A, B, C, D sont des points doubles ; trois de ces points n'étant pas en ligne droite, la collinéation se réduit à la transformation identique et les ponctuelles du second degré données coïncident, ce qui démontre le théorème, mais, d'où il résulte, en outre, que les coniques γ, γ' sont confondues.

2° Théorème. Deux formes du second degré de même nom, ponctuelles du second degré, feuillées du second degré, cônes du second degré, ou feuillées du second degré, projectives et de supports différents, peuvent avoir trois éléments doubles et alors elles sont perspectives à une même forme du premier degré.

Soient γ, γ' deux coniques circonscrites à un même quadrangle ABCD. En écrivant

$$\gamma(A,B,C) \,\overline{\wedge}\, \gamma'(A,B,C),$$

on établit une projectivité entre les ponctuelles du second degré dont les coniques γ, γ' sont les supports; les points A, B, C étant des points doubles, les ponctuelles du second degré sont perspectives, l'une et l'autre, au faisceau D(A, B, C) de support D; elles répondent donc à la question.

N.B. Il résulte du théorème précédent (1°) que le point D n'est pas un quatrième point double.

D'ailleurs, les deux ponctuelles du second degré étant perspectives au faisceau D(A,B,C), le point de γ' homologue du point D de γ est le point où la tangente en D à γ recoupe γ'; s'il coïncidait avec le point D, les deux coniques seraient tangentes au point D et elles seraient confondues l'une avec l'autre.

3° Théorèmes.

1) Quand une ponctuelle du second degré est projective à un cône du second degré ou à un système réglé et que quatre de ses points sont sur les droites homologues de l'autre forme, elle est perspective à celle-ci.

2) Quand une feuillée du second degré est projective à un faisceau du second degré ou à un système réglé et que quatre de ses plans passent par les droites homologues de l'autre forme, elle est perspective à celle-ci.

Il suffit de démontrer le théorème (1). Soient γ une ponctuelle du second degré; φ un cône du second degré ou un système réglé projectif à γ; A, B, C, D les points de γ situés sur les droites homologues a, b, c, d de φ; γ' la ponctuelle du second degré obtenue en coupant la forme φ par le plan de γ. La propriété résulte de ce que les ponctuelles du second degré γ, γ' projectives toutes deux à la forme φ, sont projectives l'une à l'autre et ont quatre points doubles, les points A, B, C, D, de sorte qu'elles coïncident.

3) Deux ponctuelles projectives du second degré qui ont deux points doubles et ne sont pas dans un même plan, sont perspectives à un même cône du second degré ou à un même système réglé.

4) Deux feuillées projectives du second degré qui ont deux feuillets doubles et ne sont pas dans la même gerbe, sont perspectives à un même faisceau du second degré ou à un même système réglé.

Il suffit de démontrer le théorème (3). Soient ϖ, ϖ' les plans de deux ponctuelles projectives du second degré γ, γ' dont A, B, C et C', D et D' sont deux points doubles et deux couples de points homologues. Deux cas sont à distinguer selon que les droites $c \equiv CC'$, $d \equiv DD'$ se coupent ou sont gauches. — a. — Dans le premier cas, le cône du second degré Γ qui projette la ponctuelle du second degré γ du point $S \equiv cd$ est déjà perspectif à cette ponctuelle; il est donc projectif à la ponctuelle du second degré γ' et, comme quatre de ses génératrices rectilignes SA, SB, SC, SD passent par les points homologues A, B, C', D' de la ponctuelle γ', il est également perspectif à celle-ci. — b. — Lorsque les droites CC', DD' sont gauches, soient x, y deux quelconques des droites qui les coupent et qui coupent en outre la conique servant de support à la ponctuelle du second degré γ. Les droites x, y sont des directrices d'un système réglé Σ perspectif à la ponctuelle du second degré γ et on prouve comme dans le cas du cône Γ, que ce système réglé est également perspectif à la ponctuelle du second degré γ'.

5) Quand deux coniques placées dans des plans différents ont deux points communs distincts, elles forment l'intersection de deux cônes du second degré ayant les mêmes plans tangents en ces points.

6) Quand deux cônes du second degré de sommets différents ont deux plans tangents communs distincts, ils se coupent suivant deux coniques tangentes aux deux plans en des mêmes points.

Il suffit de démontrer le théorème (5). Les ponctuelles projectives γ, γ' considérées dans le théorème précédent (3) établissent une collinéation entre les systèmes plans ayant les plans ϖ, ϖ' pour supports. Cette collinéation est également déterminée par les points homologues A et A, B et B, C et C', D et D'; elle se réduit à une perspectivité dès que les droites $c \equiv CC'$, $d \equiv DD'$ se coupent et on retrouve ainsi que, dans ce cas, les ponctuelles γ, γ' sont perspectives à un cône du second degré. Mais les points A, B étant des points doubles des systèmes plans collinéaires

ϖ, ϖ', la droite $u \equiv \varpi\varpi'$ est une droite double ; elle sera le support d'une ponctuelle double et les systèmes plans seront perspectifs, dès que les tangentes en deux points homologues tels que C, C' des ponctuelles du second degré γ, γ' se couperont en un point C_1 de la droite u. Dès lors, une projectivité étant déterminée entre les ponctuelles du second degré γ, γ' par trois couples A et A, B et B, C et C' de points homologues, la propriété résulte de ce que, après avoir pris le point C sur γ, le point C_1 est déterminé sur la droite u et le point C' peut occuper deux positions différentes sur γ'.

7) Quand deux coniques placées dans des plans différents sont tangentes au même point à l'intersection des deux plans, elles sont sur un cône du second degré.

8) Quand deux cônes du second degré de sommets différents sont tangents au même plan le long de la droite joignant leurs sommets, ils se coupent suivant une conique.

Il suffit de démontrer le premier théorème (7). — Lorsque les coniques γ, γ' situées dans des plans différents ϖ, ϖ' sont tangentes au même point A à la droite $u \equiv \varpi\varpi'$, si, par deux points arbitraires A_1, B_1 de cette droite, on mène les secondes tangentes B_1B et B_1B', C_1C et C_1C', les ponctuelles projectives du second degré

$$\gamma(A, B, C) \barwedge \gamma'(A', B', C')$$

établissent, entre les systèmes plans ayant les plans ϖ, ϖ' pour supports, une collinéation dans laquelle les points de la droite u sont des points doubles ; les deux systèmes plans sont donc perspectifs et leur centre de perspectivité est le sommet du cône du second degré répondant à la question.

4° Théorèmes.

1) Quand une ponctuelle du second degré est projective à un faisceau du premier degré et que quatre de ses points sont sur les rayons homologues du faisceau, les deux formes sont perspectives.

2) Quand un faisceau du second degré est projectif à une ponctuelle du premier degré et que quatre de ses rayons passent par les points homologues de la ponctuelle, les deux formes sont perspectives.

3) Quand un cône du second degré est projectif à une feuillée du premier degré et que quatre de ses génératrices rectilignes sont dans les plans homologues de la feuillée, les deux formes sont perspectives.

4) Quand une feuillée du second degré est projective à un faisceau du premier degré et que quatre de ses plans passent par les rayons homologues du faisceau, les deux formes sont perspectives.

Il suffit de démontrer le premier théorème (1). Soit

$$(1) \qquad S(a, b, c, d, x, \ldots) \barwedge \gamma(A, B, C, D, X, \ldots)$$

la projectivité donnée avec la condition que les rayons a, b, c, d du faisceau S passent par les points homologues A, B, C, D de la ponctuelle du second degré γ. Le faisceau qui projette cette ponctuelle d'un point arbitraire P de son support est projectif et non perspectif au faisceau S ; le lieu du point de rencontre X' des droites PX, x est une ponctuelle du second degré γ' projective à la ponctuelle du second degré γ ; mais ces deux ponctuelles ont quatre points doubles, les points A, B, C, D ; elles coïncident ; le point X est confondu avec le point X' ; tout rayon du faisceau S passe par le point homologue X de la ponctuelle du second degré γ, le point S est un point du support de cette ponctuelle et les deux formes sont perspectives.

5) Quand une ponctuelle du second degré est placée dans un des feuillets d'une feuil=

6) Quand une feuillée du second degré a pour sommet un point d'une ponctuelle du second

lée du second degré à laquelle elle est projective et que quatre autres plans de la feuillée passent par les points homologues de la ponctuelle, les deux formes sont perspectives à un même faisceau du premier degré; le sommet de la feuillée est un point du support de la ponctuelle et tout plan de la feuillée passe par le point homologue de la ponctuelle.

degré à laquelle elle est projective et que quatre autres points de la ponctuelle sont dans les plans homologues de la feuillée, les deux formes sont perspectives à un même faisceau du premier degré; tout point de la ponctuelle est dans le plan homologue de la feuillée et le plan de la ponctuelle est un des plans de la feuillée.

Il suffit de démontrer le théorème (5). La feuillée du second degré est perspective au faisceau du premier degré suivant lequel elle est coupée par le plan de la ponctuelle du second degré. Le faisceau est donc déjà projectif à la ponctuelle du second degré; mais quatre points de celle-ci sont sur les rayons homologues du faisceau, les deux formes sont donc perspectives.

Remarque. Si le plan de la ponctuelle du second degré n'est pas un des feuillets de la feuillée du second degré et si le support de celle-ci n'est pas un des points de la ponctuelle, tous les plans de la feuillée passent par les points homologues de la ponctuelle si cinq d'entre eux le font.

Soient $\sigma(A, B, C, D, E, X)$, $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \xi)$ les deux formes projectives données; A, B, C, D, E les points de la ponctuelle du second degré σ qui sont dans les plans homologues $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ de la feuillée du second degré φ; ϖ le plan de σ; P le sommet de φ; A_1 le second point d'intersection du plan α avec la conique servant de support à la ponctuelle σ; u une droite différente des droites A_1A et A_1P menée par le point A_1 dans le plan α. La droite u est le support d'une feuillée $u(A, B, C, D, E, X)$ perspective à la ponctuelle du second degré σ et, par suite, projective à la feuillée du second degré φ. Les feuillées projectives du premier degré u et du second degré φ ayant un plan double sont perspectives à un même système réglé Σ. Celui-ci perspectif à la feuillée du second degré φ est projectif à la ponctuelle du second degré σ; or, quatre points B, C, D, E de σ sont sur les rayons homologues de Σ; ces deux formes sont donc perspectives; chaque point de la ponctuelle du second degré σ est sur le rayon homologue de Σ et, par suite, dans le plan homologue de la feuillée du second degré φ.

Corollaires. a. Quand une ponctuelle du second degré est projective à un faisceau du second degré placé dans le même plan et que cinq points de la première forme sont sur les droites homologues de la seconde, tout point de la première forme est sur la droite homologue de la seconde forme.

b. Quand un cône du second degré est projectif à une feuillée du second degré de même sommet et que cinq génératrices rectilignes du cône sont dans les plans homologues de la feuillée, toute génératrice rectiligne du cône est dans le plan homologue de la feuillée.

106. 1° **Théorème.** Quand deux systèmes réglés complémentaires sont projectifs, ils sont perspectifs à une même ponctuelle du second degré et à une même feuillée du second degré.

Soient d_1 et g_1, d_2 et g_2, d_3 et g_3 trois couples de génératrices rectilignes assurant la projectivité des deux systèmes réglés complémentaires $Q(d)$, $Q(g)$; A_1, A_2, A_3 les points d'intersection des droites d_1 et g_1, d_2 et g_2, d_3 et g_3; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ les plans dé=

terminés par les mêmes droites; ϖ le plan $A_1A_2A_3$; P le point $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$. Les systèmes réglés $Q(d)$, $Q(g)$ coupent le plan ϖ suivant deux ponctuelles du second degré auxquelles ils sont respectivement perspectifs; ces ponctuelles sont donc projectives; mais elles ont le même support, la conique suivant laquelle le plan ϖ coupe la quadrique Q servant elle-même de support aux deux systèmes réglés, et elles ont trois points doubles, les points A, B, C; elles sont donc confondues en une seule qui répond à la question. – De même, les systèmes réglés $Q(d)$, $Q(g)$ sont projetés du point P suivant deux feuillées du second degré auxquelles ils sont respectivement perspectifs; ces feuillées sont donc projectives; mais elles ont le même support, le cône du second degré de sommet P circonscrit à la quadrique Q, et elles ont trois feuillets doubles, les plans α, β, γ; elles sont donc confondues en une seule qui répond à la question.

2° Corollaire. Pour que les génératrices rectilignes d_1, d_2, d_3, d_4 d'un même mode de la quadrique Q coupent respectivement les génératrices rectilignes g_1, g_2, g_3, g_4 de l'autre mode en quatre points d'un même plan, ou, pour qu'elles déterminent avec celles-ci quatre plans passant par un même point, il faut et il suffit que les rapports anharmoniques (d_1, d_2, d_3, d_4), (g_1, g_2, g_3, g_4) soient égaux.

107. 1° Théorèmes.

1) Les deux ponctuelles projectives du second degré

$$\gamma(A_1, A_2, A_3 \ldots), \ \gamma(B_1, B_2, B_3 \ldots)$$

ont la conique γ pour support commun; si elles sont en involution, la droite A_iB_i joignant deux points homologues quelconques passe par un point fixe (le pôle de l'involution); s'il n'y a pas involution, la droite A_iB_i engendre un faisceau du second degré; dans les deux cas, le point d'intersection C_{ij} des droites A_iB_j, A_jB_i $(i \neq j)$ décrit une droite fixe (la polaire de l'involution ou l'axe de projectivité des deux ponctuelles).

2) Les deux faisceaux projectifs du second degré

$$\gamma(a_1, a_2, a_3, \ldots), \ \gamma(b_1, b_2, b_3 \ldots)$$

ont la conique γ pour support commun; s'ils sont en involution, le point d'intersection a_ib_i de deux droites homologues quelconques décrit une droite fixe (la polaire de l'involution); s'il n'y a pas involution, le point a_ib_i engendre une ponctuelle du second degré; dans les deux cas, la droite c_{ij} joignant les points a_ib_j, a_jb_i $(i \neq j)$ passe par un point fixe (le pôle de l'involution ou le centre de projectivité des deux faisceaux).

3) Les deux cônes projectifs du second degré

$$\Gamma(a_1, a_2, a_3 \ldots), \ \Gamma(b_1, b_2, b_3 \ldots)$$

ont le cône Γ pour support commun; s'ils sont en involution, le plan a_ib_i de deux droites homologues quelconques passe par une droite fixe (la polaire de l'involution); s'il n'y a pas involution, le plan a_ib_i engendre une feuillée du second degré; dans les deux cas, la droite c_{ij}, intersection des plans a_ib_j, a_jb_i $(i \neq j)$, décrit un plan fixe (le plan polaire de l'involution ou le plan

4) Les deux feuillées projectives du second degré

$$\Gamma(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots), \ \Gamma(\beta_1, \beta_2, \beta_3 \ldots)$$

ont le cône Γ pour support commun; si elles sont en involution, la droite $\alpha_i\beta_i$, intersection de deux plans homologues quelconques, est dans un plan fixe (le plan polaire de l'involution); s'il n'y a pas involution, la droite $\alpha_i\beta_i$ engendre un cône du second degré; dans les deux cas, le plan γ_{ij} des droites $\alpha_i\beta_j$, $\alpha_j\beta_i$ $(i \neq j)$ passe par une droite fixe (la polaire de l'involution ou

de projectivité des deux cônes du second degré). l'axe de projectivité des deux feuillées du second degré.

Il suffirait de démontrer le théorème (1) dont les trois autres peuvent se déduire par des projectivités convenables; mais il est facile d'établir les quatre théorèmes en se servant d'une seule figure, aussi bien dans le cas où les formes sont en involution que dans celui où il n'y a pas involution. En effet, si deux formes du second degré sont projectives, il en est de même des formes qui leur sont perspectives; on peut donc sans troubler la généralité de la démonstration, supposer que les faisceaux du second degré considérés dans le second théorème sont formés des tangentes aux points homologues des ponctuelles du second degré données dans le premier théorème, et, en outre, que les cônes et les feuillées du second degré des théorèmes (3) et (4) projettent les ponctuelles et les faisceaux du second degré d'un point extérieur au plan de la conique servant de support à ces formes.

1) Préliminaires. - Soient $\gamma(A_i)$, $\gamma(B_i)$ deux ponctuelles projectives du second degré ayant pour support commun la conique γ et $\gamma(a_i)$, $\gamma(b_i)$ les faisceaux du second degré décrits par les tangentes a_i, b_i à la conique γ aux points A_i, B_i. Par deux points homologues arbitraires A_1, B_1 on mène deux droites gauches quelconques d_1, d'_1 en dehors du plan ϖ de la conique γ; elles sont deux génératrices d'un système réglé $\varrho(d)$ dont le système réglé complémentaire $\varrho(g)$ est formé des droites qui les coupent ainsi que la conique γ, et celle-ci est donc l'intersection du plan ϖ et de la quadrique ϱ servant de support aux deux systèmes réglés. - Les plans tangents α_i, β_i à la quadrique ϱ aux points A_i, B_i sont les plans des génératrices rectilignes d_i et g_i, d'_i et g'_i qui se coupent en ces points; ils engendrent deux feuillées du second degré $\Gamma(\alpha_i)$, $\Gamma(\beta_i)$ ayant pour support commun le cône du second degré Γ circonscrit à la quadrique ϱ suivant la conique γ; si P est le sommet du cône, les droites $a'_i \equiv PA_i$, $b'_i \equiv PB_i$ sont les génératrices rectilignes de contact des plans α_i, β_i et du cône. - Les formes

$$\gamma(A_i), \gamma(B_i), \gamma(a_i), \gamma(b_i), \Gamma(a'_i), \Gamma(b'_i), \Gamma(\alpha_i), \Gamma(\beta_i), \varrho(d_i), \varrho(g_i), \varrho(d'_i), \varrho(g'_i)$$

sont projectives entre elles et les quatre théorèmes sont relatifs à celles des huit premières qui deux à deux ont le même nom.

Soient D_i, D'_i les points d'intersection des droites d_i et g'_i, d'_i et g_i ou les points de contact de la quadrique ϱ avec les plans tangents δ_i, δ'_i déterminés par les mêmes droites. - La droite A_iB_i est commune aux quatre plans ϖ, $a'_i b'_i$, δ_i, δ'_i et la droite $\alpha_i\beta_i$ passe par les quatre points P, $a_i b_i$, D_i, D'_i. - Ayant $\varrho(d_i) \barwedge \varrho(g'_i)$ et $\varrho(d'_i) \barwedge \varrho(g_i)$, les points D_i, D'_i décrivent des ponctuelles du second degré $\gamma_1(D_i)$, $\gamma'_1(D'_i)$ dont les supports sont les coniques γ_1, γ'_1 suivant lesquelles la quadrique ϱ est tangente aux cônes du second degré Γ_1, Γ'_1 supports des feuillées du second degré $\Gamma_1(\delta_i)$, $\Gamma'_1(\delta'_i)$ engendrées par les plans δ_i, δ'_i. - Soient ϖ_1, ϖ'_1 et P_1, P'_1 les plans des coniques γ_1, γ'_1 et les sommets des cônes Γ_1, Γ'_1.

2) Premier cas: il y a involution. - Dans ce cas, les points A_i, B_i sont permutables; il en est de même des droites a_i, b_i, des plans α_i, β_i, des droites a'_i, b'_i, des droites d_i, d'_i, des droites g_i, g'_i, des points D_i, D'_i et des plans δ_i, δ'_i. Les coniques γ_1, γ'_1 se confondent, de même, les plans ϖ_1, ϖ'_1, les cônes Γ_1, Γ'_1 et les points P_1, P'_1; on ne doit conserver que les notations γ_1, ϖ_1, P_1, P'_1.

La droite A_iB_i du plan ϖ est l'intersection des plans δ_i, δ'_i tangents au cône Γ_1; elle passe par le sommet P_1 de ce cône; le point P_1 est dans le plan ϖ et il est le point fixe de ce plan par lequel passe la droite A_iB_i, en même temps que la droite $p_1 \equiv PP_1$ est la droi-

te fixe issue du point P par laquelle passe le plan $a'_i\, b'_i$.
La droite $\alpha_i \beta_i$ issue du point P joint les points D_i, D'_i de la conique γ_1; elle est dans le plan ϖ_1 de cette conique; le plan ϖ_1 passe par le point P et il est le plan fixe passant par le point P dans lequel est la droite $\alpha_i\beta_i$, en même temps que la droite $p \equiv \varpi\varpi_1$ est la droite fixe du plan ϖ décrite par le point $a_i b_i$.
Soient A_j, B_j deux points conjugués, différents des points A_i, B_i, de la ponctuelle involutive du second degré $\gamma(A_i, B_i)$; affectons de l'indice j les éléments qui leur correspondent. Les droites A_iB_j, A_jB_i sont les intersections du plan ϖ et des plans des droites d_i et g'_j, d_j et g'_i qui coupent le plan ϖ_1 suivant la droite D_iD_j, comme aussi des plans des droites d'_j et g_i, d'_i et g_j qui coupent le plan ϖ_1 suivant $D'_i\,D'_j$. Le point C_{ij} commun aux droites A_iB_j, A_jB_i est donc le point où les droites D_iD_j, $D'_iD'_j$ du plan ϖ_1 rencontrent le plan ϖ; le lieu de ce point est la droite $p \equiv \varpi\varpi_1$ qui est déjà le lieu du point a_ib_i; en même temps, le plan P_p ou ϖ_1, déjà le lieu de la droite $\alpha_i\beta_i$, est aussi le lieu de la droite c'_{ij}, intersection des plans $a'_i b'_j$, $a'_j b'_i$.
Les points $a_i b_j$, $a_j b_i$ de la droite c_{ij} sont les points d'intersection du plan ϖ et des droites $\alpha_i\beta_j$, $\alpha_j\beta_i$ selon lesquelles se coupent les plans $\alpha_i \equiv d_i g_i$ et $\beta_j \equiv d'_j g'_j$, $\alpha_j \equiv d_j g_j$ et $\beta_i \equiv d'_i g'_i$, tangents au cône Γ le long des droites a'_i et b'_j, a'_j et b'_i. Le plan γ_{ij} des droites $\alpha_i\beta_j$, $\alpha_j\beta_i$ passe donc par le sommet P du cône Γ; mais il passe en outre par les points $d_i\, g'_j$, $d_j\, g'_i$ communs aux plans δ_i et δ_j, et par les points $d'_i\, g_i$, $d'_j\, g_i$ communs aux plans δ'_i, δ'_j; il contient donc les droites $\delta_i\delta_j$, $\delta'_i\delta'_j$; celles-ci étant les intersections de plans tangents au cône Γ_1, il passe par le sommet P_1 de ce cône; dès lors, le point P_1, par lequel passe déjà la droite A_iB_i, est aussi le point fixe du plan ϖ par lequel passe la droite c_{ij}; en même temps, la droite $p_1 \equiv PP_1$, par laquelle passe déjà le plan $a'_i\, b'_i$, est aussi la droite fixe issue du point P par laquelle passe le plan γ_{ij}.
N.B. – Les plans ϖ, ϖ_1 n'étant pas tangents à la quadrique Q, la droite $p \equiv \varpi\varpi_1$ n'est pas une génératrice rectiligne de la quadrique; tout point E où elle rencontre la quadrique est un point commun aux coniques γ, γ_1. Le plan ε tangent à la quadrique au point E est tangent aux cônes Γ, Γ_1 le long des droites PE, P_1E; il coupe le plan ϖ suivant la droite P_1E tangente à la conique γ au point E. La droite P_1E est une position de la droite A_iB_i pour laquelle les points A_i, B_i se confondent en un seul, le point E; ce point est donc un point double de l'involution $\gamma(A_i, B_i)$, la droite $e \equiv P_1E$ est un rayon double de l'involution $\gamma(a_i, b_i)$, la droite $e' \equiv PE$ est une droite double de l'involution $\Gamma(a'_i, b'_i)$ et le plan $\varepsilon \equiv PP_1E$ est un plan double de l'involution $\Gamma(\alpha_i, \beta_i)$. La droite p joint donc les points doubles E, F de l'involution $\gamma(A_i, B_i)$ ou les points de contact des rayons doubles e, f de l'involution $\gamma(a_i, b_i)$; le point P_1 est l'intersection de ces rayons doubles ou des tangentes à la conique γ aux points doubles de l'involution $\gamma(A_i, B_i)$; le plan ϖ_1 est le plan des droites doubles e', f' de l'involution $\Gamma(a', b')$ ou des droites de contact des feuillets doubles ε, φ de l'involution $\Gamma(\alpha_i, \beta_i)$; la droite p_1 est l'intersection de ces feuillets doubles ou des plans tangents au cône Γ suivant les rayons doubles de l'involution $\Gamma(a'_i, b'_i)$.
Les droites P_1E, P_1F étant tangentes à la conique γ, la droite $p \equiv EF$ passe par le conjugué harmonique du point P_1 par rapport aux points A_i, B_i; on retrouve cette propriété, en observant que, les points A_i, A_j étant permutables, la droite p, qui contient le point commun aux droites $A_i\, B_j$, $A_j\, B_i$, contient aussi le point commun aux droites $A_i\, A_j$, $B_i B_j$, et la propriété résulte des propriétés harmoniques du quadrilatère et du quadrangle. – De même, les droites a_i, a_j étant permutables, les droites des points $a_i\, b_j$ et $a_j\, b_i$, $a_i\, a_j$ et $b_i\, b_j$ passent l'une comme l'autre par le point P_1 qui est donc sur la droite conjuguée harmonique de la droite p par rapport aux droites a_i, b_i.
Les points G, H où la droite p_1 coupe la quadrique Q sont conjugués harmoniques par rap=

port aux points P, P_1 ; les droites EG et EH, FG et FH sont les génératrices rectilignes de la quadrique dans les plans tangents ε, φ ; la droite p est donc l'intersection des plans tangents EGF, EHF aux points G, H à la quadrique.
Les droites EP, FP sont tangentes à la conique γ_1 aux points E, F. Les tangentes EP_1, EP au point E aux coniques γ, γ_1 forment un faisceau harmonique avec les génératrices rectilignes EG, EH menées par le point E sur la quadrique ; on dit qu'elles sont des tangentes conjuguées, il en est de même des tangentes FP_1, FP aux deux coniques au point F.
Le faisceau $E(G, H, P, P_1)$ étant harmonique, la droite EP_1 ne change pas quand le point P glisse sur la droite EP ; cette droite EP_1 est donc l'intersection des plans des coniques de contact de la quadrique avec les cônes circonscrits ayant leurs sommets sur la droite EP et celle-ci est l'intersection des plans des coniques de contact de la quadrique avec les cônes circonscrits ayant leurs sommets sur la droite EP_1.

3) Second cas : il n'y a pas involution. – Les points $A_i B_i$ ne sont pas permutables.
Tout point $A_i \equiv B_k$ de la conique γ est l'intersection de deux droites distinctes $A_i B_i$, $A_k B_k$; les les droites telles que $A_i B_i$ ne passent donc plus par un point fixe et les plans tels que $a'_i b'_i$ ne passent plus par une droite fixe. Toute tangente $a_i \equiv b_k$ de la conique γ contient deux points distincts $a_i b_i$, $a_k b_k$; les points tels que $a_i b_i$ ne sont plus sur une droite fixe et les droites telles que $\alpha_i \beta_i$ ne sont plus dans un plan fixe. Mais la droite $\alpha_i \beta_i$ contient les points D_i, D'_i des coniques γ_1, γ'_1 ; ces coniques sont donc distinctes ; il en est de même des cônes Γ_1, Γ'_1, des plans ϖ_1, ϖ'_1 et des points P_1, P'_1 ; le sommet P du cône Γ est extérieur aux plans ϖ_1, ϖ'_1 et les sommets P_1, P'_1 des cônes Γ_1, Γ'_1 sont extérieurs au plan ϖ.
La droite $A_i B_i$ est l'intersection du plan ϖ et des plans δ_i, δ'_i ; les feuillées du second degré $\Gamma_1(\delta_i)$, $\Gamma'(\delta'_i)$ coupent donc le plan ϖ suivant le même faisceau du second degré formé des positions successives de la droite $A_i B_i$; le support de ce faisceau est la conique γ', intersection commune des cônes Γ_1, Γ'_1 par le plan ϖ ; en même temps, le plan $a'_i b'_i$ engendre une feuillée du second degré dont le support est le cône du second degré Γ' projetant la conique γ' du point P.
Le lieu de la droite $\alpha_i \beta_i$ est le cône du second degré Γ'' projetant à la fois les ponctuelles du second degré $\gamma_1(D_i)$, $\gamma'_1(D'_i)$ du point P et le lieu du point $a_i b_i$ est la ponctuelle du second degré dont le support est la conique γ'', intersection du cône Γ'' et du plan ϖ.
On démontre, comme dans le cas de l'involution que le lieu du point C_{ij} est la droite p suivant laquelle les plans ϖ_1, ϖ'_1 coupent l'un et l'autre le plan ϖ et que la droite C_{ij} passe par le point P_0 où la droite p_1 contenant à la fois les points P, P_1, P'_1 rencontre le plan ϖ ; en même temps, le plan P_p est le lieu de la droite c'_{ij} et le plan γ_{ij} passe par la droite $p_1 \equiv PP_0$.
N.B. – Comme dans le cas de l'involution, la droite p n'est pas une génératrice rectiligne de la quadrique Q ; tout point E où elle coupe cette dernière est un point commun aux coniques $\gamma, \gamma_1, \gamma'_1$; le plan ε tangent à la quadrique au point E coupe les plans $\varpi, \varpi_1, \varpi'_1$ suivant les tangentes e, e_1, e'_1 au point E aux trois coniques ; ce plan ε est tangent aux trois cônes $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma'_1$ le long des droites PE, P_1E, P'_1E qui sont les tangentes conjuguées des tangentes e, e_1, e'_1 pour la quadrique ; le plan ε appartient aux deux feuillées $\Gamma_1(\delta_i)$, $\Gamma'_1(\delta'_i)$ et la droite e est une position de la droite $A_i B_i$ pour laquelle les points A_i, B_i se confondent en un seul, le point E ; celui-ci et la droite e sont donc des éléments doubles des projectivités $\gamma(A_i) \,\pi\, \gamma(B_i)$, $\gamma(a_i) \,\pi\, \gamma(b_i)$; le plan ε et la droite $e' \equiv PE$ sont des éléments doubles des projectivités $\Gamma(\alpha_i) \,\pi\, \Gamma(\beta_i)$, $\Gamma(a'_i) \,\pi\, \Gamma(b'_i)$. De plus, il résulte des définitions des coniques γ', γ''

que ces coniques sont tangentes à la droite e au point E ; elles sont donc, en ce point, tangentes l'une à l'autre et à la conique γ.

Lorsque la projectivité $\gamma(A_i) \pi \gamma(B_i)$ a deux points doubles distincts, E, F, ils sont les points d'intersection de la droite p commune aux plans $\varpi, \varpi_1, \varpi'_1$ et des coniques $\gamma, \gamma_1, \gamma'_1$; les plans tangents ε, φ en ces points à la quadrique Q et aux cônes $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma'_1$ le long des droites PE, P_1E, P'_1E et PF, P_1F, P'_1F se coupent suivant la droite p_1 des points P, P_1, P'_1 ; les tangentes e, f aux coniques $\gamma, \gamma', \gamma''$ aux points E, F passent donc, l'une et l'autre par le point P_0 où cette droite p_1 rencontre le plan ϖ et par lequel passent déjà les droites telles que c_{ij}.

Quand la projectivité $\gamma(A_i) \pi \gamma(B_i)$ n'a qu'un point double E, la projectivité $\gamma(a_i) \pi \gamma(b_i)$ n'a qu'une droite double, la tangente e au point E à la conique γ ; la projectivité $\Gamma(a'_i) \pi \Gamma(b'_i)$ n'a qu'une droite double, la droite $e' \equiv PE$, et la projectivité $\Gamma(\alpha_i) \pi \Gamma(\beta_i)$ n'a qu'un plan double, le plan ε. La droite e coïncide avec l'intersection p des plans $\varpi, \varpi_1, \varpi'_1$ et avec les tangentes e_1, e'_1 aux coniques γ_1, γ'_1 au point E ; elle est le lieu du point C_{ij} et le plan ε est le lieu de la droite c'_{ij} ; les tangentes conjuguées EP, EP_1, EP'_1 des tangentes e, e_1, e'_1 confondues avec la droite p sont elles-mêmes confondues en une seule qui coïncide donc avec la droite p_1 ; le point P_0 est confondu avec le point E qui est donc le point fixe par où passe la droite c_{ij}, de même que la droite $e' \equiv PE$ est la droite fixe par laquelle passe le plan γ_{ij}. Les coniques $\gamma, \gamma', \gamma''$ sont tangentes à la droite e au point E ; or il est facile de démontrer que tout point commun à deux de ces coniques est nécessairement un point commun aux coniques γ_1, γ'_1 ; le point E est donc le seul point commun aux trois coniques qui ont ainsi en ce point un contact du troisième ordre.

4) Démonstration analytique. – La démonstration analytique suivante du premier théorème est applicable aux trois autres en changeant convenablement la signification des coordonnées. On distingue deux cas selon que les points doubles de la projectivité $\gamma(A_i) \pi \gamma(B_i)$ sont distincts ou confondus.

a. – S'il y a deux points doubles distincts E, F et si P est le point de rencontre des tangentes en ces points à la conique γ, on prend le triangle PEF comme triangle fondamental des coordonnées ternaires et on donne au quatrième point fondamental de ces coordonnées une position telle que l'équation ponctuelle de la conique γ soit

$$X_1^2 - 2X_2X_3 = 0.$$

En mettant les coordonnées des points A_i, B_i sous la forme

$$2\lambda_i, 2, \lambda_i^2 \qquad \text{et} \qquad 2\mu_i, 2, \mu_i^2,$$

la relation de projectivité

$$a\lambda_i\mu_i + b\lambda_i + c\mu_i + d = 0\ ,$$

donnée entre ces points, doit être vérifiée par les valeurs 0 et 0, ∞ et ∞ des paramètres λ_i, μ_i relatives aux points doubles E, F. Cette relation se réduit donc à

$$\mu_i = k\lambda_i$$

où k a une valeur constante, de sorte que les coordonnées des points A_i, B_i deviennent

$$2\lambda_i, 2, \lambda_i^2 \qquad \text{et} \qquad 2k\lambda_i, 2, k^2\lambda_i^2.$$

L'équation de la droite A_iB_i est

$$(1+k)\lambda_i X_1 - k\lambda_i^2 X_2 - 2X_3 = 0.$$

Quand il y a involution, k est égal à -1, cette équation se réduit à

$$\lambda_i^2 X_2 - 2X_3 = 0$$

et la droite $A_i B_i$ passe par le point P.
Quand il n'y a pas involution, k est différent de -1 et l'enveloppe de la droite $A_i B_i$ est la conique

$$(1+k)^2 X_1^2 - 8k X_2 X_3 = 0$$

tangente à la conique k aux points E, F.
La droite $A_i B_j$ d'équation

$$(\lambda_i + k\lambda_j) X_1 - k\lambda_i \lambda_j X_2 - 2X_3 = 0$$

coupe la droite EF en un point dont les coordonnées $0, -2, k\lambda_i\lambda_j$ ne changent pas quand on permute i avec j; la droite EF est donc le lieu du point de rencontre C_{ij} des droites $A_i B_j$, $A_j B_i$.
N.B. – α) Des valeurs des coordonnées des points A_i, B_i, il résulte que les équations de la collinéation déterminée dans le plan ϖ de la conique γ par la projectivité $\gamma(A_i)\pi\gamma(B_i)$ sont

$$X_1' = kX_1, \qquad X_2' = X_2, \qquad X_3' = k^2 X_3.$$

Quand la projectivité donnée sur la conique γ est une involution, $k=-1$ et la collinéation se réduit à l'homologie harmonique de centre P et d'axe EF; dans les autres cas, les points P, E, F sont les seuls points doubles de la collinéation.
β) Les coordonnées de la tangente b_i à la conique γ au point B_i sont

$$2k\lambda_i, \qquad -k^2\lambda_i^2, \qquad -2.$$

Les équations de la réciprocité déterminée dans le plan ϖ par la projectivité

$$\gamma(A_i)\pi\gamma(b_i)$$

sont donc

$$x_1' = kX_1, \qquad x_2' = -k^2 X_3, \qquad x_3' = -X_2;$$

cette réciprocité se réduit à la polarité dont la conique directrice a pour équation

$$X_1^2 + 2X_2X_3 = 0$$

lorsque $k=-1$.
b. – Si les points doubles de la projectivité donnée sur la conique γ sont confondus en un seul au point E, on prend les éléments fondamentaux des coordonnées ternaires pour que l'équation de la conique γ soit

$$X_1^2 - 2X_2X_3 = 0,$$

le point E étant le troisième point fondamental $(0,0,1)$.
On peut encore mettre les coordonnées des points A_i, B_i sous la forme

$$2\lambda_i, 2, \lambda_i^2 \qquad \text{et} \qquad 2\mu_i, 2, \mu_i^2.$$

La relation de projectivité

$$a\lambda_i\mu_i + b\lambda_i + c\mu_i + d = 0$$

entre les points $A_i B_i$ doit admettre deux fois la solution $\lambda_i = p_i = \infty$; elle se réduit donc à

$$p_i = \lambda_i + k,$$

et les coordonnées des points A_i, B_i deviennent

$$2\lambda_i,\ 2,\ \lambda_i^2 \qquad \text{et} \qquad 2(\lambda_i + k),\ 2,\ (\lambda_i + k)^2.$$

La droite $A_i B_i$, dont l'équation est

$$(2\lambda_i + k) X_1 - \lambda_i(\lambda_i + k) X_2 - 2X_3 = 0,$$

enveloppe la conique

$$4X_1^2 + k^2 X_2^2 - 8X_2X_3 = 0.$$

qui a un contact de troisième ordre avec la conique γ au point E.
La droite $A_i B_j$, dont l'équation est

$$(\lambda_i + \lambda_j + k) X_1 - \lambda_i(\lambda_j + k) X_2 - 2X_3 = 0.$$

coupe la droite $X_2 = 0$ en un point dont les coordonnées restent les mêmes quand on permute les indices i et j; la tangente à la conique γ au point E est donc le lieu du point C_{ij} commun aux droites $A_i B_j$, $A_j B_i$.

N.B.– α) Dans le cas actuel, les équations de la collinéation déterminée par la projectivité donnée sur la conique γ sont

$$X_1' = X_1 + kX_2, \qquad X_2' = X_2, \qquad X_3' = kX_1 + \tfrac{1}{2}k^2X_2 + X_3.$$

Le point E et la tangente en ce point à la conique γ sont les seuls éléments doubles de cette collinéation.

β) Les coordonnées de la tangente b_i au point B_i à la conique γ sont

$$2(\lambda_i + k), \qquad -(\lambda_i + k)^2, \qquad -2.$$

Les équations de la réciprocité déterminée dans le plan ϖ de la conique γ par la projectivité

$$\gamma(A_i) \,\pi\, \gamma(b_i)$$

sont donc

$$x_1' = X_1 + kX_2, \qquad x_2' = -kX_1 - \tfrac{1}{2}k^2X_2 - X_3, \qquad x_3' = -X_2.$$

§ II: Propriétés polaires des coniques.–

A.– Polaire d'un point et pôle d'une droite par rapport à une conique.

108.– **Définitions.**– 1° Soient ϖ un plan quelconque, propre ou impropre, réel ou imaginaire; γ une conique réelle ou imaginaire, non décomposable en droites, située dans le plan ϖ; E, F les points de contact des tangentes e, f menées du point A à la conique γ; a la droite EF.– La droite a s'appelle la polaire du point A et celui-ci, le pôle de la droite a pour la conique γ.

2° Lorsque le point A est sur la conique γ, les droites e, f se confondent avec la tangente au point A à la conique γ; les points E, F coïncident avec le point A; la droite EF ou a devient, comme les droites e, f, la tangente à la conique γ au point A. La polaire d'un point d'une conique

est donc la tangente à la conique en ce point et celui-ci est le pôle de la tangente.

3° Le point A n'étant pas sur la conique γ, soient X et X', Y et Y',..... les points d'intersection de la conique γ avec les droites menées par le point A dans le plan ϖ; X_1, Y_1,...... les points où ces droites coupent la droite a; x et x', y et y',..... les tangentes à la conique γ aux points X et X', Y et Y',......; x_1, y_1,..... les droites joignant le point A aux points xx', yy',........ Des derniers théorèmes démontrés dans le paragraphe précédent (nº 107), on déduit les propriétés suivantes. 1) Les points X et X', Y et Y',...... sont conjugués sur la ponctuelle involutive du second degré γ (X, X'; Y, Y';....) ayant la conique γ pour support et les points E, F sont les points doubles de cette involution. – 2) Les droites x et x', y et y',......... sont conjuguées dans le faisceau involutif du second degré γ (x, x'; y, y';.....) ayant la conique γ pour support et les droites e, f sont les droites doubles de cette involution. – 3) Le point A et la droite a sont le pôle et la polaire de ces formes involutives. – 4) Les droites joignant les points xy et x'y', xy', x'y,......passent par le point A par où passent déjà les droites XX', YY',...... – 5) Les points d'intersection des droites XY et X'Y', XY' et X'Y,...... et les points xx', yy',....... sont sur la droite a. – 6) Les points X_1, Y_1,......sont les conjugués harmoniques du point A par rapport aux points X et X', Y et Y',..... où les droites AX_1, AY_1,...... coupent la conique γ, et les droites x_1, y_1,...... sont les conjuguées harmoniques de la droite a par rapport aux tangentes x et x', y et y',..... menées à la conique γ par les points ax_1, ay_1,...... – 7) En projetant l'involution γ (X, X') d'un point quelconque B de la droite a, on obtient un faisceau involutif du premier degré dont les droites doubles sont les droites a et BA. – 8) En coupant l'involution γ (x, x') par une droite quelconque b issue du point A, on obtient une ponctuelle involutive du premier degré dont les points doubles sont les points A et ba.

109. – Remarques. – 1° Lorsque la conique γ est une conique réelle et le point A, un point réel, les involutions γ (X, X'), γ (x, x') sont elliptiques ou hyperboliques selon que le point A est intérieur ou extérieur à la conique γ.

2° Quand on établit une collinéation entre le système plan ϖ auquel appartient la conique γ et un autre système plan $ϖ_1$, à la conique γ, au point A et à la droite a du plan ϖ, correspondent dans le plan $ϖ_1$, une coniques $γ_1$, un point A_1 et une droite a_1 avec la condition que le point A_1 est le pôle de la droite a_1 pour la conique $γ_1$.

3° Si on établit une réciprocité entre les systèmes plans ϖ, $ϖ_1$, la droite a_1 qui correspond au point A est pour la conique $γ_1$, homologue de la conique γ, la polaire du point A_1 qui correspond à la droite a.

4° Les points conjugués communs à deux ponctuelles involutives du second degré placées sur une même conique sont les points d'intersection de la conique avec la droite joignant les pôles des deux involutions, et les droites conjuguées communes à deux faisceaux involutifs du second degré placés sur la même conique sont les tangentes menées à la conique par le point d'intersection des polaires des deux involutions. – On déduit de là un moyen de construire les éléments conjugués communs à deux formes involutives du premier degré placées sur le même support.

5° Si les ponctuelles involutives du second degré placées sur une même conique (4°) sont réelles, les points conjugués communs sont toujours réels et distincts dès que l'une des involutions est elliptique; ils sont réels et distincts, imaginaires conjugués, ou réels et confondus, quand les deux involutions sont hyperboliques. – Une propriété analogue est applicable aux faisceaux involutifs du second degré.

6° Une ponctuelle elliptique étant donnée sur la conique réelle γ, les points conjugués qui forment un groupe harmonique avec deux points donnés A, B sont les points réels où la conique γ est rencontrée par la droite joignant le pôle de l'involution donnée au point d'intersection des

tangentes à la conique aux points A et B.– Une propriété analogue est applicable au faisceau elliptique du second degré.

9° Dans l'étude des formes projectives du premier degré, on a vu que si E et F, X et X', Y et Y' sont les éléments doubles et deux couples d'éléments homologues de deux formes projectives superposées, les trois couples d'éléments E et F, X et Y', X' et Y sont en involution. Cette propriété est applicable à des ponctuelles projectives ou à des faisceaux projectifs du second degré de même support; pour le démontrer, il suffit d'établir une projectivité entre le support commun des formes du second degré et le support commun de deux formes du premier degré, mais la propriété résulte aussi, dans le cas de deux ponctuelles du second degré, de ce que les droites XY', X'Y se coupent sur la droite EF (n° 107) en un point qui est le pôle de l'involution répondant à la question, et, dans le cas de deux faisceaux du second degré, de ce que les points XY', X'Y sont, avec le point ef, sur une droite qui est la polaire de l'involution répondant à la question.

B.– Points conjugués et droites conjuguées par rapport à une conique.

110. 1° Théorèmes.

1) Si la polaire a du point A pour la conique γ passe par le point B, la polaire b du point B pour la même conique passe par le point A.

2) Si le pôle A de la droite a pour la conique γ est sur la droite b, le pôle B de la droite b pour la même conique est sur la droite a.

Les deux théorèmes sont équivalents; il suffit de démontrer le premier. On distingue deux cas.

a.– Lorsque le point A est un point de la conique γ, la droite a est la tangente en ce point à la conique; le point B de la droite a n'est donc pas un point de la conique et la polaire b du point B passe par le point A qui est le point de contact d'une des tangentes a issues du point B.

b.– Lorsque le point A n'est pas un point de la conique γ, la droite a joint les points de contact E, F des tangentes e, f menées du point A à la conique. Si le point B est l'un des points E, F, la droite b coïncide avec la droite e ou avec la droite f et elle passe donc par le point A. Si le point B est différent des points E, F, ceux-ci sont des points conjugués de la ponctuelle involutive du second degré ayant la conique γ pour support, le point B pour pôle et la droite b pour polaire; le point de rencontre A des tangentes e, f à la conique aux points E, F est donc un point de la droite b.

2° Définitions.

1) Deux points sont conjugués pour une conique quand chacun d'eux est sur la polaire de l'autre par rapport à la conique.

2) Deux droites sont conjuguées pour une conique quand chacune d'elles passe par le pôle de l'autre par rapport à la conique.

3° Corollaires.

1) Le lieu des points conjugués d'un même point pour une conique est la ponctuelle du premier degré ayant pour support la polaire du point par rapport à la conique.

2) Le lieu des droites conjuguées d'une même droite pour une conique est le faisceau du premier degré ayant pour support le pôle de la droite par rapport à la conique.

3) Deux points conjugués par rapport à une conique forment un groupe harmonique avec les points où la droite qui les joint coupe la conique.

4) Deux droites conjuguées par rapport à une conique forment un groupe harmonique avec les tangentes menées à la conique du point où elles se coupent.

5) Toute droite du plan d'une conique est le support d'une ponctuelle involutive dont les points conjugués sont conjugués par rapport à la conique; cette ponctuelle involutive a pour points doubles les points où la droite rencontre la conique, elle est parabolique, si la droite est tangente à la conique; dans les autres cas, elle est projetée du pôle de la droite suivant un faisceau involutif de droites conjuguées par rapport à la conique.

6) Tout point du plan d'une conique est le support d'un faisceau involutif dont les droites conjuguées sont conjuguées par rapport à la conique; ce faisceau involutif a pour droites doubles les tangentes menées du point à la conique; il est parabolique, si le point est situé sur la conique; dans les autres cas, il est coupé par la polaire du point suivant une ponctuelle involutive de points conjugués par rapport à la conique.

7) Les droites qui projettent d'un point de la conique une ponctuelle involutive du premier degré formée de points conjugués par rapport à la conique coupent celle-ci suivant la ponctuelle involutive du second degré dont la polaire est le support de la ponctuelle involutive du premier degré et réciproquement.

8) Les points d'intersection d'une tangente de la conique par un faisceau involutif du premier degré formé de droites conjuguées par rapport à la conique sont sur les rayons conjugués du faisceau involutif des tangentes dont le pôle est le support du faisceau involutif du premier degré; et réciproquement.

9) Quand un triangle est inscrit à une conique, toute droite menée par le pôle d'un des côtés du triangle coupe les deux autres côtés en des points qui sont conjugués par rapport à la conique.

10) Quand un triangle est circonscrit à une conique, tout point de la polaire d'un des sommets du triangle est projeté des deux autres sommets suivant des droites conjuguées par rapport à la conique.

11) Si les tangentes a, b, c, d de la conique γ forment un groupe harmonique, les points ab, cd, sont conjugués par rapport à la conique.

12) Si les points A, B, C, D de la conique γ forment un groupe harmonique, les droites AB, CD sont conjuguées par rapport à la conique.

En effet, on peut considérer les droites a, b comme les éléments doubles et les droites c, d comme deux éléments conjugués d'un faisceau involutif du second degré ayant la conique γ pour support. Le point ab est le pôle et le point cd est un point de la polaire de ce faisceau involutif, ou, ce qui est la même chose, le point cd est un point de la polaire du point ab pour la conique γ; les points ab, cd sont donc conjugués par rapport à la conique γ.

4° Remarques. 1) Soient A_1, A_2, X deux points particuliers et un point quelconque de la conique γ; a une droite tracée arbitrairement dans le plan ϖ de la conique γ; X_1, X_2 les points où la droite a coupe les droites XA_1, XA_2. – Lorsque le point X parcourt la conique γ, les ponctuelles engendrées par les points X_1, X_2 sur la droite a sont projectives et leurs points doubles sont les points d'intersection de la droite a avec la conique γ. Si on remplace le point A_2 par un autre point de la conique, le point X_2 est remplacé par un autre point de la droite a; donc, si on projette la conique de ses points sur la droite a, on détermine sur celle-ci des ponctuelles projectives qui deux à deux ont les mêmes points doubles, les points où la droite a coupe la conique γ. La projectivité entre les ponctuelles $a(X_1)$, $a(X_2)$ est l'involution associée à ces couples de projectivités lorsque les points X_1, X_2 sont conjugués pour la conique γ, ce qui arrive quand les points A_1, A_2 sont sur la conique γ des points conjugués de l'involution ayant la droite a pour polaire.

On arrive à la même conclusion en construisant deux points conjugués de l'involution

associée à la projectivité $a(X_1) \overline{\wedge} a(X_2)$ obtenue lorsque les points A_1, A_2 sont des points quelconques de la conique γ et en démontrant que les deux points construits sont conjugués pour la conique γ. A cet effet, on désigne le point X_2 par les lettres Y_1, Z selon qu'on le considère comme une position du point X_1 ou comme le point dont on cherche le conjugué Z' dans l'involution associée à la projectivité $a(X_1) \overline{\wedge} a(X_2)$. Si Y est le point où la droite A_1Y_1 recoupe la conique γ, la droite A_2Y coupe la droite a au point Y_2 homologue du point Y_1 dans la projectivité et le point Z' est le conjugué harmonique du point Z par rapport aux points X_1, Y_2. Mais le point Z étant un des points diagonaux du quadrangle XYA_1A_2, le point Z' est sur la droite joignant les deux autres points diagonaux de ce quadrangle ; cette droite étant la polaire du point Z pour la conique γ, les points Z, Z' sont conjugués pour cette conique.
Lorsque la droite a est tangente à la conique γ, l'involution associée à la projectivité

$$a(X_1) \overline{\wedge} a(X_2)$$

est parabolique et admet le point de contact de la droite a comme seul point double.
2) On a démontré (n° 63, 3°) que si X_1, Y_1, Z_1, T_1 sont les éléments conjugués harmoniques d'un élément quelconque P du support d'une forme involutive du premier degré par rapport à quatre couples d'éléments conjugués X et X', Y et Y', Z et Z', T et T' de l'involution, le rapport anharmonique des éléments X_1, Y_1, Z_1, T_1 a une valeur constante ; cette propriété s'étend par projectivité aux formes du second degré et on peut encore dire que la forme décrite par l'élément X_1 sur le support de l'involution, lorsque X et X' varient, est projective à l'involution. Mais la propriété se démontre directement dans le cas d'une ponctuelle involutive du second degré. Soient a et A la polaire et le pôle d'une ponctuelle involutive du second degré ayant la conique γ pour support ; x, y, z, t les droites XX', YY', ZZ', TT' déterminées par les couples de points conjugués X et X', Y et Y', Z et Z', T et T' ; X_2, Y_2, Z_2, T_2 les pôles de ces droites pour la conique γ et X_3, Y_3, Z_3, T_3 les points où les mêmes droites coupent la droite a ; P un point quelconque de la conique γ ; X_1, Y_1, Z_1, T_1 les conjugués harmoniques du point P sur la conique γ par rapport aux points X et X', Y et Y', Z et Z', T et T'. Les droites x, y, z, t passent par le point A et les points X_2, Y_2, Z_2, T_2 sont sur la droite a. Les points P, X_1, X, X' formant un groupe harmonique, les droites PX_1, XX' sont des droites conjuguées pour la conique γ. La droite XX' ou x passant par le point A, la droite PX_1 passe par le pôle X_2 de cette droite. De la même manière, les droites PY_1, PZ_1, PT_1 passent par les points Y_2, Z_2, T_2. Or les points X_2 et X_3, Y_2 et Y_3, Z_2 et Z_3, T_2 et T_3 sont conjugués pour la conique γ et ils sont conjugués dans une involution ayant la droite a pour support ou des points homologues de deux ponctuelles projectives placées sur cette droite. On a donc

$$\gamma(X_1, Y_1, Z_1, T_1) \overline{\wedge} P(X_1, Y_1, Z_1, T_1) \overline{\wedge} a(X_2, Y_2, Z_2, T_2) \overline{\wedge} a(X_3, Y_3, Z_3, T_3) \overline{\wedge} A(x, y, z, t) ;$$

le rapport anharmonique des points X_1, Y_1, Z_1, T_1 de la conique γ est égal à celui des droites x, y, z, t du faisceau A et il est indépendant de la position du point P sur la conique γ.
3) Les formes $\gamma(X_1)$, $P(X_1)$, $a(X_2)$, $a(X_3)$, $A(x)$ sont projectives à l'involution $\gamma(X, X')$; les deux premières varient avec la position du point P sur la conique γ ; si $\gamma(X'_1)$ est ce que devient $\gamma(X_1)$ quand on remplace le point P par le point P', on a

$$\gamma(X_1) \overline{\wedge} \gamma(X'_1)$$

et l'involution associée à cette projectivité est l'involution $\gamma(X, X')$ donnée sur la conique γ.
4) Les tangentes menées d'un point A à une conique γ sont les éléments doubles des faisceaux pro

jectifs formés des droites joignant le point A aux points où une tangente quelconque de la conique coupe deux tangentes arbitraires. L'involution associée à ces faisceaux projectifs est formée des droites issues du point A et conjuguées pour la conique γ.

111. Théorèmes.

1° Si le point B se meut sur la droite a dans le plan de la conique γ, sa polaire b pour la conique tourne autour du pôle A de la droite a et la ponctuelle a(B) est projective au faisceau A(b).

2° Si la droite b tourne autour du point A dans le plan de la conique γ, son pôle B pour la conique se meut sur la polaire a du point B et le faisceau A(b) est projectif à la ponctuelle a(B).

Il suffit de démontrer le premier théorème. Deux cas sont à distinguer.

1) Le point A est un point de la conique γ et la droite a est la tangente en ce point. Dans ce cas, la droite b joint le point A au point de contact B' de la seconde tangente b' menée à la conique γ du point B. On a

$$a(B) \,\overline{\wedge}\, \gamma(b') \,\overline{\wedge}\, \gamma(B') \,\overline{\wedge}\, A(b),$$

d'où $a(B) \,\overline{\wedge}\, A(b)$.

2) Le point A n'est pas un point de la conique γ et la droite a joint les points de contact E, F des tangentes menées à la conique du point A. La polaire b du point B passe par le point A parce que le point B est sur la polaire a du point A. Le point C où la droite b coupe la droite a est conjugué au point A pour la conique γ; les points B, C sont donc des points conjugués de la ponctuelle involutive du premier degré ayant la droite a pour support et les points E, F pour points doubles. Dès lors, on a

$$a(B) \,\overline{\wedge}\, a(C) \,\overline{\wedge}\, A(b),$$

d'où $a(B) \,\overline{\wedge}\, A(b)$.

N.B. – La démonstration dans le second cas reproduit un raisonnement déjà fait précédemment (110, 4°, 2).

3° Deux ponctuelles du premier degré engendrées par des points conjugués par rapport à une conique sont projectives.

4° Deux faisceaux du premier degré engendrés par des droites conjuguées par rapport à une conique sont projectifs.

Il suffit de démontrer le premier théorème. Différents cas sont à distinguer. Soient a, b, γ les droites et la conique données.

1) Lorsque les droites a, b sont confondues en une même tangente à la conique γ, la projectivité considérée est singulière.

2) Il en est de même lorsque les droites a, b se coupent sur la conique et que l'une d'elles est tangente à la conique.

3) Dans les autres cas, la projectivité n'est pas singulière. Soient A le pôle de la droite a pour la conique γ; X un point quelconque de la droite a; x la polaire du point X pour la conique γ; Y le point où la droite x coupe la droite b. Le point Y est le point conjugué du point X par rapport à la conique γ sur la droite b; mais on a

$$a(X) \,\overline{\wedge}\, A(x) \quad \text{et} \quad A(x) \,\overline{\wedge}\, b(Y);$$

d'où $a(X) \,\overline{\wedge}\, b(Y)$.

C. Projectivités involutives entre systèmes plans superposés.

112. 1° Collinéation involutive déterminée dans un plan par une ponctuelle involutive du second degré. – La ponctuelle involutive du second degré

$\gamma(X, X')$ est formée par la réunion de deux ponctuelles projectives $\gamma(X, X')$, $\gamma(X', X)$ ayant la conique γ pour support commun. Ces ponctuelles projectives établissent une collinéation entre les systèmes plans superposés auxquels elles appartiennent. Les ponctuelles étant en involution, les systèmes plans ont un faisceau double et une ponctuelle double dont les supports sont le pôle et la polaire de l'involution. Les systèmes plans sont perspectifs; la constante de perspectivité étant égale à -1, les points homologues sont permutables entre eux et on dit qu'ils se correspondent doublement et que la collinéation est involutive.

2° Réciprocité involutive déterminée dans un système plan par une ponctuelle du second degré et un faisceau du second degré perspectifs; figures polaires réciproques. – Soient $x', y', z', \ldots$ les tangentes à la conique γ aux points $X, Y, Z, \ldots$ Les formes perspectives $\gamma(X, Y, Z, \ldots)$, $\gamma(x', y', z', \ldots)$ déterminent une réciprocité entre les systèmes plans qui les contiennent. A la droite $a \equiv XY$ du premier système plan correspond le point $A' \equiv x'y'$ du second, c'est-à-dire qu'à toute droite du premier système plan correspond dans l'autre système plan le pôle de la droite par rapport à la conique γ. En particulier, si on considère les tangentes de la conique γ comme des droites du premier système plan, les points homologues dans le second système plan sont les points de contact de ces tangentes; dès lors, à tout point du premier système plan, correspond dans l'autre système plan la polaire du point par rapport à la conique. Tout point du plan de la conique correspond donc à la même droite, sa polaire par rapport à la conique, quel que soit celui des deux systèmes plans auquel on suppose qu'il appartient; à cause de cela, on dit que la réciprocité est involutive; on dit aussi qu'elle est une polarité; la conique γ s'appelle la conique directrice de la polarité et les figures homologues s'appellent des figures polaires réciproques.

D. Triangles polaires réciproques.

113. 1° Théorèmes.

1) Si les sommets du triangle ABC sont les pôles des côtés du triangle DEF pour la conique γ, les sommets du triangle DEF sont les pôles des côtés du triangle ABC pour la même conique.

2) Si les côtés du triangle a, b, c sont les polaires des sommets du triangle def pour la conique γ, les côtés du triangle def sont les polaires des sommets du triangle abc pour la même conique.

Il suffit de démontrer le premier théorème, celui-ci résulte de ce que, les points A et B étant les pôles des droites EF, FD, la droite AB est la polaire du point F pour la conique donnée γ.

2° Définition. – Les triangles ABC ou abc et DEF ou def, considérés dans les deux théorèmes, sont appelés des triangles polaires réciproques pour la conique γ; ils sont des figures polaires réciproques par la polarité ayant la conique γ pour conique directrice.

E. Triangles polaires. –

114. 1° Définition. – Dans le numéro précédent, le triangle ABC était pris arbitrairement dans le plan de la conique γ et, en général, ce triangle est différent du triangle DEF. Mais si le point A est un point quelconque du plan de la conique γ et les points B, C deux points conjugués par rapport à la conique sur la polaire du point A, chacun des côtés du triangle ABC est la polaire du sommet opposé; dans ce cas, le triangle DEF coïncide avec le triangle ABC et celui-ci s'appelle un triangle polaire de la conique γ. Les sommets d'un triangle polaire étant conjugués deux à deux pour la conique, on dit

qu'ils forment un triple de points conjugués, de même que les côtés du triangle polaire étant conjugués deux à deux pour la conique, on dit qu'ils forment un triple de droites conjuguées pour la conique considérée.

N.B. – Lorsque le point A est sur la conique γ, le côté opposé a du triangle polaire ABC≡abc est la tangente au point A à la conique; le point B est un point quelconque de cette tangente et le côté opposé b joint le point A au point de contact de la seconde tangente issue de B; le sommet C coïncide avec le sommet A et le côté c avec le côté a. On dit alors que le triangle ABC est un triangle polaire dégénéré. – Les démonstrations faites dans ce qui suit supposent que les triangles polaires considérés ne sont pas dégénérés; on trouverait facilement comment les théorèmes se modifieraient dans les cas de dégénérescence.

2° Exemples de triangles polaires. – Les points diagonaux d'un quadrangle inscrit à une conique sont les sommets d'un triangle polaire et les diagonales d'un quadrilatère circonscrit à une conique sont les côtés d'un triangle polaire pour la conique considérée.

3° Remarques. – 1) Les involutions de points conjugués placées sur les cotés d'un triangle polaire ne sont pas des involutions associées pareilles à celles considérées dans le n° 74, 2°. En effet, si une transversale t coupe les cotés du triangle polaire ABC ou abc aux points L, M, N et si les points L', M', N' sont conjugués de ces trois points pour la conique γ sur les côtés du triangle, les droites AL', BM', CN' se coupent au pôle T de la droite t pour la conique γ; les points L', M', N' ne sont donc pas en ligne droite et cependant, de même qu'au numéro 74, les points B et C, C et A, A et B sont des couples de points conjugués des involutions sur les côtés du triangle. Pour distinguer les deux cas l'un de l'autre, on dit, dans le cas du n° 74, que les involutions sont des involutions associées de première espèce, et, dans le cas actuel, que les involutions sont des involutions associées de seconde espèce (Voir Mathesis, 1925, page 204.).

2) De même, des faisceaux involutifs ayant les sommets d'un triangle pour supports et dans lesquels les côtés du triangle sont conjugués deux à deux, sont dits associés de première ou de seconde espèce selon que les rayons conjugués de trois rayons concourants sont eux-mêmes concourants ou bien coupent les côtés opposés du triangle en trois points en ligne droite.

3) On déduit facilement de la propriété énoncée au numéro 36, (3°, 1, c ou d), qu'étant données des ponctuelles involutives associées de première espèce sur les côtés d'un triangle, les faisceaux qui les projettent des sommets opposés sont des faisceaux involutifs associés de première espèce. On est ainsi amené à constater que les coniques du faisceau ponctuel ayant pour points fondamentaux deux couples de points conjugués sur deux côtés du triangle, coupent le troisième côté en des couples de points conjugués de la troisième involution. La propriété corrélative concerne le faisceau involutif des tangentes menées d'un sommet du triangle aux coniques inscrites au quadrilatère dont les côtés sont deux couples de droites issues des deux autres sommets.

4° Théorème. *Quand la conique γ est une conique réelle, tout triangle polaire réel a un sommet intérieur et deux sommets extérieurs à la conique.*

En effet, si le sommet A du triangle polaire ABC ≡ abc est intérieur à la conique γ, le côté a est extérieur à la conique et il en est de même des points B, C. Si le point A est extérieur à la conique, la droite a coupe celle-ci en des points réels E, F, points doubles de l'involution dont B et C sont des points conjugués; les quatre points E, F, B, C

forment un groupe harmonique, l'un des points B, C est intérieur et l'autre est extérieur au segment rectiligne EF et à la conique γ.

5° Corollaire. Deux des involutions de points conjugués placées sur les côtés d'un triangle polaire réel d'une conique réelle sont hyperboliques et la troisième est elliptique. Il en est de même des involutions de droites conjuguées placées aux sommets du triangle.

6° Théorèmes.

1) Tout triangle polaire d'une conique est inscrit à une infinité de triangles dont chacun est inscrit à la conique, chaque point de celle-ci étant un sommet de trois de ces triangles.

2) Tout triangle polaire d'une conique est circonscrit à une infinité de triangle dont chacun est circonscrit à la conique, chaque tangente de celle-ci étant un côté de trois de ces triangles.

Il suffit de démontrer le premier théorème. Soient ABC un triangle polaire de la conique γ; X un point quelconque de cette conique; Y et Z les points où les droites AX, BX recoupent la conique γ. La propriété à démontrer résulte de ce que la droite YZ passe par le point C, les points Y, Z étant conjugués dans l'involution placée sur la conique γ et ayant le point C pour pôle et la droite AB pour polaire (n° 110, 3°, 7).

7° Remarque. Les propriétés précédentes n'appartiennent qu'aux triangles polaires. En effet, soient X un point mobile sur la conique γ; A, B deux points du plan ϖ de la conique; Y et Z les points où les droites AX, BX recoupent la conique. Les points Y, Z sont conjugués dans l'involution de pôle A, de même que les points X et Z sont conjugués dans l'involution de pôle B. Ayant

$$(1) \qquad \gamma(X) \,\pi\, \gamma(Y) \quad \text{et} \quad \gamma(X) \,\pi\, \gamma(Z)$$

on a aussi

$$(2) \qquad \gamma(Y) \,\pi\, \gamma(Z)$$

Si les points A, B sont des points quelconques du plan ϖ, la droite YZ enveloppe une conique et si le point C est un point de la droite YZ, il y a deux triangles tels que XYZ inscrits à la conique γ et circonscrits au triangle ABC. La droite YZ ne passe par un point fixe C que si la projectivité (2) est involutive; cela arrive que si le point Y est permutable avec le point Z pour une position quelconque de ces deux points. Les droites AZ, BY doivent alors se couper en un point T de la conique γ; mais s'il en est ainsi, le triangle ABC est le triangle des points diagonaux du quadrangle XYZT inscrit à la conique γ et est donc un triangle polaire de celle-ci.

8° Théorème. Si deux triangles polaires d'une conique γ n'ont aucun sommet commun et si aucun sommet de l'un n'est sur un des côtés de l'autre, ils sont inscrits à une seconde conique γ' et circonscrits à une troisième conique γ''.

Soient $ABC \equiv abc$, $DEF \equiv def$ deux triangles polaires de la conique γ; G, H les points de rencontre de la droite BC par les droites DE, DF. Le faisceau des droites issues du point A étant projectif à la ponctuelle des pôles de ces droites sur la polaire a ou BC du point A, on a

$$A(B, C, E, F) \,\pi\, a(C, B, H, G);$$

d'où, successivement

$$A(B,C,E,F)\,\overline{\wedge}\,D(C,B,H,G), \qquad A(B,C,E,F)\,\overline{\wedge}\,D(B,C,G,H)$$

et

$$A(B,C,E,F)\,\overline{\wedge}\,D(B,C,E,F);$$

les six points A, B, C, D, E, F sont donc situés sur une conique γ'.
La seconde partie se déduit de la première par réciprocité ou par application du théorème démontré au nº 87, 1º.

2) Corollaire. Si deux coniques d'un même plan sont telles qu'un triangle polaire de la première soit inscrit la seconde, il existe une infinité de pareils triangles.

F. – Quadrangles polaires et quadrilatères polaires.

115. 1º Théorèmes.

1) Si deux couples de sommets opposés d'un quadrilatère complet sont formés de points conjugués pour une conique donnée, il en est de même du troisième couple.

2) Si deux couples de côtés opposés d'un quadrangle complet sont formés de droites conjuguées pour une conique donnée, il en est de même du troisième couple.

Il suffit de démontrer le premier théorème. Soient X et X', Y et Y', Z et Z' les trois couples de sommets opposés d'un quadrilatère complet formé par les droites 1 ou X Y'Z, 2 ou X'Y'Z', 3 ou X'YZ, 4 ou X Y Z', avec la condition que les points X et X', Y et Y' sont conjugués par rapport à la conique γ. – Si les points X, Y se déplacent sur la droite 4 et les points X', Y' sur la droite 2, les ponctuelles engendrées sur les deux droites sont projectives (111, 3º) et le lieu du point Z est une certaine droite d (38, 3º). Le théorème sera démontré si on prouve que cette droite d est la polaire du point Z' pour la conique γ; on distingue deux cas.

a. – Lorsque les ponctuelles projectives 4 (X, Y), 2 (X', Y') ne sont pas perspectives, la droite d coupe les droites 4, 2 en des points T, U' qui sont sur ces droites les points homologues du point Z' appelé T' sur 2 et U sur 4. Mais deux points homologues quelconques des ponctuelles 4 et 2 sont conjugués pour la conique γ; les points T, U' sont donc conjugués au points T' ≡ U ≡ Z' et la droite d ≡ T U' est la polaire du point Z' pour la conique γ.

b. – Lorsque les ponctuelles projectives 4 (X, Y), 2 (X' Y') sont perspectives, le point Z' est un point double; il est donc conjugué à lui-même pour la conique γ et est situé sur celle-ci. Soient A et B' les points où les droites 4 et 2 recoupent la conique γ. En considérant le point A comme une position du point X, le point X' devient le point A' où la tangente à la conique au point A coupe la droite 2. En considérant le point B' comme une position du point X', le point X devient le point B où la tangente à la conique au point B' coupe la droite 4. Les droites A A', B B' devant passer par le centre de perspectivité des ponctuelles projectives 4 (X, Y), 2 (X', Y'), ce centre de perspectivité est le pôle S de la droite A B' pour la conique γ. Mais lorsque les ponctuelles 4 (X, Y), 2 (X', Y') sont perspectives, les droites 4, 2 Z'S et d forment un quaterne harmonique et la droite Z'S est la polaire du point Z pour la conique γ; la droite d est donc la tangente au point Z' ou la polaire de ce point pour la conique.

2º Définitions.

1) Lorsque les trois couples de sommets opposés d'un quadrilatère complet sont trois couples de points conjugués pour une conique, le quadrilatère est appelé

2) Lorsque les trois couples de côtés opposés d'un quadrangle complet sont trois couples de droites conjuguées pour une conique, le quadrangle est appelé un qua-

un quadrilatère polaire de la conique. drangle polaire de la conique.

3° Corollaires.

1) Si XYZ est un triangle quelconque du plan d'une conique γ, les points X', Y', Z' conjugués des sommets opposés sur les côtés opposés pour la conique γ sont en ligne droite.

2) Si xyz est un triangle quelconque du plan de la conique γ, les droites x', y', z' conjuguées des côtés par les sommets opposés pour la conique γ sont concourantes.

3) Deux triangles polaires réciproques par rapport à une conique sont homologiques; le centre d'homologie est le pôle de l'axe d'homologie par rapport à la conique. Soient ABC ≡ abc, DEF ≡ def deux triangles polaires réciproques par rapport à la conique γ. La droite d étant la polaire du point A, le point G ≡ ad est conjugué au point A pour la conique γ; de même, les points H ≡ be, I ≡ ef sont conjugués aux points B, C; les points G, H, I sont donc sur une droite x qui est l'axe d'homologie des deux triangles. D'une manière analogue, les droites g ≡ AD, h ≡ BE, i ≡ CF sont conjuguées aux droites a, b, c pour la conique γ; elles se coupent donc en un point X qui est le centre d'homologie des deux triangles. – Enfin, le point X est le pôle de la droite x pour la conique γ, car les droites g, h, i sont les polaires des points G, H, I pour la conique γ.

6. Problèmes.

116. 1° 1) Construire un point quelconque d'une conique dont on donne deux ponctuelles involutives de points conjugués; le point est extérieur au support des ponctuelles et aux droites joignant les points doubles de celles-ci; de plus, le point d'intersection des supports des ponctuelles n'est un point double ni sur l'une ni sur l'autre des ponctuelles.

Les points doubles des ponctuelles involutives données étant des points de la conique considérée, leur détermination préalable ramènerait le problème actuel à un problème déjà résolu: Construire un sixième point quelconque d'une conique passant par cinq points donnés dont trois ne sont pas en ligne droite.

2) Construire une tangente quelconque d'une conique dont on donne une tangente et deux faisceaux involutifs de droites conjuguées; la tangente ne passe ni par le support de l'un des faisceaux ni par un point d'intersection de rayons doubles de ces faisceaux; de plus, la droite joignant les supports des faisceaux n'est une droite double ni dans l'un ni dans l'autre des faisceaux.

Les droites doubles des faisceaux involutifs donnés étant des tangentes de la conique considérée, leur détermination préalable ramènerait le problème actuel au problème déjà résolu: Construire une sixième tangente quelconque d'une conique tangente à cinq droites données dont trois ne sont pas concourantes.

On va montrer qu'il est possible de résoudre les deux problèmes proposés sans se servir des éléments doubles des involutions données et, bien que les raisonnements qu'on va faire soient applicables quelle que soit la nature des éléments considérés, ils pourront conduire à des constructions réelles, si tous ces éléments sont réels, ce qui ne serait pas toujours possible si on ramenait les problèmes actuels aux problèmes anciens, par exemple, lorsque les éléments doubles des involutions données sont imaginaires.

Il suffit de résoudre le problème (1). Soient A le point donné; d_1, d_2 les supports des ponctuelles involutives données; B le point d'intersection des droites d_1, d_2; B_1, B_2 les

conjugués du point B dans les deux involutions sur d_1 et d_2; b la droite B_1B_2 ou la polaire du point B pour la conique considérée. Deux cas sont à distinguer selon que le point A est ou n'est pas sur la droite b.

a.- Le point A est sur la droite b. La droite AB est tangente au point A à la conique. Soient x une droite quelconque menée par le point A; C, D les points d_1x, d_2x; C_1, D_2 les conjugués de C et D sur d_1 et d_2; y la droite C_1D_2; E le point by. Lorsque la droite x tourne autour du point A, on a

$$d_1(C) \barwedge d_2(D), \qquad d_1(C) \barwedge d_1(C_1), \qquad d_2(D) \barwedge d_2(D_2);$$

d'où

$$d_1(C_1) \barwedge d_2(D_2).$$

Quand la droite x coïncide avec la droite b, les points C, D coïncident avec les points B_1, B_2 et les points C_1, D_2 avec le point B; les ponctuelles projectives $d_1(C_1)$, $d_2(D_2)$ sont donc perspectives.- Quand la droite x coïncide avec la droite AB, les points C, D coïncident avec le point B, les points C_1, D_2 deviennent les points B_1, B_2 et la droite y coïncide avec la droite b; le centre de perspectivité des ponctuelles $d_1(C_1)$, $d_2(D_2)$ est donc le point E.- Ce point E est différent du point A; sans quoi, les ponctuelles involutives données sur d_1 et d_2 seraient les sections d'un faisceau involutif ayant le point A pour support; le point A serait sur les droites joignant les points doubles des deux ponctuelles involutives, ce qui est contraire à l'hypothèse.- Le point E étant différent du point A, la conique considérée est le lieu du point de rencontre des rayons homologues des faisceaux projectifs et non perspectifs A (x), E (y), (Voir le nº 110, 3º, 9).

b.- Lorsque le point A n'est pas sur la droite b, les rayons conjugués communs aux faisceaux involutifs projetant du point A les ponctuelles involutives données sur les droites d_1, d_2 coupent la droite b en des points A', E' de la conique et auxquels on attribue le rôle des points A, E du cas précédent, (Voir le nº 110, 3º, 9).

2º Remarques.- 1) Si on ne donne pas le point A, les ponctuelles involutives données sont des ponctuelles involutives de points conjugués pour toutes les coniques d'un faisceau ponctuel, le faisceau des coniques circonscrites au quadrangle ayant pour sommets les points doubles des deux ponctuelles involutives. On peut se servir de ces ponctuelles involutives, et non de leurs points doubles, pour démontrer le théorème de Desargues; on distingue différents cas d'après la position de la droite d par laquelle on coupe le faisceau des coniques, mais on suppose que cette droite ne passe pas par un des points doubles des ponctuelles involutives données.

a.- Si la droite d passe par le point B et coupe la droite b au point C, la droite b étant la polaire du point B pour toutes les coniques du faisceau, ces coniques coupent la droite d suivant une ponctuelle involutive dont les points B, C sont les points doubles.

b.- La droite d coïncide avec la droite b. Soient C, D les points où une conique quelconque γ du faisceau coupe la droite b et E un point quelconque de cette conique. Les droites CE, DE coupent chacune des droites d_1, d_2 en des points F et F_1, G et G_2 conjugués pour la conique γ et conjugués dans les involutions données. En laissant fixes les points F, F_1, les points G, G_2 engendrent des ponctuelles projectives sur la droite d_2; il en est de même des points C, D sur la droite b. Mais lorsque le point C coïncide avec le

point B_1 ou bd_1, le point D coïncide avec le point B_2 ou bd_2, et lorsque le point C coïncide avec le point B_2, le point D coïncide avec le point B_1 ; les points B_1, B_2 sont donc deux points homologues permutables et les ponctuelles projectives engendrées par les points C, D sur la droite b sont en involution.

c.– La droite d passe par le point $B_1 \equiv bd_1$. Soient C et D, E et F les points où une conique γ du faisceau coupe les droites b, d ; G le point $d_1 d_2$; G_2 le conjugué du point G dans l'involution donnée sur d_2 ; H le point d'intersection des droites DG, CG_2 ; L le point d'intersection des droites d, CH ; M le point d'intersection des droites BD, d. Le point H est un point de la conique γ et la droite BD est tangente à cette conique au point D. On a

$$C(H, D, E, F) \,\overline{\wedge}\, D(H, D, E, F);$$

on en déduit

$$d(L, B_1, E, F) \,\overline{\wedge}\, d(G, M, E, F) \qquad \text{et} \qquad d(B_1, L, F, E) \,\overline{\wedge}\, d(G, M, E, F),$$

de sorte que les trois couples de points B_1 et G, L et M, E et F sont en involution sur la droite d.

Mais, quand la conique γ varie, les points L, M décrivent sur la droite d des ponctuelles respectivement perspectives à celles décrites par les points C, D sur la droite b, avec les points G_2 et B pour centres de perspectivité ; les ponctuelles b(C), b(D) étant en involution sont projectives ; les ponctuelles d(L), d(M) sont donc projectives. En amenant le point C sur le point B_1 ou le point B_2, le point D coïncide avec le point B_2 ou le point B_1, le point L coïncide avec le point B_1 ou avec le point G, et le point M coïncide avec le point G ou avec le point B_1. Les ponctuelles d(L), d(M) sont donc en involution ; cette involution est déterminée par les deux couples de points conjugués B_1 et G, L et M ; les points E, F sont donc des points conjugués de cette involution, ce qui démontre le théorème.

d.– La droite d est quelconque. Soient C et D, E et F les points où une conique γ du faisceau coupe les droites b, d ; G, H les points dd_1, dd_2 ; G_1, H_2 les conjugués des points G, H dans les involutions sur les droites d_1, d_2 ; K, L les points où se coupent les droites CG et DG_1, CH_2 et DH ; M, N les points où les droites CL, DK coupent la droite d. Les points K, L sont sur la conique γ ; on a donc

$$C(K, L, E, F) \,\overline{\wedge}\, D(K, L, E, F)$$

d'où

$$d(G, M, E, F) \,\overline{\wedge}\, d(N, H, E, F) \qquad \text{et} \qquad d(M, G, F, E) \,\overline{\wedge}\, d(N, M, E, F)$$

de sorte que les trois couples de points M et N, G et H, E et F sont en involution sur la droite d.

Mais, quand la conique γ varie, les points M, N décrivent sur la droite d des ponctuelles perspectives à celles en involution décrites par les points C, D sur la droite b, avec les points H_2, G_1 comme centres de perspectivité ; les ponctuelles engendrées par les points M, N sur la droite d sont donc projectives. Lorsque les points C, D coïncident avec les points B_2, B_1, les points M, N coïncident avec les points H, G qui sont ainsi des points homologues des ponctuelles projectives d(M), d(N). D'autre part, les points G et G_1, H et H_2 étant conjugués pour la conique γ, sont deux couples de sommets opposés d'un quadrilatère polaire de cette conique ; le point P où se coupent les droites G_1H, GH_2 est

donc conjugué au point B pour la conique γ, il est situé sur la droite b, et, en vertu de ce qu'on a trouvé ci-dessus si la droite d coïncide avec la droite b, il est un point double de l'involution déterminée sur la droite b par les coniques du faisceau considéré; lorsque les points C, D sont confondus avec le point P, les points M, N coïncident avec les points G, H; ceux-ci sont donc des points homologues permutables des ponctuelles projectives d (M), d (N), ces ponctuelles sont en involution et le théorème résulte de ce que les points E, F sont des points conjugués de cette involution.

2) Par réciprocité, le théorème de Sturm est applicable au faisceau tangentiel des coniques tangentes à quatre droites qui sont les rayons doubles de deux faisceaux involutifs de droites conjuguées pour les coniques du faisceau.

3) Corollaires.

a. Quand deux points sont conjugués par rapport à deux coniques du faisceau ponctuel des coniques circonscrites à un quadrangle, ils sont conjugués pour toutes les autres coniques du faisceau, on les dit conjugués pour le faisceau; ils sont les points doubles de la ponctuelle involutive suivant laquelle les coniques du faisceau coupent la droite qui les joint et les points de contact de cette droite avec les deux coniques du faisceau tangentes à la même droite.

b. Quand deux droites sont conjuguées par rapport à deux coniques du faisceau tangentiel des coniques inscrites à un quadrilatère, elles sont conjuguées pour toutes les autres coniques du faisceau; on les dit conjuguées pour le faisceau; elles sont les droites doubles du faisceau involutif des tangentes menées aux coniques du faisceau du point où elles se coupent et les tangentes en ce point aux deux coniques du faisceau qui passent par le même point.

Soient P' le point de rencontre des polaires p_1, p_2 du point P par rapport à deux quelconques γ_1, γ_2 des coniques circonscrites au quadrangle non dégénéré ABCD et E, F, G les points diagonaux (AB, CD), (AC, DB), (AD, BC) du quadrangle. – Si le point P est un des sommets du quadrangle il se confond avec le point P', la première partie de la proposition (a) est évidente et les autres parties de la proposition cessent d'avoir un sens. – Lorsque le point P est un point d'un des côtés du quadrangle, le côté AB, par exemple, le point P' est le conjugué harmonique du point P par rapport aux points A, B; la première partie de la proposition est encore évidente et les autres parties disparaissent ou sont sans intérêt. – Si le point P est un sommet du triangle EFG, le sommet E, par exemple, les droites p_1, p_2 sont confondues avec le côté opposé FG qui est la polaire du point E pour toutes les coniques circonscrites au quadrangle ABCD; le point P' est un point quelconque de la droite FG; les points P, P' sont conjugués pour toutes les coniques considérées et les points doubles de l'involution des points d'intersection de la droite $d \equiv PP'$ par ces coniques; la conique dégénérée (AB, CD) doit être considérée comme une des coniques du faisceau qui sont tangentes à la droite d et le point E, comme le point de contact. – Inversement, si le point P est sur la droite FG, le point P' coïncide avec le point E. – Lorsque le point P n'occupe pas une des positions particulières déjà considérées, on peut supposer qu'il n'est pas situé sur la conique γ_1, ni sur la conique γ_2; les droites p_1, p_2 sont distinctes, car si elles étaient confondues en une seule droite p, les points homologues des points A, B, C, D dans la perspectivité harmonique de centre P et d'axe p appartiendraient à la fois aux deux coniques γ_1, γ_2 qui ne seraient pas distinctes; de plus, si P' est le point d'intersection des droites p_1, p_2, la droite $d \equiv PP'$ ne passe par aucun des points A, B, C, D; les points P, P' partagent harmoniquement les distances X_1Y_1, X_2Y_2

des points où la droite d est rencontrée par les coniques γ_1, γ_2; ils sont donc les points doubles de l'involution tracée sur la droite d par les coniques du faisceau et les points de contact de deux des coniques du faisceau avec cette droite; si X_3, Y_3 sont les points où une troisième conique γ_3 du faisceau coupe la droite d, les points X_3, Y_3, P, P' forment un quaterne harmonique, la polaire p_3 du point P pour la conique γ_3 passe par le point P' qui est donc conjugué au point P pour cette conique.

c.- Le seul triangle polaire commun aux coniques circonscrites à un quadrangle est le triangle des points diagonaux du quadrangle; le faisceau des polaires d'un point du plan, différent des sommets de ce triangle, pour les coniques considérées, est projectif au faisceau de ces coniques et à l'involution des points où les mêmes coniques coupent une droite quelconque.

d.- Le seul triangle polaire commun aux coniques inscrites à un quadrilatère est le triangle des diagonales du quadrilatère; la ponctuelle des pôles d'une droite du plan, différente des côtés de ce triangle, pour les coniques considérées, est projective au faisceau de ces coniques et à l'involution des tangentes menées aux mêmes coniques d'un point quelconque.

La première partie de la proposition (c) est une conséquence de la démonstration précédente. D'autre part, il résulte de la manière dont on a étendu l'emploi des coordonnées binaires aux faisceaux de coniques (88, 2°, 2; ....; 91, 4°, 3) et de la définition de la projectivité (100, 7°), que le faisceau des coniques circonscrites au quadrilatère non dégénéré $ABCD$ est projectif aux faisceaux des tangentes en A, B, C, D et aux ponctuelles des points où les coniques recoupent les droites issues des mêmes points A, B, C, D. On peut donc supposer que le point P dont on considère le faisceau $P'(p_1, p_2, p_3, \ldots)$ des polaires par rapport aux coniques $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$ circonscrites au quadrangle est différent des sommets du quadrangle; si la droite PA coupe les droites $p_1, p_2, p_3, \ldots$ aux points $P_1, P_2, P_3, \ldots$ et recoupe les coniques $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$ aux points $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$, on a

$$(A, Z_1, P, P_1) = (A, Z_2, P, P_2) = (A, Z_3, P, P_3) = \ldots\ldots = -1;$$

on en déduit

$$(A, P, Z_1, P_1) = (A, P, Z_2, P_2) = (A, P, Z_3, P_3) = \ldots\ldots = 2,$$

et il en résulte que les points Z_1 et P_1, Z_2 et P_2, Z_3 et $P_3, \ldots$ sont des points homologues de deux ponctuelles projectives superposées dont les points A et P sont les points doubles; le faisceau $P'(p_1, p_2, p_3, \ldots)$ des polaires du point P pour les coniques circonscrites au quadrangle $ABCD$ est donc projectif au faisceau de ces coniques. - Si maintenant on coupe le faisceau $P'(p_1, p_2, p_3, \ldots)$ par une droite quelconque d' qui ne passe pas par un des sommets du quadrangle $ABCD$, on obtient une ponctuelle formée des conjugués harmoniques $P'_1, P'_2, P'_3, \ldots$ du point P par rapport aux couples de points T_1 et U_1, T_2 et U_2, T_3 et $U_3, \ldots$ où la droite d' est rencontrée par les coniques $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$; l'involution de ces couples de points est donc projective à la ponctuelle des points $P'_1, P'_2, P'_3, \ldots$, mais celle-ci est projective au faisceau des droites $p_1, p_2, p_3, \ldots$ et, par suite, aussi au faisceau des coniques considérées, il en est donc de même de l'involution

e.- Les pôles d'une droite quelconque de leur plan par rapport aux coniques circonscrites à un quadrangle sont les points conjugués des points de la droite

f.- Les polaires d'un point quelconque de leur plan par rapport aux coniques inscrites à un quadrilatère sont les droites conjuguées des droites passant par le point pour

pour le faisceau de ces coniques; ils sont les points d'une conique circonscrite au triangle des points diagonaux du quadrangle et projective au faisceau des coniques circonscrites au quadrangle.

le faisceau de ces coniques; elles sont les tangentes d'une conique inscrite au triangle des diagonales du quadrilatère et projective au faisceau des coniques inscrites au quadrilatère.

La propriété (c) résulte de ce que les polaires des points d'une droite quelconque d, par rapport aux coniques circonscrites à un quadrangle engendrent des faisceaux projectifs dont les supports sont les points conjugués des points considérés sur la droite d; et de ce que les points conjugués des points où cette droite d coupe les côtés du triangle des points diagonaux du quadrangle sont les sommets opposés du triangle. Cependant la conique lieu des pôles est une conique dégénérée lorsque la droite d est un côté du quadrangle et quand la droite passe par un des points diagonaux du quadrangle; la conique dégénérée est formée de deux droites dont l'une, passant par deux points diagonaux, est ainsi le support d'une ponctuelle projective au faisceau des coniques donné. Lorsque la droite d passe par deux points diagonaux, le lieu des pôles est formé des deux autres côtés du triangle diagonal; la propriété n'est plus applicable.

N.B. Comme conséquences des propriétés qui précèdent on peut énoncer les propriétés suivantes du quadrangle et du quadrilatère complets:

α.– Si E, F, G sont les points diagonaux du quadrangle non dégénéré ABCD et si P est un point quelconque du plan du quadrangle, les droites conjuguées harmoniques des droites EP, FP, GP par rapport aux couples de droites AB et CD, AC et DB, AD et BC se coupent en un même point P'; les points P, P' sont les points doubles de l'involution déterminée sur la droite PP' par les points où les côtés opposés du quadrangle coupent cette droite; si le point P parcourt une droite quelconque, le point P' décrit une conique circonscrite au triangle EFG.

β.– Si e, f, g sont les diagonales du quadrilatère non dégénéré abcd et si p est une droite quelconque du plan du quadrilatère, les points conjugués harmoniques des points ep, fp, gp par rapport aux couples de points ab et cd, ac et db, ad et bc sont situés sur une même droite p'; les droites p p' sont les droites doubles de l'involution des droites joignant le point pp' aux sommets opposés du quadrilatère; si la droite p tourne autour d'un point quelconque, la droite p' enveloppe une conique inscrite au triangle efg.

3° 1) Construire un point quelconque d'une conique dont on donne deux points, la tangente en un de ces points et une ponctuelle involutive de points conjugués pour la conique; le support de la ponctuelle ne passe par aucun des points donnés; la droite qui joint ces points ne passe pas par un des points doubles de la ponctuelle et la tangente donnée ne passe ni par le second point donné ni par un des points doubles de la ponctuelle.

2) Construire une tangente quelconque d'une conique dont on donne deux tangentes, le point de contact de l'une d'elles et un faisceau involutif de droites conjuguées pour la conique; le support du faisceau n'est pas sur une des tangentes données; le point de rencontre de ces tangentes n'est pas sur un des rayons doubles du faisceau et le point de contact donné n'est ni sur la seconde tangente donnée ni sur un des rayons doubles du faisceau.

La question revient à construire un point quelconque d'une conique dont on connait quatre points et la tangente en un de ces points, trois des points connus n'étant pas en ligne droite et la tangente connue ne passant que par celui des quatre points qui est son point de contact.

La question revient à construire une tangente quelconque d'une conique dont on connait quatre tangentes et le point de contact de l'une d'elles, trois des tangentes connues n'étant pas concourantes et le point de contact connu n'étant situé que sur celle des tangentes connues qui lui correspond.

La considération des éléments doubles des involutions données ramènerait les problèmes actuels à des problèmes résolus antérieurement; mais on va démontrer, comme on l'a fait dans le cas précédent (1°), que les problèmes proposés peuvent être résolus sans utiliser les éléments doubles des involutions données.- Il suffit de résoudre le problème (1). Soient A et B les points donnés, a la tangente donnée au point A; d le support de la ponctuelle involutive donnée; x la droite AB; C, D les points où la droite d coupe les droites a, x; C', D' les points conjugués des points C, D dans l'involution donnée sur la droite d; y, c les droites AB', AC'; E le point d'intersection des deux droites. Si on imagine que les droites x, y tournent autour des points A, E de manière à rencontrer constamment la droite d en des points conjugués de l'involution donnée sur cette droite, elles décrivent des faisceaux projectifs, le point B devient mobile et engendre la seule conique répondant à la question.

4° Remarques.-

1) Si on ne donne pas le point B, la ponctuelle involutive donnée sur la droite d est une ponctuelle involutive de points conjugués pour toutes les coniques d'un faisceau ponctuel, le faisceau des coniques passant par les points doubles de la ponctuelle involutive et tangentes à la droite a au point A. On peut se servir de la ponctuelle involutive, et non de ses points doubles, pour démontrer le théorème de Désargues, lorsque la droite d' par laquelle on coupe le faisceau des coniques ne passe pas par le conjugué C' sur d du point $C \equiv ad$; deux cas sont à considérer.

a.- La droite $c \equiv AC'$ étant la polaire du point C pour toutes les coniques du faisceau considéré, si la droite d' passe par le point C, l'involution obtenue a ce point et le point cd' pour points doubles.

b.- Lorsque la droite d' ne passe ni par C, ni par C', ni par l'un des points communs aux coniques du faisceau, soient F, G, H le point où une conique quelconque γ du faisceau recoupe la droite c et ceux où elle coupe la droite d'; K le point dd'; K' le conjugué du point K dans l'involution donnée sur d; L le point où les droites AK', FK se rencontrent sur la conique γ; M, N, P les points d'intersection de la droite d' par les droites a, AK', c. On a

$$A(A,L,G,H) \barwedge F(A,L,G,H),$$

d'où on déduit

$$d'(M,N,G,H) \barwedge d'(P,K,G,H) \quad \text{et} \quad d'(N,M,H,G) \barwedge d'(P,K,G,H),$$

de sorte que les points G, H sont conjugués dans l'involution déterminée par les deux couples de points conjugués P et N, M et K.

2) Par réciprocité, le théorème de Sturm est applicable au faisceau tangentiel des co=

niques tangentes à une droite donnée en un point donné et tangentes aux droites doubles d'un faisceau involutif donné, si le point duquel on mène des tangentes à ces coniques n'est pas sur le rayon conjugué, dans le faisceau involutif donné, à la droite joignant le support de ce faisceau au point de contact de la tangente donnée.

3) Corollaires.

a.- Quand deux points sont conjugués pour deux coniques du faisceau ponctuel des coniques circonscrites à un triangle et tangentes à une droite donnée en un des sommets du triangle, ils sont conjugués pour toutes les autres coniques du faisceau; on les dit conjugués pour le faisceau; ils sont les points doubles de la ponctuelle involutive suivant laquelle les coniques du faisceau coupent la droite qui les joint et les points de contact de cette droite avec les deux coniques du faisceau qui sont tangentes à la même droite.

b.- Quand deux droites sont conjuguées pour deux coniques du faisceau tangentiel des coniques inscrites à un triangle et tangentes en un point donné à un des côtés du triangle, elles sont conjuguées pour toutes les autres coniques du faisceau; on les dit conjuguées pour le faisceau; elles sont les droites doubles du faisceau involutif des tangentes menées aux coniques du faisceau par leur point de rencontre et les tangentes en ce point aux deux coniques du faisceau qui passent par le même point.

Bien que la démonstration du théorème de Desargues faite dans la remarque précédente soit incomplète et qu'il en soit de même de la démonstration corrélative du théorème de Sturm, on peut appliquer ces théorèmes qui ont été démontrés antérieurement (nº 89, 3°, p. 71) d'une manière générale. Les raisonnements sont analogues à ceux qu'on a faits dans le cas précédent (2°, 3) et il en est de même des propriétés suivantes dans lesquelles on désigne par ABC, a, D, D' et abc, A, d, d' le triangle inscrit aux coniques du faisceau ponctuel, la tangente commune à ces coniques au point A, le point (a, BC) et le point conjugué harmonique de ce point par rapport aux points B, C, le triangle circonscrit aux coniques du faisceau tangentiel, le point de contact de ces coniques avec la droite a, la droite (A, bc) et la droite conjuguée harmonique de cette droite par rapport aux droites b, c.

c.- Les points A, D sont les seuls points ayant les mêmes polaires par rapport aux coniques circonscrites au triangle ABC et tangentes à la droite a au point A; ces polaires sont les droites a et AD'; le faisceau des polaires d'un point du plan, différent des points A, D, pour les coniques considérées, est projectif au faisceau de ces coniques et à l'involution des points où les mêmes coniques coupent une droite quelconque.

d.- Les droites a, d sont les seules droites ayant les mêmes pôles par rapport aux coniques inscrites au triangle abc et tangentes au point A à la droite a; ces pôles sont les points A et ad'; les ponctuelles des pôles d'une droite du plan, différente des droites a, d pour les coniques considérées, est projective au faisceau de ces coniques et à l'involution des tangentes menées d'un point quelconque aux mêmes coniques.

e.- Les pôles d'une droite quelconque de leur plan par rapport aux coniques cir=

f.- Les polaires d'un point quelconque de leur plan par rapport aux coniques

conscrites au triangle ABC et tangentes à la droite a au point A sont les points conjugués des points de la droite pour le faisceau de ces coniques; ils sont les points d'une conique passant par le point D, tangente à la droite AD' au point A et projective au faisceau des coniques donné.

inscrites au triangle abc et tangentes au point A à la droite a sont les droites conjuguées des droites passant par le point pour le faisceau de ces coniques; elles sont les tangentes d'une conique tangente à la droite d, tangente au point ad' à la droite a et projective au faisceau des coniques donné.

N.B. Ces propriétés présentent des cas de dégénérescence analogues à ceux indiqués plus haut (2°, 3, e et f).

5° 1) Construire un point quelconque d'une conique dont on donne un point, une ponctuelle de points conjugués et le pôle du support de cette ponctuelle, ce pôle étant extérieur au support de la ponctuelle et différent du point donné.

2) Construire une tangente quelconque d'une conique dont on donne une tangente, un faisceau involutif de droites conjuguées et la polaire du support du faisceau, cette polaire n'appartenant pas au faisceau et ne coïncidant pas avec la tangente donnée

On ramènerait encore ces problèmes à des problèmes connus par la considération des éléments doubles des involutions données; mais comme dans les cas précédents (1° et 3°), on peut les résoudre sans utiliser ces éléments doubles. - Il suffit de résoudre le problème (1). Soient A le point donné de la conique; b le support de la ponctuelle involutive donnée; B le pôle de la droite b pour la conique; C le point d'intersection des droites AB, b; D le conjugué harmonique du point A par rapport aux points B, C; C' le conjugué du point C dans l'involution donnée sur la droite b; E, E' deux points conjugués quelconques de la même involution; F le point de rencontre des droites AE, DE'. La conique considérée est tangente aux droites C'A, C'D aux points A, D et elle est le lieu du point F lorsque les points E, E' engendrent l'involution donnée sur la droite b.

6° Remarques.

1) Si on ne donne pas le point A, la ponctuelle involutive donnée sur la droite b est une ponctuelle involutive de points conjugués pour toutes les coniques d'un faisceau à la fois ponctuel et tangentiel, le faisceau des coniques tangentes à deux droites données en des points donnés; ceux-ci sont les points doubles de la ponctuelle involutive donnée sur la droite b et les tangentes données joignent ces points doubles au pôle B de la droite b pour les coniques du faisceau; ces tangentes sont les droites doubles du faisceau involutif de droites, conjuguées pour les coniques du faisceau, qui projettent du point B la ponctuelle involutive des points conjugués pour les mêmes coniques situés sur la droite b, de sorte qu'on serait parvenu au même faisceau en partant du second problème (5°, 2). On peut encore se servir des involutions données, et non de leurs éléments doubles, pour démontrer les théorèmes de Desargues et de Sturm.

Il suffit de démontrer le théorème de Désargues. Si la droite d par laquelle on coupe les coniques considérées passe par le point B, l'involution obtenue a les points B et bd pour points doubles. Si la droite d ne passe pas par le point B, soient G le point bd, G' le point conjugué du point G et différent de celui-ci dans l'involution donnée sur la droite b; H le point d'intersection des droites b, BG'. La droite BG' est la polaire du point G pour toutes les coniques considérées; celles-ci coupent donc la droite d en des points conjugués d'une involution dont les points G, H sont les points doubles.

2) Corollaires.

a.- Quand deux points sont conjugués pour deux coniques du faisceau des coniques tangentes à deux droites données en des points donnés, ils sont conjugués pour toutes les autres coniques du faisceau; on les dit conjugués pour le faisceau; ils sont les points doubles de la ponctuelle involutive suivant laquelle les coniques du faisceau coupent la droite qui les joint; l'un d'eux est un point de la conique du faisceau formée de deux droites confondues avec celle des points donnés communs à toutes les coniques du faisceau; l'autre est le point où la droite qui les joint est tangente à une conique du faisceau.

b.- Quand deux droites sont conjuguées pour deux coniques du faisceau des coniques tangentes à deux droites données en des points donnés, elles sont conjuguées pour toutes les autres coniques du faisceau; on les dit conjuguées pour le faisceau; elles sont les rayons doubles du faisceau involutifs des tangentes menées aux coniques du faisceau du point où elles se coupent; l'une d'elles est tangente à la conique du faisceau formée de deux points confondu avec celui où se coupent les tangentes données communes aux coniques du faisceau; l'autre est la tangente à leur point de rencontre à une conique du faisceau.

La démonstration de ces propriétés est analogue à celle qu'on a faite précédemment pour les premiers faisceaux de coniques que l'on a considérés (2°.3). Il en est de même des propriétés suivantes dans lesquelles on désigne par A et B, a et b, C et c les points donnés des coniques dont il s'agit maintenant, les tangentes en ces points, le point de rencontre de ces tangentes et la droite AB; par P et P', p et p' deux points quelconques formant un quaterne harmonique avec les points A, B et les droites AP', AP.

c.- Les triangles tels que $CPP' \equiv cpp'$ sont les seuls triangles polaires communs aux coniques tangentes aux droites a, b aux points A, B.

d.- Le faisceau des polaires d'un point du plan, différent des points de la droite c et du point C. pour les coniques considérées, est projectif au faisceau de ces coniques et à l'involution des points où les mêmes coniques coupent une droite quelconque.

e.- La ponctuelle des pôles d'une droite du plan, différente des droites passant par le point C et de la droite c. pour les coniques considérées, est projective au faisceau de ces coniques et à l'involution des tangentes menées aux mêmes coniques d'un point quelconque.

f.- Les pôles d'une droite quelconque d de leur plan pour les coniques tangentes aux droites a, b aux points A, B sont les points conjugués des points de la droite d pour le faisceau de ces coniques. Ils sont les points d'une conique dégénérée formée de deux droites, la droite AB et une droite d' passant par le point $C \equiv ab$; ceux qui sont sur la droite d' engendrent une ponctuelle projective au faisceau des coniques donné; la droite d' est la conjuguée harmonique par rapport aux droites a, b de celle joignant le point C au point où la droite d coupe la droite $c \equiv AB$.

g.- Les polaires d'un point quelconque D de leur plan pour les coniques tangentes aux droites a, b aux points A, B sont les droites conjuguées des droites passant par le point D pour le faisceau de ces coniques. Elles sont les tangentes d'une conique dégénérée formée de deux points, le point ab et un point D' de la droite $c \equiv AB$; celles qui passent par le point D' engendrent un faisceau projectif au faisceau des coniques donné; le point D' est le conjugué harmonique par rapport aux points A, B de celui où la droite c coupe la droite joignant le point D au point $C \equiv ab$.

N.B.- Voir le N.B. au 4°.3, e et f.-

π

7° Remarque relative aux faisceaux de coniques définis au n° 91, p. 76.

1) Les théorèmes de Desargues et de Sturm étant applicables à ces faisceaux, il en est de même des propriétés analogues à celles énoncées dans les remarques 2°, 3, 4°, 3, et 6°, 2. Ces propriétés s'établissent facilement par le calcul; il suffit de remplacer les équations générales écrites dans ce qui suit par les équations particulières des différents faisceaux, et, dans certains cas, de substituer les coordonnées tangentielles aux coordonnées ponctuelles.

1) On considère le faisceau ponctuel de coniques défini par l'équation

$$(1) \qquad F_1(X,Y,Z) + k\,F_2(X,Y,Z) = 0,$$

dans laquelle la lettre k désigne un paramètre arbitraire.

La droite d joignant les points $P'(X',Y',Z')$, $P''(X'',Y'',Z'')$ coupe la conique déterminée par une valeur particulière de k en des points correspondant aux valeurs de λ qui sont les racines de l'équation

$$(2) \qquad F_1(X'+\lambda X'', Y'+\lambda Y'', Z'+\lambda Z'') + k\,F_2(X'+\lambda X'', Y'+\lambda Y'', Z'+\lambda Z'') = 0,$$

ou, en employant des notations abrégées dans le développement de cette équation ordonné suivant les puissances de λ,

$$(3) \qquad F_1(X') + \lambda \Sigma X' \frac{\partial F_1}{\partial X''} + \lambda^2 F_1(X'') + k\left\{F_2(X') + \lambda \Sigma X_1 \frac{\partial F_2}{\partial X''} + \lambda^2 F_2(X'')\right\} = 0.$$

Donc, lorsque k varie, les couples de points d'intersection de la droite d par les coniques (1) sont en involution, ce qui démontre le théorème de Desargues, et il résulte en outre de l'équation précédente que cette involution est projective au faisceau des coniques.

N.B. - Lorsque l'un des points P', P'', par exemple, le point P', est commun aux coniques F_1, F_2 et, par suite, à toutes les coniques (1), le terme indépendant de λ dans l'équation (3) est nul, une des racines de l'équation est $\lambda = 0$ quel que soit k, l'autre racine correspond aux seconds points communs à la droite d et aux coniques du faisceau; l'involution se réduit à une projectivité singulière. Mais il est bien clair que le théorème de Désargues cesse d'avoir un autre sens lorsque la droite par laquelle on coupe un faisceau ponctuel de coniques passe par un point commun à ces coniques; il en est de même du théorème de Sturm si le point duquel on mène les tangentes aux coniques d'un faisceau tangentiel est sur une tangente commune à ces coniques.

2) Lorsque les points P', P'' sont conjugués par rapport aux coniques F_1, F_2, on a

$$(4) \qquad \Sigma X' \frac{\partial F_1}{\partial X''} = 0 \quad \text{et} \quad \Sigma X' \frac{\partial F_2}{\partial X''} = 0;$$

on a donc aussi

$$(5) \qquad \Sigma X' \frac{\partial}{\partial X''}(F_1 + k F_2) = 0$$

quelle que soit la valeur de k, et les points P', P'' sont conjugués pour toutes les coniques du faisceau (1); on les dit conjugués pour ce faisceau.

Dans ce cas, l'équation (3) se réduit à

$$(6) \qquad F_1(X') + \lambda^2 F_1(X'') + k\left\{F_2(X') + \lambda^2 F_2(X'')\right\} = 0$$

qui fournit deux valeurs égales et de signes contraires pour λ, quelle que soit la valeur donnée à k; les points actuels P', P'' partagent harmoniquement tout segment limité

sur la droite d qui les joint, par une conique du faisceau (1); ils sont les points doubles de l'involution que les points d'intersection par ces coniques déterminent sur la droite d. De plus, les valeurs de λ données par l'équation (6) sont toutes deux nulles ou toutes deux infinies pour les valeurs de k vérifiant respectivement les conditions

(7) $$F_1(X') + k F_2(X') = 0 \qquad \text{ou} \qquad F_1(X'') + k F_2(X'') = 0;$$

les mêmes points P', P'' sont donc les points de contact de la droite d avec deux des coniques du faisceau (1).

3) L'équation (5) est, en coordonnées courantes X'', Y'', Z'', l'équation de la polaire du point P' pour la conique du faisceau (1) qui correspond à la valeur donnée à k dans cette équation. Si on fait varier k, on constate ainsi que les polaires du point P' pour les coniques (1) engendrent un faisceau de droites projectif à celui des coniques.

Mais cette conclusion suppose que les droites représentées par les équations

(8) $$\Sigma X' \frac{\partial F_1}{\partial X} = 0 \qquad \text{et} \qquad \Sigma X' \frac{\partial F_2}{\partial X} = 0$$

sont des limites, et, comme ces équations peuvent s'écrire

(9) $$\Sigma X \frac{\partial F_1}{\partial X'} = 0 \qquad \text{et} \qquad \Sigma X \frac{\partial F_2}{\partial X'} = 0,$$

cela suppose qu'on n'a pas

(10) $$\frac{\partial F_1}{\partial X'} : \frac{\partial F_2}{\partial X'} = \frac{\partial F_1}{\partial Y'} : \frac{\partial F_2}{\partial Y'} = \frac{\partial F_1}{\partial Z'} : \frac{\partial F_2}{\partial Z'}.$$

Quand les droites (8) sont confondues, les coordonnées du point P' vérifient les conditions précédentes et il y a une valeur α de k pour laquelle on a, à la fois,

(11) $$\frac{\partial F_1}{\partial X'} + \alpha \frac{\partial F_2}{\partial X'} = 0, \qquad \frac{\partial F_1}{\partial Y'} + \alpha \frac{\partial F_2}{\partial Y'} = 0, \qquad \frac{\partial F_1}{\partial Z'} + \alpha \frac{\partial F_2}{\partial Z'} = 0;$$

pour cette valeur de k, l'équation (1) devient

(12) $$F_1(X, Y, Z) + \alpha F_2(X, Y, Z) = 0$$

et représente une conique ayant le point P' comme point double. Les points doubles des coniques dégénérées du faisceau (1) sont donc les seuls qui ont la même polaire par rapport aux coniques du faisceau.

4) En éliminant k entre les équations

(13) $$\Sigma X \left(\frac{\partial F_1}{\partial X'} + k \frac{\partial F_2}{\partial X'}\right) = 0, \qquad \Sigma X \left(\frac{\partial F_1}{\partial X''} + k \frac{\partial F_2}{\partial X''}\right) = 0$$

des polaires, pour les coniques (1), de deux points arbitraires P'(X', Y', Z'), P''(X'', Y'', Z'') d'une droite quelconque d, on trouve que le lieu des pôles de cette droite d pour les coniques (1) est la conique γ d'équation

(14) $$\begin{vmatrix} \Sigma X \frac{\partial F_1}{\partial X'} & \Sigma X \frac{\partial F_2}{\partial X'} \\ \Sigma X \frac{\partial F_1}{\partial X''} & \Sigma X \frac{\partial F_2}{\partial X''} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} \Sigma X' \frac{\partial F_1}{\partial X} & \Sigma X' \frac{\partial F_2}{\partial X} \\ \Sigma X'' \frac{\partial F_1}{\partial X} & \Sigma X'' \frac{\partial F_2}{\partial X} \end{vmatrix} = 0, \qquad (15)$$

ou encore

$$(16)\qquad \begin{vmatrix} X' & Y' & Z' \\ X'' & Y'' & Z'' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X} & \frac{\partial F_1}{\partial Y} & \frac{\partial F_1}{\partial Z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial X} & \frac{\partial F_2}{\partial Y} & \frac{\partial F_2}{\partial Z} \end{vmatrix} = 0.$$

Le second facteur du premier membre de cette dernière équation peut être remplacé par

$$(17)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X}+\alpha\frac{\partial F_2}{\partial X} & \frac{\partial F_1}{\partial Y}+\alpha\frac{\partial F_2}{\partial Y} & \frac{\partial F_1}{\partial Z}+\alpha\frac{\partial F_2}{\partial Z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial X} & \frac{\partial F_2}{\partial Y} & \frac{\partial F_2}{\partial Z} \end{vmatrix} = 0;$$

il se réduit à

$$(18)\qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial X} & \frac{\partial F_2}{\partial Y} & \frac{\partial F_2}{\partial Z} \end{vmatrix}$$

et l'équation (16) se réduit à une identité, si, la conique d'équation

$$(19)\qquad F_1(X,Y,Z) + \alpha F_2(X,Y,Z) = 0$$

étant une conique dégénérée, on remplace les coordonnées courantes X, Y, Z par les coordonnées d'un point double de cette conique. La conique γ, lieu des pôles de la droite d pour les coniques du faisceau (1) passe donc par les points doubles des coniques dégénérées, et comme les faisceaux engendrés par les droites (13) lui sont projectifs et sont projectifs au faisceau des coniques (1), elle est également projective à ce faisceau de coniques.

N.B.– Les considérations qui précèdent supposent que la droite d ne passe pas par un point double d'une conique dégénérée du faisceau (1). Lorsque la droite d passe par un pareil point, on peut supposer que ce point coïncide avec le point P' et qu'il est un point double de la conique F_1. On doit faire

$$(20)\qquad \frac{\partial F_1}{\partial X'} = \frac{\partial F_1}{\partial Y'} = \frac{\partial F_1}{\partial Z'} = 0$$

et l'équation (14) de la conique γ se réduit à une identité. Mais les équations (13) deviennent

$$(21)\qquad k\,\Sigma X \frac{\partial F_2}{\partial X'} = 0 \qquad \text{et} \qquad \Sigma X \left(\frac{\partial F_1}{\partial X''} + k\frac{\partial F_2}{\partial X''}\right) = 0;$$

dans ce cas, le lieu des pôles de la droite d est formé des deux droites d'équations

$$(22)\qquad \Sigma X \frac{\partial F_2}{\partial X'} = 0 \qquad \text{et} \qquad \Sigma X \frac{\partial F_1}{\partial X''} = 0;$$

la seconde droite est le lieu des pôles de la droite d pour la conique F' qui est la conique du faisceau (1) correspondant à la valeur $k = 0$ du paramètre k ; la première droite est la polaire du point P' pour les autres coniques du faisceau et le lieu des pôles de la droite d pour les mêmes coniques ; chacun de ces pôles est sur la polaire correspon-

dante du point X" représentée par la seconde équation (21) et il en résulte que, dans le cas actuel, les pôles de la droite d pour les coniques du faisceau (1) engendrent une ponctuelle du premier degré projective à ce faisceau; le point de la ponctuelle qui correspond à la conique F' est le point d'intersection des droites (22).
Lorsque la droite d passe par plus d'un point double de coniques dégénérées du faisceau (1), ses pôles pour les coniques non dégénérées du faisceau se confondent en un seul (Voir 3°, 3, e et f).
N.B.[2] _ Le lecteur appliquera sans peine les calculs et les considérations qui précèdent aux faisceaux de coniques définis par les équations (1), (9), (10) et (11) des pages 76, 77 et 78.

H.- Remarques sur les propriétés polaires des coniques dégénérées.

117.- Les propriétés polaires des coniques dégénérées ont déjà été appliquées dans ce qui précède, en particulier, aux coniques dégénérées en droites dans le faisceau des coniques circonscrites à un quadrangle quelconque; on les rassemble ici pour mettre en évidence la corrélation qui existe entre les propriétés des coniques dégénérées en droites et celles des coniques dégénérées en points.

1° **Coniques dégénérées en droites.** - Une conique dégénérée en droites a été définie comme le cas de dégénérescence d'une ponctuelle du second degré dans lequel le support de celle-ci se réduit à deux droites d'un même plan Une conique dégénérée en droites est donc l'ensemble de deux ponctuelles du premier degré situées dans un même plan. La polaire d'un point pour une telle conique est encore le support des conjuguées harmoniques du point par rapport aux couples de points d'intersection de la conique par les droites du faisceau ayant le point pour support dans le plan de la conique. On en déduit:

1) **La conique est formée de deux droites. d_1, d_2 confondues avec une droite d.** - Tous les points de la droite d sont des points doubles de la conique. Toute droite du plan peut être considérée comme la polaire de n'importe lequel des points de la droite d et celle-ci est la polaire des autres points du plan.

2) **La conique est formée de deux droites distinctes d_1, d_2.** - Le point $A \equiv d_1 . d_2$ est le seul point double de la conique et toute droite du plan peut être considérée comme la polaire de ce point pour la conique. La polaire d'un autre point des droites d_1, d_2, est celle de ces deux droites sur laquelle il se trouve. La polaire d'un point B, situé dans le plan, en dehors des droites d_1, d_2, est la droite conjuguée harmonique d' de la droite $d \equiv AB$ par rapport aux droites d_1, d_2; cette droite d' est la polaire des points différents du point A sur la droite d, celle-ci, elle-même, est la polaire des points différents du point A sur la droite d'; deux points quelconques des droites d, d' sont dits conjugués pour la conique.

2° **Coniques dégénérées en points.** - Une conique dégénérée en points a été définie comme le cas de dégénérescence d'un faisceau du second degré dans lequel le support de celui-ci se réduit à deux points. Une conique dégénérée en points est donc formée de deux faisceaux du premier degré situés dans le même plan. Le pôle d'une droite du plan pour une telle conique est encore le support du faisceau des droites conjuguées harmoniques de la droite donnée par rapport aux couples de droites joignant les points de cette droite aux deux points formant la conique. On en déduit les propriétés suivantes.

1) **La conique est formée de deux points P_1, P_2 confondus en un point P.** - Toute droite menée par le point P est une droite double de la conique Tout point du

π

plan peut être considéré comme un pôle de n'importe laquelle des droites passant par le point P et celui-ci est le pôle des autres droites du plan.

2) La conique est formée de deux points distincts P_1, P_2. – La droite $a \equiv P_1, P_2$ est la seule droite double de la conique et tout point du plan peut être considéré comme le pôle de cette droite pour la conique. Le pôle d'une autre droite passant par l'un des points P_1, P_2 est celui de ces deux points par lequel la droite passe. Le pôle d'une droite b situé dans le plan de la conique et ne passant ni par P_1 ni par P_2 est le conjugué harmonique P' du point $P \equiv ab$ par rapport aux points P_1, P_2; ce point P' est le pôle de toute droite différente de la droite a qui passe par le point P; celui-ci est le pôle de toute droite différente de la droite a passant par le point P'; deux droites quelconques menées par les points P, P' sont dites conjuguées pour la conique.

§ III : Du centre, des diamètres et des axes des coniques.

A. Définitions et propriétés des diamètres et du centre.

118. 1° Diamètre. Les diamètres d'une conique γ située dans un plan propre ϖ sont les droites dont les pôles pour la conique γ sont à l'infini dans le plan ϖ. Si le point A de la droite de l'infini du plan ϖ est le pôle du diamètre a, celui-ci est conjugué aux droites parallèles formant le faisceau dont le support est le point A.

2° Centre. On dit que le point C du plan ϖ est un centre de la conique γ (1°), s'il est un pôle de la droite de l'infini du plan ϖ pour la conique γ.

3° Cas des coniques dégénérées en droites. – 1) La conique γ est formée de deux droites confondues avec la droite de l'infini du plan ϖ. Toute droite et tout point du plan ϖ sont un diamètre et un centre de la conique.

2) La conique est formée de deux droites d_1, d_2 confondues avec une droite propre d. Le point à l'infini sur la droite d est un point double de la conique; les autres points de la droite de l'infini du plan ϖ n'appartiennent pas à la conique; le diamètre conjugué aux droites parallèles à la droite d est indéterminé, tandis que les autres diamètres sont confondus avec la droite d dont les points sont les centres de la conique.

3) La conique γ est formée de la droite de l'infini d_1 du plan ϖ et d'une droite propre d_2 de ce plan. Le diamètre conjugué des droites parallèles à d_2 est indéterminé; les autres diamètres coïncident avec la droite d_1 dont les points sont les centres de la conique.

4) La conique γ est formée de deux droites propres distinctes et parallèles d_1, d_2. Le diamètre conjugué aux droites parallèles aux droites d_1, d_2 est indéterminé; les autres diamètres sont confondus avec la droite propre du lieu des points équidistants des droites d_1, d_2 et les points de la droite d sont les centres de la conique.

5) La conique γ est formée de deux droites propres non parallèles d_1, d_2. Soit C le point commun aux droites d_1, d_2. Le diamètre conjugué aux droites parallèles passant par le point impropre A est la droite d' conjuguée harmonique de la droite $d \equiv CA$ par rapport aux droites d_1, d_2; la droite d est elle-même le diamètre conjugué des droites parallèles à la droite d'. On dit que les droites d, d' sont des diamètres conjugués de la conique considérée dont le point C est le seul centre.

4° **Cas des coniques dégénérées en points.** Le centre d'une conique dégénérée en deux points propres et distincts est le milieu de la distance de ces points; celui d'une conique dégénérée en deux points confondus en un point propre coïncide avec celui-ci.

5° **Cas des coniques non dégénérées.** 1) Lorsque la conique γ n'est pas une conique dégénérée, tout point et toute droite du plan ϖ ont une polaire et un pôle bien déterminés. Tout point impropre A du plan ϖ est donc le pôle d'un diamètre a bien déterminé et la droite impropre c du plan ϖ est la polaire d'un point bien déterminé C qui est le seul centre de la conique; de plus, le point A étant sur la droite c, la droite a passe par le point C, de sorte que les diamètres d'une conique non dégénérée sont les droites du faisceau dont le support est le centre de la conique.

2) Si la conique γ est tangente à la droite impropre c, le point de contact est le centre C de la conique dont les diamètres sont donc parallèles à la direction asymptotique de la courbe. Le diamètre a dont le pôle est le point impropre A passe par le point C et coupe la conique γ en un point propre B; la droite AB est tangente au point B à la conique γ dont les équations ponctuelle et tangentielle, dans le triangle ABC adopté pour triangle de référence, sont

$$aX^2 + 2bYZ = 0 \qquad \text{et} \qquad bx^2 + 2a\,yz = 0,$$

avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

3) Si la conique γ coupe la droite impropre c en des points distincts A', A", le centre C de la conique est le point propre où se rencontrent les tangentes en ces points ou les asymptotes a', a" de la courbe; chacune des asymptotes a', a" est un diamètre parallèle aux droites qui lui sont conjuguées; les diamètres sont deux à deux conjugués par rapport à la conique et ils forment un faisceau involutif dont le support est le centre C de la conique et dont les droites doubles sont les asymptotes a', a"; le centre C est le milieu des cordes de la conique sur lesquelles il se trouve; les tangentes aux points propres où un diamètre différent des asymptotes coupe la conique sont parallèles au diamètre conjugué du diamètre considéré.

Quand on prend le triangle A'A"C pour triangle fondamental, les équations ponctuelle et tangentielle de la conique γ sont

$$2XY + kZ^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad 2k\,xy + z^2 = 0$$

avec $k \neq 0$.

Si les points impropres A, B forment un quaterne harmonique avec les points A', A" de telle manière que les droites CA, CB sont deux diamètres conjugués de la conique γ, les équations ponctuelle et tangentielle de celle-ci dans le triangle fondamental ABC sont

$$aX^2 + a'Y^2 + a''Z^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{a'} + \frac{z^2}{a''} = 0$$

avec $a \neq 0$, $a' \neq 0$ et $a'' \neq 0$.

B. Equations canoniques des coniques réelles.

119. 1° **Parabole.** Soient A et B, C et D les points propres et réels où deux droites parallèles de direction arbitraire coupent la parabole considérée (P); E, F les milieux des segments rectilignes AB, CD; O le point à distance finie où le diamètre EF conjugué aux droites AB, CD coupe la parabole (P); I le point à l'infini sur le diamètre EF; Oy la tangente au

point O ou la parallèle aux droites AB, CD par ce point; G, H les points d'intersection de la droite AB et des droites OC, İC. – On se propose d'établir l'équation ponctuelle de la parabole (P) en coordonnées cartésiennes, l'axe des x étant le diamètre EF ou Ox et l'axe des y la tangente Oy, sans appliquer l'équation obtenue ci-dessus (118, n° 2). A cet effet, on observe que le point impropre de l'axe des y étant le pôle de l'axe des x, les points G, H des côtés OC, İC du triangle COI sont conjugués par rapport à la parabole; ils partagent harmoniquement le segment rectiligne AB et on a

(1) $$EG.EH = EA^2.$$

Mais $x = OF$, $y = FC$ sont les coordonnées du point C dans les axes coordonnés Ox, Oy; donc

(2) $$EG = \frac{OE.FC}{OF} = \frac{OE.y}{x}, \qquad EH = FC = y$$

et la relation (1) donne l'équation cherchée

(3) $$y^2 = \frac{EA^2}{OE}.x \qquad \text{ou} \qquad y^2 = 2px,$$

si $2p = EA^2 : OE$.

N.B. – On dit que $2p$ est le paramètre de la parabole (P) pour le point O ou le diamètre Ox.

2° **Ellipse.** 1) Soient $2a$, $2b$ les longueurs de deux diamètres conjugués réels A_1A, B_1B de l'ellipse (E); O le centre et M un point réel de la courbe; C, C_1 les points où la droite B_1B coupe les droites AM, A_1M; $x = OD$, $y = DM$ les coordonnées du point M dans les axes Ox, Oy placés sur les droites A_1A, B_1B. Le point à l'infini sur l'axe Oy étant le pôle de l'axe des x, les points C, C_1 des côtés AM, A_1M du triangle MAA_1 sont conjugués par rapport à l'ellipse (E) et forment un groupe harmonique avec les points B, B_1. On a donc.

(1) $$OC.OC_1 = OB^2 = b^2.$$

Mais

(2) $$OC = \frac{DM.OA}{DA} = \frac{ay}{a-x}, \qquad OC_1 = \frac{DM.A_1O}{A_1D} = \frac{ay}{a+x}$$

et la relation (1) devient l'équation cherchée

(3) $$\frac{a^2y^2}{a^2-x^2} = b^2 \qquad \text{ou} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

N. B. – a. – Lorsque le point M décrit l'ellipse (E), les points B_1, B sont les points doubles de l'involution engendrée par les points C, C_1 sur l'axe Oy; les points C, C_1 se déplacent dans des sens opposés sur cet axe et les droites AC ou AM, A_1C_1 ou A_1M tournent dans le même sens autour des points A, A_1. Mais les parallèles à ces droites par le point O sont des diamètres conjugués de l'ellipse; on en déduit que les diamètres conjugués sont les rayons conjugués d'un faisceau involutif dont les rayons doubles, les asymptotes de l'ellipse, sont des droites imaginaires conjuguées.

b. – Lorsque les points où une ellipse coupe la droite de l'infini sont les points

cycliques, deux diamètres conjugués quelconques sont perpendiculaires; l'angle A_1MA est droit quelle que soit la position du point M sur la courbe et celle-ci est la circonférence décrite sur A_1A comme diamètre, ce qui est une propriété déjà connue.

c.- Soient $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ deux ellipses réelles situées dans les plans propres et réels ϖ, ϖ'; A, A_1, $B_1 B$ deux diamètres conjugués de $\mathcal{E}$; $A'_1 A'$, $B'_1 B'$ deux diamètres conjugués de $\mathcal{E}'$. Les ellipses $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ sont des courbes homologues dans l'affinité établie par les quatre couples de points A et A', A_1 et A'_1, B et B', B_1 et B'_1 entre les systèmes plans ayant les plans ϖ; ϖ' pour supports. Le rapport des aires de l'ellipse $\mathcal{E}$ et du parallélogramme des tangentes en A, A_1, B, B_1 est donc égal au rapport des aires de l'ellipse $\mathcal{E}'$ et du parallélogramme des tangentes en A', A'_1, B', B'_1. Mais si l'ellipse $\mathcal{E}'$ est une circonférence de rayon R, le second rapport est égal à π; on peut donc énoncer ces deux propriétés:

α) Si $2a$, $2b$ et θ sont les longueurs et l'angle de deux diamètres conjugués, l'aire de l'ellipse est $\pi ab \sin\theta$;

β) L'aire du parallélogramme des tangentes à une ellipse aux extrémités de deux diamètres conjugués quelconques est constante (Théorème d'Apollonius).

On dit que le parallélogramme des tangentes aux extrémités de deux diamètres conjugués est le parallélogramme construit sur ces diamètres; la propriété précédente peut donc s'énoncer: L'aire du parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués quelconques d'une l'ellipse est constante.

3° Hyperbole.- 1) Soient $\dot{I}, \dot{J}$ les points à l'infini sur les asymptotes $0x$, $0y$, de l'hyperbole (H); $x = 0A$, $y = 0B$ les coordonnées d'un point quelconque M de la courbe dans les axes coordonnés $0x$, $0y$. Lorsque le point M parcourt l'hyperbole, les droites $\dot{I}M$, $\dot{J}M$ engendrent des faisceaux projectifs dont les supports sont les points $\dot{I}, \dot{J}$; les points A, B décrivent sur les axes $0x$, $0y$ des ponctuelles projectives ayant toutes deux le point 0 comme point limite; le produit $0A.0B$ a une valeur constante k et l'équation de l'hyperbole (H) rapportée à ses asymptotes $0x$, $0y$ est

$$xy = k. \tag{1}$$

N.B¹.- On déduit de cette équation que les points réels de l'hyperbole sont dans deux des angles opposés par le sommet formés par les asymptotes, ce qui est une propriété déjà connue; mais on voit en outre que la distance du point M à une asymptote a zéro pour limite lorsque le point M se meut sur la courbe vers le point impropre de l'asymptote considérée

N.B².- La valeur de la constante k des équations (1) s'appelle la puissance de l'hyperbole considérée (H).

2) Soient d, d_1 les asymptotes d'une hyperbole (H); $0x$, $0y$ deux diamètres conjugués quelconques pris pour axes coordonnés ou deux rayons conjugués quelconques du faisceau involutif dont les droites d, d_1 sont les droites doubles. Un des diamètres coupe l'hyperbole (H) en des points réels, l'autre la coupe en des points imaginaires conjugués: le premier est dit réel et le second est dit imaginaire, bien qu'étant une droite réelle. Soient $0x$ le diamètre réel et $0y$ le diamètre imaginaire du couple de diamètres conjugués considérés; A_1, A les points réels où $0x$ coupe la courbe; M un point réel de celle-ci; C, C_1 les points où les droites AM, A_1M rencontrent l'axe $0y$; D et D_1, D_2 et D_3 les points d'intersection des asymptotes d, d_1 par les tangentes en A et A_1; $x = 0E$, $y = EM$ les coordonnées du point M. Les tangentes à l'hyperbole aux

points A, A_1 sont parallèles; le quadrilatère $DD_1D_2D_3$ est un parallélogramme dont les côtés DD_3, D_1D_2 sont parallèles à l'axe Ox et coupent l'axe Oy en des points B, B_1 équidistants du point O. Ces points B, B_1 sont des points conjugués de l'involution engendrée par les points C, C_1 sur l'axe Oy lorsque le point M parcourt l'hyperbole (H). Si $2a, 2b$ sont les longueurs des segments rectilignes A_1A, B_1B on a

(2) $$OC.OC_1 = OB.OB_1 = -b^2 \qquad OD = \frac{ay}{a-x}, \quad OD_1 = \frac{ay}{a+x}$$

et on en déduit l'équation cherchée

(3) $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

N.B.[1] - On dit que $2a$ et $2b$ sont les longueurs des deux diamètres conjugués A_1A, B_1B de l'hyperbole (H) et que le parallélogramme $DD_1D_2D_3$ est construit sur ces diamètres. Le point A étant le milieu de DD_1, ses coordonnées dans les asymptotes d, d_1 sont $\frac{1}{2}OD$ et $\frac{1}{2}OD_1$; la puissance de l'hyperbole (H) est donc

(4) $$k = \frac{1}{4} OD . OD_1.$$

Mais si θ est l'angle des asymptotes d, d_1, l'aire du parallélogramme $DD_1D_2D_3$ est

(5) $$2\,OD.OD_1 \sin\theta = 8k\sin\theta;$$

On en déduit que : l'aire du parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués quelconques d'une hyperbole est constante (Théorème d'Apollonius).

N.B.[2] - Les diamètres conjugués A_1A, B_1B tournent dans des sens contraires autour du point O et coïncident l'un avec l'autre sur chacune des asymptotes d, d_1.

3) **Hyperboles conjuguées.** Lorsque le point A parcourt l'hyperbole (H), les points D, D_1 tracent des ponctuelles projectives sur les asymptotes d, d_1. Les points D_1, D_3 étant symétriques par rapport au point O, la ponctuelle décrite par le point D sur la droite d est projective à celle décrite par le point D_3 sur la droite d_1 et la droite DD_3 reste tangente à une conique tangente aux droites d, d_1. En mettant le point D sur le point O, les points D_1, D_3 sont à l'infini sur la droite d_1, en mettant les points D_1, D_3 sur le point O, le point D est à l'infini sur la droite d. La conique à laquelle la droite DD_3 reste tangente est donc une seconde hyperbole (H') asymptote aux droites d, d_1. A cause des relations (4) et (5), les hyperboles $(H), (H')$ ont des puissances égales et de signes contraires; elles ont les mêmes diamètres en grandeur et direction, mais les diamètres réels de l'une sont les diamètres imaginaires de l'autre. L'équation de l'hyperbole (H') rapportée aux mêmes diamètres conjugués A, A_1, B_1B que l'hyperbole (H) par (3) est

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

On dit que les hyperboles $(H), (H')$ sont conjuguées

4) **Hyperbole équilatère.** Lorsque l'hyperbole est équilatère, ses asymptotes sont perpendiculaires et, en vertu des propriétés des faisceaux involutifs, elles sont les bissectrices des angles formés par deux diamètres conjugués quelconques; le parallélogramme construit sur de tels diamètres est un losange.

C. Axes des coniques.

120. 1° **Parabole.** - Le diamètre conjugué des droites perpendiculaires à la direction

des diamètres de la parabole (P) (n°119) est perpendiculaire à ces droites et s'appelle l'axe de la parabole (P). Les droites qui lui sont conjuguées sont dites principales. Le point propre où il coupe la courbe est le sommet de celle-ci et la tangente correspondante s'appelle la tangente au sommet. En rapportant la parabole (P) à son axe Ox et à la tangente au sommet Oy, son équation

$$y^2 = 2px,$$

appliquée au point A de coordonnées $x = OB$, $y = BA$, donne

$$BA^2 = 2p \cdot OB.$$

Mais si C est le point où la perpendiculaire au point A à la droite OA coupe l'axe Ox, on a

$$BA^2 = OB \cdot BC$$

et $2p = BC$, ce qui fournit le moyen de construire le paramètre principal $2p$ de la parabole (P), connaissant l'axe Ox, la tangente au sommet Oy et un point A de la courbe.

On peut construire $2p$ d'une autre manière. Soient D, E les points d'intersection de l'axe Ox avec la tangente et la normale à la parabole au point A. On a

$$DO = OB, \qquad DB = 2OB, \qquad BA^2 = DB \cdot BE = 2\,OB \cdot BE \qquad \text{et} \qquad p = BE,$$

ce qui permet de dire que la sous-normale d'un point quelconque d'une parabole par rapport à l'axe de la courbe est constante et égale à la moitié du paramètre principal de la parabole.

3° Ellipse. Les diamètres conjugués d'une ellipse sont les rayons conjugués d'un faisceau involutif elliptique. Ce faisceau n'a que deux rayons conjugués perpendiculaires, ou bien, l'angle de deux rayons conjugués quelconques est droit et le faisceau est rectangulaire. Dans le premier cas, l'ellipse ne possède que deux diamètres conjugués rectangulaires; on les appelle les axes de l'ellipse et les points où ils coupent l'ellipse sont les sommets de celle-ci. Dans le second cas, l'ellipse passe par les points cycliques et est une circonférence.

3° Hyperbole. Dans le cas de l'hyperbole, le faisceau involutif des diamètres conjugués est hyperbolique et ses rayons doubles sont les asymptotes de la courbe. Les seuls diamètres conjugués rectangulaires sont les bissectrices des angles formés par les asymptotes. Ces diamètres sont appelés les axes de l'hyperbole. L'un d'eux est un diamètre réel et les points où il coupe l'hyperbole sont les sommets réels de celle-ci. L'autre est un diamètre imaginaire et les points où il coupe l'hyperbole conjuguée de l'hyperbole donnée s'appellent les sommets imaginaires de cette dernière.

D. Propriétés des faisceaux de coniques

121. On ne traitera que les cas des faisceaux des coniques circonscrites à un quadrangle ou inscrites à un quadrilatère et on suppose que les sommets, les côtés, les points diagonaux et les diagonales du quadrangle et du quadrilatère sont à distance finie. Il sera facile de reconnaître comment les propriétés se modifient lorsque l'un ou l'autre des éléments du quadrangle ou du quadrilatère est rejeté à l'infini, et d'étendre

ces propriétés aux autres faisceaux de coniques.

1° **Faisceau des coniques circonscrites à un quadrangle.** On considère le faisceau ponctuel des coniques (θ) circonscrites à un quadrangle non dégénéré ABCD dont les sommets sont des points propres ainsi que les points diagonaux. Les propriétés suivantes sont des conséquences immédiates des propriétés polaires dont elles sont un cas particulier. Les diamètres conjugués à une même direction pour les coniques (θ) passent par un même point et engendrent un faisceau projectif à celui des coniques; le point impropre P de la direction considérée et le point P' où se coupent les diamètres conjugués à cette direction sont les points doubles de l'involution des points d'intersection de la droite PP' avec les coniques (θ) et les points de contact de deux de ces coniques avec la droite PP', qui est donc une asymptote de l'une des deux coniques. Lorsque le point P parcourt la droite de l'infini, le lieu du point P' est une conique γ circonscrite au triangle EFG; la conique γ est aussi le lieu des centres des coniques (θ); envisagée de cette manière, elle est projective au faisceau de ces coniques, elle passe par les milieux des côtés du quadrangle, son centre est le point de rencontre des droites joignant les milieux des côtés opposés du quadrangle; ses asymptotes sont parallèles aux diamètres des deux paraboles circonscrites au quadrangle; elle passe donc par les points doubles de l'involution des points d'intersection de la droite de l'infini par les coniques (θ); elle est une hyperbole ou une ellipse selon que les quadrangles simples ayant les points A, B, C, D pour sommets ne sont pas tous ou sont tous concaves; elle est une hyperbole équilatère lorsque les points A, B, C, D sont sur une circonférence; elle est une circonférence lorsque deux des coniques (θ) sont des hyperboles équilatères, auquel cas, toutes les coniques (θ) sont des hyperboles équilatères et chacun des points A, B, C, D est l'orthocentre du triangle des trois autres, ce qui conduit à cette propriété: les hyperboles équilatères circonscrites à un triangle passent par l'orthocentre du triangle et le lieu de leurs centres est la circonférence des neuf points du triangle. A cause de ce cas particulier, la conique γ s'appelle la conique des neuf points du quadrangle ABCD; les neuf points par où elle passe qui justifient cette démonstration sont les milieux des côtés et les points diagonaux du quadrangle.

2° **Faisceau des coniques inscrites à un quadrilatère.** – On considère le faisceau tangentiel des coniques (φ) inscrites à un quadrilatère non dégénéré abcd dont les côtés sont des droites propres ainsi que les diagonales e, f, g. Les propriétés suivantes sont également un cas particulier des propriétés polaires. Le lieu des centres des coniques φ est la droite joignant les milieux des diagonales du quadrilatère (Théorème de Newton; la droite lieu des centres s'appelle la newtonienne du quadrilatère); la ponctuelle des centres est projective au faisceau des coniques (φ). Les diamètres des coniques (φ) qui sont conjugués à une même direction sont les droites d'un faisceau du second degré projectif au faisceau des coniques et dont le support est une conique inscrite au triangle efg.

§ IV: Propriétés focales.

A. Définitions.

122. 1° Un point est un foyer d'une conique lorsque le faisceau des droites conjuguées pour la conique dont il est le support est rectangulaire.

2° La polaire d'un foyer s'appelle la directrice de la conique pour le foyer considéré.

B.– Coniques réelles dans un plan propre et réel.

123. Propriétés générales. 1° Tout foyer réel d'une conique réelle est intérieur à la courbe et toute directrice réelle d'une conique réelle est extérieure à la courbe.
2° La polaire d'un point d'une directrice passe par le foyer correspondant et est perpendiculaire à la droite joignant ce foyer au point pris sur la directrice.
3° La partie d'une tangente limitée au point de contact et à une directrice est vue sous un angle droit du foyer correspondant à cette directrice.
4° Si la corde AB de la conique γ coupe la directrice f au point C, la droite CF allant du point C au foyer F correspondant à la directrice f est l'une des bissectrices de l'angle AFB; l'autre bissectrice de cet angle joint le point F au pôle D de la droite AB pour la conique γ, ou, ce qui revient au même, au point de rencontre des tangentes aux points A, B.
5° Le rapport des distances d'un point quelconque d'une conique à un foyer et à la directrice correspondante est constant; on l'appelle l'excentricité de la conique pour la directrice et le foyer considérés.
En effet, si AA', BB' sont les distances des points A, B à la directrice f (4°), on a

$$|AA' : BB'| = |CA : CB| = |FA : FB|$$

et on en tire

$$|AF : AA'| = |BF : BB'| .$$

ce qui démontre la propriété.
6° Les ponctuelles projectives qu'une tangente variable d'une conique trace sur deux tangentes fixes sont projetées d'un foyer de la conique suivant des faisceaux égaux et de même sens.
7° Les tangentes à une conique par un foyer de la courbe sont les droites isotropes issues de ce point dans le plan de la conique.
En effet, les tangentes issues d'un point quelconque sont les droites doubles du faisceau des droites issues de ce point et conjuguées pour la conique. Dès lors, la propriété résulte de ce que ce faisceau est rectangulaire lorsque le point est un foyer de la conique.
8° Les foyers d'une conique sont les sommets d'un parallélogramme circonscrit à la courbe et dont les côtés opposés concourent aux points cycliques du plan.
9° Quand la conique est une circonférence, elle passe par les points cycliques; les côtés du parallélogramme se confondent deux par deux sur les droites isotropes issues du centre de la courbe. Dès lors, le centre d'une circonférence est le seul foyer de celle-ci et la seule directrice est la droite de l'infini.
10° Quand la conique est une parabole, deux des tangentes issues des points cycliques se confondent avec la droite de l'infini et une parabole n'a qu'un seul foyer à distance finie. Le foyer est sur l'axe de la parabole, car le diamètre sur lequel il se trouve doit être perpendiculaire à la direction conjuguée. Il en résulte qu'une parabole n'a qu'une seule directrice et cette directrice est perpendiculaire à l'axe de la courbe; de plus, le sommet divise en deux parties égales la distance du foyer à la directrice.

11° Quand la conique est une hyperbole ou une ellipse différente d'une circonférence, les quatre foyers sont à distance finie et ne sont pas confondus avec le centre de la conique; deux sont réels et deux sont imaginaires. Mais les diagonales d'un quadrilatère complet circonscrit à une conique sont les côtés d'un triangle polaire et chaque diagonale d'un quadrilatère est coupée harmoniquement par les deux autres; les quatre foyers d'une ellipse ou d'une hyperbole sont donc situés sur les axes de la courbe et sont symétriques deux par deux par rapport au centre de la courbe. On en déduit: si la conique est une ellipse ou une hyperbole, elle a quatre directrices qui, deux à deux, sont perpendiculaires à ses axes et symétriques par rapport à son centre; deux des directrices sont réelles et les deux autres sont imaginaires.

124. **Foyer et directrice de la parabole.** – 1° Soient Ox l'axe de la parabole (P); Oy la tangente au sommet O. F le foyer; A le pied de la directrice f sur l'axe Ox; a, b deux droites rectangulaires issues du foyer F et faisant des angles de 45° et 135° avec l'axe Ox; B le point af; d le diamètre passant par le point B; C, D les points d'intersection du diamètre d avec la parabole et la droite b. Les droites a, b sont conjuguées pour la parabole (P); la droite b est la polaire du point B; $BC = CD$ et FC est parallèle à Oy. Le triangle BFD donne

$$FC^2 = BC.CD = AF.CD = 2OF.CD.$$

Mais si $2p$ est le paramètre principal de la parabole, il faut que

$$FC^2 = 2p.CD.$$

On a donc

$$CD = p \qquad \text{et} \qquad AO = OF = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}p,$$

ce qui donne le moyen de construire le foyer F et la directrice f, connaissant l'axe de la parabole, la tangente au sommet et un point de la courbe.

2° **Corollaires.** 1) L'excentricité de toute parabole est égale à l'unité et toute parabole est le lieu des centres des circonférences qui passent par un point fixe, le foyer, et sont tangentes à une droite donnée, la directrice.

2) La tangente et la normale en un point d'une parabole sont les bissectrices de l'angle formé par le diamètre qui passe par le point considéré et la droite joignant ce point au foyer.

3) La directrice d'une parabole est le lieu des symétriques du foyer par rapport aux tangentes à la courbe, et la tangente au sommet est la polaire de la parabole pour le foyer.

125 **Foyers et directrices de l'ellipse.** – 1° Soient $2a$, $2b$ les longueurs des axes A_1A, B_1B de l'ellipse (E); O le centre de l'ellipse. Supposons les foyers réels F_1, F situés sur l'axe A_1A et désignons par c les distances égales F_1O, OF. Si D_1, D sont les pieds des directrices f_1, f sur l'axe A_1A, on a

$$OF_1.OD_1 = OF.OD = OA^2 = a^2.$$

La tangente à l'ellipse (E) au point B est parallèle à l'axe A_1A; elle coupe la directrice f en un point C dont la polaire pour l'ellipse (E) est la droite FB; l'angle BFC est un angle droit. Si FE est la distance du foyer F à la tangente BC,

on a

$$b^2 = OB^2 = FE^2 = BE.EC_1 = OF(OD - OF) = c\left(\frac{a^2}{c} - c\right) = a^2 - c^2.$$

on en déduit

$$c^2 = a^2 - b^2 \qquad \text{et} \qquad BF = BF_1 = a,$$

ce qui exige que l'axe A_1A soit le grand axe de l'ellipse $(\mathcal{E})$.
Connaissant les foyers F_1, F, on construit ensuite facilement les points D_1, D et les directrices f_1, f.

2° Corollaires. 1) L'excentricité de l'ellipse $(\mathcal{E})$ a la même valeur $\frac{c}{a}$ plus petite que l'unité pour les deux foyers F_1, F.

2) La somme des distances des points d'une ellipse aux foyers réels est constante et égale à la longueur du grand axe de l'ellipse.

Soient MG_1, MG les distances d'un point quelconque M de l'ellipse $(\mathcal{E})$ aux directrices f_1, f. On a, si $e = \frac{c}{a}$ est l'excentricité,

$$|MF_1| + |MF| = e|MG_1| + e|MG| = e|G_1G| = e|D_1D| = 2e|OD| = 2\frac{c}{a}\cdot\frac{a^2}{c} = 2a$$

3) On a

$$|MF_1| + |MF| <, =, > 2a,$$

suivant que le point M est intérieur à l'ellipse, sur l'ellipse, ou extérieur à l'ellipse.

4) L'ellipse est le lieu des centres des circonférences qui passent par un point fixe, un des foyers réels, et sont tangentes intérieurement à une circonférence donnée ayant pour centre le second foyer réel et la longueur du grand axe de l'ellipse pour rayon.

126. Foyers et directrices de l'hyperbole. — 1° Soient $2a, 2b$ les longueurs de l'axe réel A_1A et de l'axe imaginaire B_1B de l'hyperbole (H); O le centre de la courbe; $OACB$ le rectangle construit sur OA et OB; F_1, F les foyers réels; f_1, f les directrices correspondantes. Les foyers réels devant être intérieurs à l'hyperbole, sont situés sur l'axe réel A_1A; si D_1, D sont les pieds des directrices f_1, f sur cet axe, on a

$$OD_1.OF_1 = OD.OF = a^2.$$

Si E est le point d'intersection de la directrice f avec l'asymptote OC, la polaire de ce point doit passer par le foyer F, être parallèle à l'asymptote OC et être perpendiculaire à la droite EF. L'angle OEF est donc un angle droit et on a

$$OD.OF = OE^2.$$

En rapprochant cette formule de la précédente, on en déduit

$$OE = a;$$

Les triangles OAC, OEF sont égaux; on désigne par c les distances égales F_1O, OF et on a

$$EF = b \qquad \text{et} \qquad c = OF = \sqrt{a^2 + b^2}$$

ce qui permet de construire les foyers F_1, F et les directrices f_1, f.

2° Corollaires. 1) L'excentricité de l'hyperbole (H) a la même valeur $\frac{c}{a}$, plus grande que l'unité, pour les deux foyers F_1 F.

2) La différence des distances d'un point quelconque d'une hyperbole aux deux foyers réels est constante et égale à la longueur de l'axe réel de l'hyperbole.

3) On a

$$|MF - MF_1| <, = \text{ou} > 2a,$$

suivant que le point M est extérieur à l'hyperbole (H), sur l'hyperbole ou intérieur à l'hyperbole.

3) L'hyperbole est le lieu des centres des circonférences qui passent par un point fixe, un des foyers réels, et sont tangents extérieurement à une circonférence donnée ayant l'autre foyer réel pour centre et la longueur de l'axe réel de l'hyperbole pour rayon.

4) La distance d'un point quelconque d'une hyperbole à un foyer réel est égale à la distance du même point à la directrice correspondant au foyer considéré, si cette seconde distance est comptée parallèlement à une asymptote.

Soient M un point quelconque de l'hyperbole (H) (1°); MG la distance de ce point à la directrice f; K le point où la parallèle à l'asymptote OC par le point M coupe la même directrice f. On a

$$MF = e\,MG = \frac{c}{a}\,MG = \frac{OC}{OA}.MG = \frac{MK}{MG}.MG = MK$$

C. Faisceaux projectifs de supports différents dont les droites homologues sont conjuguées pour une conique et perpendiculaires.

127. 1° Théorème. Si P est un point pris arbitrairement sur l'axe x d'une conique γ, il existe sur le même axe un point P_1 tel qu'à toute droite d menée par le point P correspond une droite perpendiculaire d_1 menée par le point P_1 et conjuguée à la droite d pour la conique γ.

Soient d une droite oblique à l'axe x menée par le point P; D le pôle de la droite d pour la conique γ; d_1 la perpendiculaire à la droite d par le point D; P_1 le point où la droite d_1 coupe l'axe x. La droite d_1 est la seule droite qui soit à la fois conjuguée à la droite d pour la conique γ et perpendiculaire à cette droite. Le faisceau des droites d issues du point P est projectif à deux faisceaux de droites issues du point P_1: un faisceau de droites perpendiculaires aux droites d et un faisceau de droites conjuguées aux droites d pour la conique γ. Ces deux faisceaux sont donc projectifs l'un à l'autre. Mais ils ont trois rayons doubles, le rayon d_1 qui a servi à construire le point P_1, le rayon x_1 perpendiculaire à l'axe x et obtenu lorsque la droite d se confond avec cet axe, le rayon y_1 confondu avec l'axe x et obtenu lorsque la droite d est la perpendiculaire en P à l'axe x. Les deux faisceaux construits au point P_1 sont donc confondus, ce qui démontre le théorème.

2° Théorème. Les ponctuelles engendrées par les points P, P_1 sur l'axe x de la conique γ sont en involution.

Si la droite d menée d'abord par le point P se déplace sans changer de direction, la droite d_1 à l'aide de laquelle on a construit le point P_1 se déplace de la même manière.

Les droites étant conjuguées pour la conique γ, les faisceaux qu'elles engendrent sont projectifs et il en est de même des ponctuelles qui leur sont perspectives, engendrées par les points P, P_1. Mais ces points sont permutables l'un avec l'autre, en vertu du théorème précédent; les ponctuelles qu'ils décrivent sur l'axe x sont donc en involution.

3° Corollaire. Les foyers de la conique γ sur l'axe x sont les points doubles de l'involution engendrée sur cet axe par les points P, P_1.

4° Théorème. Si MT, MT_1 sont les deux tangentes menées du point M à la conique γ et si F, F_1 sont les foyers de la conique sur l'axe x, les angles TMT_1, FMF_1 ont les mêmes bissectrices.

Les tangentes MT, MT_1 sont les rayons doubles du faisceau involutif des droites conjuguées pour la conique γ qui sont issues du point M. Les bissectrices de l'angle TMT_1 sont deux droites conjuguées pour la conique γ et perpendiculaires l'une à l'autre; elles coupent l'axe x en des points qui sont deux des points P, P_1 dont il est question dans les deux théorèmes qui précèdent. Ces points P, P_1 sont donc des points conjugués de la ponctuelle involutive dont les points doubles sont les foyers F, F_1 de la conique γ sur l'axe x; les points P, P_1, F, F_1 forment un quaterne harmonique, il en est de même des droites MP, MP_1, MF, MF_1; mais les droites MP, MP_1 sont perpendiculaires, elles sont donc également les bissectrices de l'angle des droites MF, MF_1.

5° Remarques et corollaires. 1) Le théorème est applicable à la parabole; mais comme dans ce cas le foyer F_1 est à l'infini sur l'axe x, la droite MF_1 devient le diamètre qui passe par M.

2) Lorsque le point M est sur la conique γ, les droites conjuguées perpendiculaires issues du point M sont la tangente et la normale en ce point; dès lors, il résulte de la démonstration précédente (4°) que la tangente et la normale en un point d'une conique sont les bissectrices des angles formés par les droites joignant le point à deux foyers situés sur un même axe de la conique.

3) Le lieu des symétriques d'un foyer réel d'une ellipse ou d'une hyperbole par rapport aux tangentes à la courbe est la circonférence décrite du second foyer réel comme centre avec la longueur de l'axe focal pour rayon. L'axe focal d'une ellipse ou d'une hyperbole est celui qui contient les foyers réels de la courbe.

4) Les polaires d'une ellipse ou d'une hyperbole pour les foyers réels se confondent avec la circonférence décrite sur l'axe focal comme diamètre.

5) Le produit des distances des foyers réels d'une ellipse ou d'une hyperbole à une tangente quelconque est constant et égal au carré du demi-axe non focal.

D.- Application de la méthode des figures polaires réciproques.

128. Théorème. Deux circonférences de centres différents étant placées dans un même plan propre, la figure polaire réciproque de la seconde par rapport à la première est une conique dont un foyer et la directrice correspondante sont le centre de la première circonférence et la polaire du centre de la seconde par rapport à la première.

Deux figures polaires réciproques par rapport à une conique non dégénérée sont des figures homologues dans deux systèmes plans réciproques de même support, le plan ϖ de la conique; la figure polaire réciproque d'une conique γ' par rapport à une conique non dégénérée γ est une conique γ'' et un point A' et sa polaire a pour γ' ont pour

homologues une droite a'' et son pôle A'' pour γ''; le point A'' est le pôle de la droite a' et la droite a'' est la polaire du point A' pour la conique γ. Lorsque, le plan ϖ étant un plan propre, la conique γ' est une circonférence ayant le point A' pour centre, la droite a' est la droite de l'infini du plan ϖ et elle coupe la circonférence γ' aux points cycliques $\dot{I}, \dot{J}$ de ce plan. Les polaires i, j des points $\dot{I}, \dot{J}$ pour la conique γ passent par le point A'' qui est donc le centre de γ et elles touchent la conique γ'' aux points où celle-ci est rencontrée par la droite a''. Si la conique γ est une circonférence, elle a donc le point A'' pour centre et les droites i, j sont les droites isotropes $A''\dot{I}, A''\dot{J}$; par suite, la conique γ'' est tangente aux droites isotropes issues du centre A'' de la circonférence γ aux points où elle coupe la polaire a'' du centre A' de la circonférence γ' par rapport à la circonférence γ; cela revient à dire que la conique γ'' a le centre de la circonférence γ pour foyer, et, pour directrice correspondante, la polaire du centre de la circonférence γ' par rapport à la circonférence γ.

2° Corollaire. Réciproquement, la figure polaire réciproque d'une conique γ'' par rapport à une circonférence γ ayant un foyer de la conique γ'' pour centre est une circonférence γ' dont le centre est le pôle pour la circonférence γ de la directrice de la conique γ'' correspondant au foyer pris pour centre de la circonférence γ.

3° Remarques et corollaires. a. La droite d des centres des circonférences γ, γ' est un axe principal de la conique γ''; les sommets de celle-ci sur cet axe sont les pôles pour la circonférence γ des tangentes à la circonférence γ' qui sont perpendiculaires à la droite d; les directrices asymptotiques de γ'' sont perpendiculaires aux tangentes à γ' par le centre de γ. Si les circonférences γ, γ' sont réelles, la conique γ'' est une hyperbole, une parabole ou une ellipse selon que le centre de la circonférence γ est intérieur à la circonférence γ', est sur cette circonférence ou lui est extérieur.

b.- Les cordes de même longueur de la circonférence γ' sont tangentes à une circonférence γ_1 concentrique à la circonférence γ', elles sont vues du centre de celle-ci sous un angle constant, les tangentes en leurs extrémités se coupent sous un angle constant et le lieu du point où elles se coupent est une circonférence γ_2 concentrique à la circonférence γ'. On en déduit: Les cordes d'une conique γ'' vues d'un foyer de la conique sous un angle constant enveloppent une conique γ_2', les tangentes en leurs extrémités se coupent en un point dont le lieu est une conique γ_1' et limitent sur la directrice correspondant au foyer considéré de γ'' un segment vu de ce point sous un angle constant; de plus, les coniques γ_1', γ_2' ont en commun le foyer considéré de γ'' et la directrice correspondante.

c.- La propriété: Les droites qui projettent un point mobile sur une circonférence de deux points fixes de la courbe engendrent des faisceaux égaux et de même sens, se transforme en: Les droites qui projettent d'un foyer d'une conique les ponctuelles qu'une tangente variable trace sur deux tangentes fixes engendrent des faisceaux égaux et de même sens.

§ V: Propriétés polaires des cônes du second degré.

A. Propriétés générales.

129.- Les propriétés polaires d'un cône du second degré non décomposable en plans se déduisent de celles de toute conique non dégénérée obtenue en coupant le cône par

un plan quelconque ne passant pas par son sommet.
1° Soient S le sommet du cône du second degré Γ; γ la conique suivant laquelle ce cône est coupé par un plan ϖ qui ne passe pas par le point S; A un point quelconque du plan ϖ; a la polaire du point A pour la conique γ. La droite SA s'appelle la polaire du plan Sa et celui-ci, le plan polaire de la droite SA pour le cône Γ. — Lorsque le point A est sur la conique γ, la droite a est tangente en ce point à la conique, la droite SA est une génératrice rectiligne du cône Γ et le plan Sa est tangent au cône suivant cette droite. — Lorsque le point A n'est pas sur la conique γ, la droite a est le lieu des conjuguées harmoniques du point A sur les cordes de la conique qui passent par ce point. Dans ce cas, le plan Sa est le lieu des points conjugués harmoniques des points de la droite SA sur les cordes du cône Γ qui s'appuient sur cette droite; il est donc aussi le lieu des milieux des cordes du cône Γ qui sont parallèles à la droite SA; pour cette raison, même si la droite SA est une génératrice rectiligne du cône, le plan Sa s'appelle le plan diamétral conjugué du diamètre SA pour le cône Γ. On dit également que le plan Sa est le plan diamétral conjugué des droites parallèles au diamètre SA. Le diamètre conjugué de tout plan passant par la droite SA est dans le plan Sa.
2° Si A et B sont des points conjugués pour la conique γ, les droites SA, SB s'appellent des diamètres conjugués du cône Γ; chacune d'elles est dans le plan diamétral conjugué de l'autre.
3° Si a et b sont des droites conjuguées pour la conique γ, les plans Sa, Sb s'appellent des plans diamétraux conjugués du cône Γ; chacun d'eux contient le diamètre conjugué de l'autre.
4° Si $ABC \equiv abc$ est un triangle polaire non dégénéré de la conique γ, on dit que les droites SA, SB, SC forment un système de diamètres conjugués et que les plans Sa, Sb, Sc forment un système de plans diamétraux conjugués du cône Γ. Chacune des arêtes du trièdre $SABC$ est le diamètre conjugué de la face opposée et est le lieu des centres des coniques suivant lesquelles les plans parallèles à la face opposée coupent le cône.

130\. 1° Le cône du second degré Γ est le cône directeur d'une polarité dans la gerbe ayant le sommet S de ce cône pour support.
2° Lorsque le cône Γ est un cône isotrope, la polarité est une polarité rectangulaire dans laquelle chaque droite est perpendiculaire au plan conjugué; deux droites conjuguées quelconques sont perpendiculaires et il en est de même de deux plans conjugués quelconques; tout trièdre polaire est trirectangle. Il résulte de là que si deux trièdres trirectangles de même sommet sont tels qu'une des arêtes de l'une ne soit pas dans une des faces de l'autre, leurs arêtes sont six génératrices rectilignes d'un cône du second degré et leurs faces sont six plans tangents d'un autre cône du second degré.

131\. Cylindre. Si le sommet S est un point impropre, le cône devient un cylindre dont il suffit de considérer une section droite pour reconnaître les propriétés qui lui sont applicables parmi celles qu'on va établir dans le cas où le point S est un point propre. On supposera en outre que le point S est un point réel, que tout diamètre réel du cône est conjugué à un plan diamétral réel et que, réciproquement, tout plan diamétral réel est conjugué à un diamètre réel. Cela revient

à supposer que si les éléments fondamentaux des coordonnées ternaires dans la gerbe S sont réels, l'équation du cône Γ et les équations de la polarité ayant le cône Γ pour cône directeur sont des équations à coefficients réels; quand au cône Γ, il pourra être réel ou imaginaire, mais, dans certains cas, on supposera aussi qu'il est réel.

B.- Cônes supplémentaires ou réciproques.

132.- La figure polaire réciproque d'un cône du second degré Γ par rapport à un cône du second degré θ de même sommet S est un cône du second degré Γ' de sommet S; les génératrices rectilignes du cône Γ et les plans tangents correspondants sont les droites polaires et les plans polaires des plans tangents au cône Γ' et des génératrices rectilignes de contact, par rapport au cône θ; à un diamètre d et au plan diamétral conjugué δ du cône Γ correspondent un plan diamétral δ' et le diamètre conjugué d' du cône Γ', avec la condition que la droite d' et le plan δ' sont la droite polaire et le plan polaire du plan δ et de la droite d par rapport au cône θ. Les propriétés sont applicables que le point S soit un point propre ou un point impropre. Lorsque le point S est un point propre et que le cône θ est le cône isotrope de sommet S, la polarité devient la polarité rectangulaire dans la gerbe de support S; la droite d' et le plan δ' sont perpendiculaires au plan δ et à la droite d; les génératrices rectilignes du cône Γ', et les plans tangents correspondants sont perpendiculaires aux plans tangents homologues du cône Γ et aux génératrices rectilignes de contact de ces plans; les deux cônes Γ, Γ' sont dits supplémentaires ou réciproques.

C. Coniques sphériques.

133.- On donne le nom de conique sphérique à la courbe d'intersection d'une sphère par un cône de second degré dont le sommet est le centre de la sphère.

D. Plans principaux et axes principaux.

134. 1° Définition.

Un plan principal du cône du second degré Γ (131) est un plan diamétral perpendiculaire au plan diamétral conjugué et celui-ci est un axe principal, et plus simplement, un axe du cône Γ.

2° Corollaires

1) Tout plan principal du cône Γ est un plan de symétrie de ce cône et tout axe principal en est un axe de symétrie.

2) Tout plan passant par deux axes principaux du cône Γ est un plan principal de ce cône et toute droite qui est l'intersection de deux plans principaux en est un axe principal.

3) Deux cônes supplémentaires ont les mêmes plans et axes principaux.

4) Tout diamètre et tout plan diamétral d'un cône isotrope sont un axe principal et un plan principal de ce cône.

5) Si le cône du second degré Γ n'est pas isotrope, ses plans et axes principaux sont les éléments doubles de la collinéation obtenue en faisant le produit des polarités dont le cône Γ et le cône isotrope Σ de même sommet sont les cônes directeurs dans la gerbe ayant pour support le sommet des deux cônes. On a aussi: Pour qu'un diamètre et un plan diamétral du cône Γ soient un axe principal et le plan

principal conjugué, il faut et il suffit que le point impropre du diamètre soit le pôle de la droite impropre du plan diamétral à la fois pour la conique γ suivant laquelle le plan de l'infini coupe le cône Γ et la circonférence imaginaire de l'infini σ - celle-ci étant, comme on le sait, l'intersection du plan de l'infini et du cône isotrope Σ.

2° Recherche des plans et axes principaux d'un cône du second degré Γ lorsque ce cône n'est pas isotrope. – 1) Théorèmes.

a. – A tout plan diamétral réel du cône Γ correspond au moins un plan diamétral conjugué et perpendiculaire qui est réel.

b. – A tout diamètre réel du cône Γ correspond au moins un diamètre conjugué et perpendiculaire qui est réel.

Il suffit de démontrer le théorème (b). – Soient a un diamètre réel du cône Γ; α le plan diamétral conjugué et α_1 le plan diamétral perpendiculaire au diamètre a. Le plan α est le lieu des diamètres conjugués au diamètre a; le plan α_1 est le lieu des diamètres perpendiculaires au diamètre a; tout diamètre commun à ces deux plans est donc un diamètre conjugué et perpendiculaire au diamètre a, et la propriété résulte de ce que les deux plans réels passent l'un et l'autre par le sommet du cône.

2) Problèmes.

a. Déterminer la forme engendrée par le plan diamétral réel conjugué et perpendiculaire à un plan diamétral réel lorsque celui-ci engendre une feuillée du premier degré.

b. Déterminer la forme engendrée par le diamètre réel conjugué et perpendiculaire à un diamètre réel lorsque celui-ci engendre un faisceau du premier degré.

Il suffit de résoudre le problème (b). Soient δ le plan diamétral support du faisceau engendré par le diamètre a du cône Γ; d le diamètre conjugué et d_1 le diamètre perpendiculaire au plan δ; α le plan diamétral conjugué et α_1 le plan diamétral perpendiculaire au diamètre a; a_1 le diamètre commun aux plans α, α_1 ou le diamètre conjugué et perpendiculaire au diamètre a. Les feuillées de supports respectifs d, d_1 engendrées par les plans α, α_1 sont projectives au faisceau engendré par le diamètre a dans le plan δ; elles sont donc projectives entre elles et il en résulte que, en général, le diamètre a_1 engendre un cône du second degré Δ qui est projectif au faisceau décrit par le diamètre a et qui a le même sommet que le cône Γ. –

Il y a deux cas d'exception: α) Lorsque le plan δ est un plan principal du cône Γ, les diamètres d, d_1 se confondent avec l'axe principal conjugué au plan δ et le lieu du diamètre a_1 conjugué et perpendiculaire au diamètre a est formé des plans doubles des feuillées projectives d (α), d_1 (α_1). – β) Lorsque le plan δ, sans être un plan principal du cone Γ, passe par un axe principal x de ce cône, les droites d, d_1 ne coïncident pas, mais leur plan, qui est le plan principal ξ conjugué à l'axe x pour le cône Γ, est un feuillet double des feuillées projectives d (α), d_1 (α_1), et le lieu du diamètre a_1 est formé du plan ξ et du plan de perspectivité des deux feuillées. On peut ajouter que, dans ce cas, le plan principal $\xi \equiv d\,d_1$ étant réel, il en est de même de l'axe principal conjugué x.

3) Corollaires.

a. - Les plans principaux réels du cône Γ sont des positions du plan diamétral dont on a cherché le lieu.

b. - Les axes principaux réels du cône Γ sont des positions du diamètre dont on a cherché le lieu.

4) Théorèmes

a - Le cône Γ possède au moins un plan principal réel.

b - Le cône Γ possède au moins un axe principal réel.

Les deux théorèmes sont équivalents et ne doivent plus être démontrés que dans le cas où le lieu trouvé ci-dessus (2) pour le diamètre a_1 est un cône du second degré Δ. Soient b_1, c_1 deux diamètres du cône Γ dont le premier est intérieur et le second extérieur au cône Δ; b et c les diamètres du cône Γ qui sont conjugués et perpendiculaires respectivement aux diamètres b_1, c_1; δ' le plan bc; Δ' le cône du second degré analogue au cône Δ lorsque le plan δ' remplace le plan δ. Les droites b_1, c_1 sont donc deux génératrices rectilignes du cône Δ'; le diamètre u_1 du cône Γ qui est conjugué et perpendiculaire au diamètre réel u suivant lequel se coupent les plans δ, δ' est une génératrice rectiligne réelle commune aux cônes Δ, Δ' et n'est pas un axe principal du cône Γ; mais les cônes Δ, Δ' sont des cônes réels du second degré et les génératrices rectilignes réelles b_1, c_1 du cône Δ' ne sont pas dans la même région de l'espace par rapport au cône Δ, ces deux cônes ont donc en commun au moins une seconde génératrice rectiligne réelle x différente de celle déjà trouvée u; cette droite x est un diamètre du cône Γ qui est conjugué et perpendiculaire à des diamètres réels différents du diamètre u dans les plans δ, δ'; elle est donc un axe principal réel du cône Γ et le plan principal conjugué est le plan réel ξ des diamètres réels qui sont conjugués à x dans les plans δ, δ'.

5) Théorème. Le cône Γ possède au moins trois plans principaux réels et trois axes principaux réels qui sont les faces et les arêtes d'un trièdre trirectangle et qui sont en outre trois plans diamétraux conjugués et trois diamètres conjugués du cône Γ.

Soient ξ le plan principal et x l'axe principal conjugué à ce plan déjà trouvés dans la démonstration précédente. Les diamètres conjugués du cône Γ dans le plan ξ forment un faisceau involutif qui est une section droite de la feuillée involutive des plans diamétraux conjugués ayant la droite x pour support. Chacune de ces involutions contient au moins deux éléments conjugués réels perpendiculaires; si η et ζ sont deux feuillets conjugués réels perpendiculaires de la feuillée x, ils coupent le plan ξ suivant deux rayons conjugués réels perpendiculaires z, y du faisceau involutif contenu dans le plan ξ. Les arêtes et les faces du trièdre xyz ou $\xi\eta\zeta$ répondent à la question.

6) Théorème. Quand un cône du second degré a plus de trois axes principaux réels et plus de trois plans principaux réels, il est de révolution.

Soient x, y, z les trois axes principaux trirectangles déjà trouvés du cône Γ; t un quatrième axe réel de ce cône. Cet axe t ne peut se trouver à la fois dans deux faces du trièdre xyz; on peut supposer qu'il n'est pas dans la face yz. Les plans principaux réels xt, yz se coupent suivant une droite réelle u qui est un troisième axe réel du cône dans le plan xt; le diamètre perpendiculaire à t dans le plan xt est un quatrième axe réel du cône dans le même plan et il est con=

jugué à l'axe t; l'involution des diamètres conjugués dans le plan xt est donc une involution rectangulaire et tous les diamètres réels situés dans ce plan sont des axes réels du cône Γ. Si v est l'axe principal conjugué au plan principal xt, tout plan parallèle à ce plan ou perpendiculaire à l'axe v coupe le cône suivant une circonférence ayant son centre sur l'axe v et le cône Γ est de révolution autour de cet axe.-

7) Remarques.- a. En coordonnées homogènes ponctuelles X, Y, Z, T, l'équation du cône Γ de révolution autour de l'arête z du trièdre coordonné trirectangle $Oxyz$ et de sommet O, est

$$(1) \qquad X^2 + Y^2 + \lambda Z^2 = 0$$

dont le coefficient λ est un nombre réel différent de l'unité et de zéro, tandis que l'équation du cône isotrope Σ de même sommet est

$$(2) \qquad X^2 + Y^2 + Z^2 = 0.$$

Ces deux cônes sont tangents l'un à l'autre suivant les droites isotropes issues du point O dans le plan xy et les plans tangents communs correspondants sont les plans isotropes menés par l'axe z. Ces deux cônes coupent le plan de l'infini suivant une conique γ et la circonférence imaginaire de l'infini σ dont les équations respectives sont

$$(3) \qquad X^2 + Y^2 + \lambda Z^2 = 0 \text{ avec } T = 0 \qquad \text{et} \qquad X^2 + Y^2 + Z^2 = 0 \text{ avec } T = 0; \qquad (4)$$

ces coniques sont tangentes l'une à l'autre aux points cycliques $\dot{I}, \dot{J}$ du plan xy. Deux points distincts, réels ou imaginaires, A, B, formant un quaterne harmonique avec les points $\dot{I}, \dot{J}$, et le point réel C à l'infini sur l'axe z sont les sommets d'un triangle polaire commun aux coniques γ et σ; le trièdre $OABC$ est un trièdre trirectangle de diamètres conjugués et de plans diamétraux conjugués dans les deux cônes et, par suite, un trièdre trirectangle d'axes et de plans principaux du cône de révolution. Les triangles ABC construits comme on vient de l'indiquer étant les seuls triangles polaires communs aux coniques γ, σ, ce procédé donne tous les axes et plans principaux du cône de révolution considéré; les axes principaux de ce cône sont donc l'axe réel z et les diamètres, réels ou imaginaires, contenus dans le plan xy; ses plans principaux sont le plan réel xy et les plans diamétraux, réels ou imaginaires, passant par l'axe z.

b.- Lorsque le trièdre coordonné est le trièdre trirectangle des axes principaux réels ou des plans principaux réels, l'équation d'un cône du second degré Γ qui n'est pas de révolution, est

$$(5) \qquad aX^2 + bY^2 + cZ^2 = 0$$

dans laquelle les coefficients a, b, c, tous différents de zéro, sont réels et inégaux deux à deux.

Ce cône et le cône isotrope Σ de même sommet, défini par l'équation

$$(6) \qquad X^2 + Y^2 + Z^2 = 0,$$

coupent le plan de l'infini suivant la conique γ et la circonférence imaginaire

de l'infini σ dont les équations sont

(7) $aX^2+bY^2+cZ^2=0$ avec $T=0$ et $X^2+Y^2+Z^2=0$ avec $T=0$. (8)

Les équations des polaires p, p' du point $P(X_1, Y_1, Z_1, 0)$ par rapport à ces coniques sont

(9) $aX_1X+bY_1Y+cZ_1Z=0$ avec $T=0$ et $X_1X+Y_1Y+Z_1Z=0$ avec $T=0$ (10)

Les nombres a, b, c étant différents de zéro et étant inégaux deux à deux, les droites p, p' ne sont confondues que si deux des coordonnées X_1, Y_1, Z_1 du point P sont nulles. Les points réels A, B, C à l'infini sur les axes coordonnés sont les sommets du seul triangle polaire commun aux coniques γ et σ; dès lors, les arêtes et les faces du trièdre $Oxyz$ sont les seuls axes principaux et les seuls axes principaux du cône Γ et, dans le cas actuel, ce cône n'a aucun axe principal imaginaire ni aucun plan principal imaginaire.

Lorsque le cône Γ est réel, l'un des axes principaux est intérieur et les deux autres sont extérieurs au cône. Si l'axe x est l'axe intérieur, un plan θ perpendiculaire à cet axe coupe le cône suivant une ellipse dont les axes sont inégaux et sont situés dans les plans principaux xy, xz. Celui de ces deux plans qui contient le grand axe de l'ellipse est appelé le plan de grande section, tandis que l'autre est appelé le plan de petite section du cône; le plan principal yz ou ξ est extérieur au cône.

E. Focales et plans directeurs, plans cycliques et axes cycliques.

135. 1° Définitions.-

1) Un diamètre d'un cône du second degré est une focale ou un axe focal du cône lorsque la feuillée involutive des plans diamétraux conjugués dont il est le support est rectangulaire; le plan diamétral conjugué à une focale est un plan directeur du cône.

2) Un plan diamétral d'un cône du second degré est un plan cyclique du cône lorsque le faisceau involutif de diamètres conjugués situés dans ce plan est rectangulaire; le diamètre conjugué d'un plan cyclique est un axe cyclique du cône.

2° Corollaires. 1) *Les focales et les plans directeurs d'un cône du second degré sont perpendiculaires aux plans et aux axes cycliques du cône supplémentaire.*

2) *Toute droite non isotrope qui est une focale et un axe cyclique est un axe de révolution du cône et tout cône dont un plan non isotrope est à la fois un plan cyclique et un plan directeur, est de révolution autour du diamètre perpendiculaire à ce plan.*

3) *Tout diamètre et tout plan diamétral non isotropes d'un cône isotrope est une focale et un axe cyclique, un plan directeur et un plan cyclique du cône.*

4) *Les focales d'un cône non isotrope du second degré sont les intersections des plans tangents communs à ce cône et au cône isotrope de même sommet.*

5) *Les plans cycliques d'un cône non isotrope du second degré sont les plans déterminés par les génératrices rectilignes communes à ce cône et au cône isotrope*

de même sommet.

3° Cas du cône de révolution. Théorème. – L'axe de révolution et le plan perpendiculaire à cet axe sont la seule focale et le seul axe cyclique, le seul plan focal et le seul plan cyclique d'un cône de révolution non isotrope.
Cette propriété est une conséquence immédiate des précédentes (2°, 4 et 5) et de la remarque (a) du n° 134 (2°, 7); mais on peut également la déduire directement des définitions données au 1°. Il suffit de démontrer que l'axe de révolution x d'un cône de révolution non isotrope Γ est la seule focale de ce cône. L'axe x est d'abord une focale du cône, car, le cône étant de révolution autour de l'axe x, deux plans diamétraux conjugués quelconques menés par cet axe sont perpendiculaires. Pour démontrer qu'il est la seule focale, soient t un autre diamètre; α un plan diamétral passant par ce diamètre et oblique au plan principal xt; a le diamètre conjugué du plan α. Le plan α n'étant pas un plan principal du cône Γ est oblique à la droite a et le plan ax est le seul plan diamétral conjugué et perpendiculaire au plan α et il ne passe pas par la droite t; le plan diamétral at est conjugué et oblique au plan α et il passe par la droite t, celle-ci n'est donc pas une focale du cône Γ.

4° Cas où le cône n'est pas de révolution. 1) Théorèmes.

a. – Un cône du second degré qui n'est pas de révolution possède six focales et six plans directeurs; les focales sont les arêtes d'un angle solide complet à quatre faces dont les plans diagonaux sont les plans principaux du cône; les plans directeurs passent deux par deux par les axes principaux.

b. – Un cône du second degré qui n'est pas de révolution possède six plans cycliques et six axes cycliques; les plans cycliques sont les faces d'un angle solide complet à quatre arêtes dont les droites diagonales sont les axes principaux du cône; les axes cycliques sont deux par deux dans les plans principaux.

Ces propriétés sont des conséquences des propriétés 4 et 5 du 2° et de ce qu'on a dit dans la remarque (b) du n° 134 (2°, 7) sur la position par rapport à la circonférence imaginaire σ du plan de l'infini, de la conique γ suivant laquelle un cône du second degré Γ coupe le plan de l'infini quand il n'est pas de révolution. Les coniques γ et σ n'ayant qu'un triangle polaire commun se coupent en quatre points qui sont les sommets d'un quadrangle non dégénéré et ont quatre tangentes communes qui sont les côtés d'un quadrilatère non dégénéré; les points communs sont deux à deux imaginaires conjugués et il en est de même des tangentes communes; deux plans cycliques et deux plans directeurs sont des plans réels, deux axes cycliques et deux focales sont des droites réelles, les quatre autres plans cycliques et les quatre autres plans directeurs sont imaginaires conjugués deux à deux de même que les quatre autres axes cycliques et les quatre autres focales; les plans cycliques et les plans directeurs qui passent par un même axe principal sont réels ou imaginaires conjugués et forment des angles dièdres dont les plans bissecteurs sont les plans principaux passant par l'axe principal considéré; les focales ou les axes cycliques situés dans un même plan principal sont réels ou imaginaires conjugués et forment des angles dont les bissectrices sont les axes principaux contenus dans le plan principal

considéré.

2) Théorèmes.

a. A tout diamètre réel d situé dans un plan principal du cône Γ est associé un second diamètre réel d' situé dans le même plan principal, avec la condition qu'à tout plan diamétral réel ϖ mené par le diamètre d corresponde un plan diamétral conjugué et perpendiculaire ϖ' passant par le diamètre d'.

b. – A tout plan diamétral réel δ passant par un axe du cône Γ est associé un plan diamétral δ' passant par le même axe, avec la condition qu'à tout diamètre réel p situé dans le plan diamétral δ corresponde un diamètre conjugué et perpendiculaire p' situé dans le plan diamétral δ'.

Soient α un plan diamétral réel mené par le diamètre d obliquement au plan principal considéré ω; a le diamètre conjugué du plan α pour le cône Γ; α' le plan perpendiculaire au plan α par la droite a; d' l'intersection des plans α' et ω. Cette droite d' répond à la question. En effet, à la feuillée $d(\varpi)$ de support d engendrée par un plan ϖ tournant autour de la droite d, on peut associer deux feuillées ayant la droite d' pour support commun, la feuillée $d'(\varpi')$ des plans passant par la droite d' et perpendiculaires aux diverses positions du plan ϖ, la feuillée $d'(\varpi'')$ des plans diamétraux conjugués aux mêmes positions du plan ϖ et passant aussi par la droite d'. Ces feuillées $d'(\varpi')$, $d'(\varpi'')$ sont projectives à la feuillée $d(\varpi)$, elles sont donc projectives l'une à l'autre; mais elles ont trois feuillets doubles, le plan α', le plan ω et le plan ω' perpendiculaire au plan ω par la droite d', elles sont donc identiques, ce qui démontre le théorème.

3) Théorèmes.

a. – Les faisceaux engendrés par les diamètres d, d' dans le plan principal qui les contient, sont en involution.

b. – Les feuillées engendrées par les plans diamétraux δ, δ' autour de l'axe par lequel ils passent sont en involution.

Soient d_1, d'_1 les diamètres suivant lesquels un second plan principal ω_1 du cône Γ est coupé par les plans diamétraux conjugués et perpendiculaires α, α' qui ont servi à construire les diamètres d, d' dans le plan principal ω (2, a). Ces diamètres d_1, d'_1 sont dans le plan principal ω_1 des diamètres analogues aux diamètres d, d' du plan principal ω. Il en résulte que les faisceaux engendrés par les diamètres d, d' dans le plan principal ω sont les sections de ce plan par les feuillées $d_1(\alpha)$, $d'_1(\alpha')$ lorsque les plans α, α' tournent autour des droites d_1, d'_1 en restant conjugués et perpendiculaires l'un à l'autre. Les feuillées étant projectives, il en est de même des faisceaux et ceux-ci sont en involution parce que les droites homologues d, d' sont permutables l'une avec l'autre.

4) Corollaires

a. Les six focales du cône Γ sont les droites doubles des faisceaux involutifs engendrés par les droites telles que d et d' dans les trois plans principaux.

b. Les six plans cycliques du cône Γ sont les plans doubles des feuillées involutives engendrées par les plans tels que δ et δ' ayant les trois axes principaux pour supports.

5° Cas où le cône est réel et n'est pas de révolution. – 1) Rotations. –
Les focales d'un cône étant les supports de feuillées involutives rectangulaires de plans diamétraux conjugués, il en résulte que les focales réelles d'un cône réel Γ

sont intérieures au cône et, pour une raison analogue, les plans cycliques réels sont extérieurs au cône. On va démontrer que les focales réelles sont dans le plan principal de grande section du cône et que les plans cycliques réels sont perpendiculaires au plan de petite section. A cet effet, on ne considère qu'une des nappes du cône Γ et la partie de l'espace située du même côté que cette nappe par rapport au plan principal extérieur. Soient S le sommet du cône; ω le plan principal des focales réelles f_1, f_2; p l'axe principal par lequel passent les plans cycliques réels ϖ_1, ϖ_2; a et α un diamètre extérieur et le plan diamétral conjugué; g_1, g_2 les génératrices rectilignes contenues dans le plan α de sorte que les plans $\theta_1 \equiv ag_1$, $\theta_2 \equiv ag_2$ sont tangents au cône suivant ces deux droites; φ_1, φ_2 les plans af_1, af_2; p_1, p_2 les droites $\alpha\varpi_1$, $\alpha\varpi_2$.

2) Théorème. *Les angles $\theta_1\theta_2$, $\varphi_1\varphi_2$ ont les mêmes plans bissecteurs et les angles g_1g_2, p_1p_2 ont les mêmes bissectrices.*

Les plans θ_1, θ_2 sont les plans doubles de la feuillée involutive de plans diamétraux conjugués passant par le diamètre a; les plans bissecteurs β, β' du dièdre θ_1, θ_2 sont des plans diamétraux conjugués et perpendiculaires et ils coupent le plan ω suivant deux des rayons conjugués d, d' du faisceau involutif dont les focales f_1, f_2 sont les rayons doubles (4°, 4, a). Les plans β, β', φ_1, φ_2 forment donc un quaterne harmonique et les plans perpendiculaires β, β' sont également les plans bissecteurs du dièdre $\varphi_1\varphi_2$.

3) Corollaires.

a. *Le plan tangent suivant une génératrice rectiligne du cône Γ est un des plans bissecteurs du dièdre formé par les plans que cette génératrice rectiligne détermine avec les focales f_1, f_2.*

b. *Toute génératrice rectiligne du cône Γ est une des bissectrices de l'angle des intersections des plans cycliques ϖ_1, ϖ_2 et du plan tangent suivant la génératrice rectiligne considérée.*

4) Théorèmes

a. *Les droites symétriques de la focale f_1 par rapport aux plans tangents au cône Γ sont les génératrices rectilignes d'un cône de révolution ayant la focale f_2 pour axe de révolution ou sont dans un plan perpendiculaire à cette focale.*

b. *Les plans symétriques du plan cyclique ϖ_1 par rapport aux génératrices rectilignes du cône Γ sont les plans tangents d'un cône de révolution ayant le plan cyclique ϖ_2 pour plan principal extérieur ou passent par le diamètre perpendiculaire à ce plan cyclique.*

Soient f'_1 la droite symétrique de la focale f_1 par rapport au plan tangent θ_1; f'_2 la droite symétrique de la focale f_2 par rapport au plan tangent θ_2. Les trièdres $Saf_2f'_1$, Saf'_2f_1 ont un dièdre égal, d'arête a, compris entre deux faces égales chacune à chacune; les troisièmes faces $f_1Sf'_2$, f'_1Sf_2 sont donc égales. Mais quand le plan tangent θ_1 varie et que le plan tangent θ_2 est fixe, l'angle mobile f'_1Sf_2 reste égal à l'angle immobile $f_1Sf'_2$; le lieu de f'_1 est un cône de révolution autour de la focale f_2 ou un plan perpendiculaire à cette focale selon que l'angle $f_1Sf'_2$ n'est pas ou est un angle droit.

5) Corollaires.

a. *La somme des angles qu'une génératrice rectiligne du cône Γ fait avec les focales f_1, f_2 est constante.*

b. *La somme des angles qu'un plan tangent au cône Γ fait avec les plans cycliques ϖ_1, ϖ_2 est constante.*

6) Théorèmes.

a. Les focales f_1, f_2 sont dans le plan principal de grande section du cône Γ.

b. Les plans cycliques ϖ_1, ϖ_2 sont perpendiculaires au plan principal de petite section du cône Γ.

Soient g une génératrice rectiligne du cône Γ dans le plan principal f_1, f_2; g' une génératrice rectiligne dans le plan principal perpendiculaire au plan f_1, f_2 par l'axe principal x intérieur au cône Γ. Cet axe x étant la bissectrice intérieure de l'angle $f_1 S f_2$, on a

$$\text{angle } g'Sf_1 = \tfrac{1}{2}(\text{angle } g'Sf_1 + \text{angle } g'Sf_2) = \tfrac{1}{2}(\text{angle } gSf_1 + \text{angle } gSf_2) = \text{angle } gSx$$

et

$$\text{angle } g'Sf_1 > \text{angle } g'Sx,$$

d'où on déduit

$$\text{angle } gSx > \text{angle } g'Sx,$$

ce qui est la propriété à démontrer.

7) Corollaire. Les focales réelles f_1, f_2 du cône Γ sont les droites suivant lesquelles le plan principal de grande section coupe le cône de révolution dont l'axe de révolution est la génératrice rectiligne g' du plan de petite section et dont l'angle au sommet est l'angle de grande section du cône Γ.

8) Remarque. Les propriétés qui précèdent de même que celles qui suivent s'étendent facilement aux coniques sphériques et on constate ainsi que la géométrie de ces courbes est sur la sphère une géométrie analogue à celle des coniques dans le plan.

6° Propriétés déduites des définitions données au 1°. – 1) Soient f une focale du cône de second degré Γ et φ le plan directeur correspondant.

a. Tout plan perpendiculaire à la focale f coupe le cône Γ, la focale f et le plan φ suivant une conique, un foyer de cette conique et la directrice correspondant à ce foyer.

b. Si le diamètre x est situé dans le plan φ, le plan des génératrices rectilignes de contact des plans tangents menés de ce diamètre au cône Γ passe par la focale f et est perpendiculaire au plan fx.

c. Si le plan α de deux génératrices rectilignes g_1, g_2 coupe le plan φ suivant la droite x et si a est le diamètre conjugué du plan α ou l'intersection des plans tangents suivant les génératrices rectilignes g_1, g_2, les plans fx, fa sont les plans bissecteurs des dièdres formés par les plans fg_1, fg_2.

d. Les intersections de deux plans tangents fixes par un plan tangent mobile sont projetées de la focale f suivant des feuillées égales et de même sens.

e. Le rapport des sinus des angles qu'une génératrice rectiligne quelconque g fait avec la focale x et le plan φ est constant.

2) Soient ϖ un plan cyclique du cône Γ et p l'axe cyclique correspondant.

a. Tout plan parallèle au plan ϖ coupe le cône Γ suivant une circonférence dont le centre est sur la droite p.

b. Si le plan diamétral ξ passe par l'axe cyclique p, le diamètre conjugué pour

le cône Γ est dans le plan ϖ et est perpendiculaire au diamètre $\varpi\xi$.
c. Soient θ_1, θ_2 les plans tangents menés par un diamètre quelconque a et α le plan des génératrices rectilignes de contact ; les droites d'intersection du plan ϖ par les plans pa et α sont les bissectrices des angles $\varpi\theta_1, \varpi\theta_2$.
d. Les feuillées obtenues en projetant une génératrice rectiligne mobile de deux génératrices rectilignes fixes sont coupées par le plan cyclique ϖ suivant des faisceaux égaux et de même sens.
e. Le rapport des sinus des angles qu'un plan tangent quelconque fait avec le plan cyclique ϖ et l'axe cyclique conjugué p est constant.

§ VI : Questions diverses

A. Le théorème de Frégier.

136. 1° Théorème de Frégier. – Quand un angle droit tourne autour de son sommet qui est un point fixe d'une conique γ, la corde interceptée dans la conique passe par un point fixe.
Ce théorème est un cas particulier du théorème plus général : La corde interceptée dans une conique γ par deux rayons conjugués d'un faisceau involutif ayant son support sur la conique passe par un point fixe.
En effet, les rayons conjugués du faisceau involutif coupent la conique γ en des points conjugués d'une involution dont la conique est le support ; le point fixe par où passe la corde interceptée est le pôle de l'involution.
2° Remarque. – Le point fixe est le point de rencontre des tangentes à la conique γ aux points doubles de l'involution placée sur la conique.
3° Corollaire. L'hypoténuse d'un triangle rectangle inscrit à une hyperbole équilatère est parallèle à la tangente au sommet de l'angle droit ; ou bien, si des circonférences ont pour diamètres des cordes parallèles d'une hyperbole équilatère, elles forment un faisceau dont les points fondamentaux sont les points cycliques et les points de l'hyperbole où les tangentes sont parallèles aux cordes considérées.
4° Théorème. Si une tangente donnée d'une conique γ est le support d'une ponctuelle involutive, le lieu du point de rencontre des secondes tangentes menées de deux points conjugués quelconques est une droite.
Ce théorème est le théorème corrélatif de celui démontré au 1°. Pour le démontrer directement, il suffit d'observer que les tangentes menées de deux points conjugués de l'involution donnée sont conjuguées dans une involution qu'elles établissent dans le faisceau des tangentes à la conique, la droite cherchée est la polaire de cette involution, elle passe par les points de contact des secondes tangentes menées des points doubles de l'involution donnée. Si ces points doubles sont les points cycliques, la conique est une parabole, les tangentes issues des points conjugués sont rectangulaires et le lieu de leur point de rencontre est la droite joignant les points de contact des tangentes isotropes ; donc, le lieu des sommets des angles droits circonscrits à une parabole est la directrice de la parabole.

B. Applications des théorèmes de Desargues et de Sturm.

137. Théorème. Les cordes communes à une conique et à une circonférence

sont également inclinées sur les axes de la conique.
Soient A, B, C, D les points d'intersection de la conique γ et de la circonférence α; x une droite parallèle à la droite CD; E et E', F et F', P et P' les points de rencontre de la droite x avec la conique γ, avec la circonférence α et avec les droites AB, CD. Ces trois couples de points sont en involution sur la droite x. Le point P' étant à l'infini, le point P est le point central de l'involution et

$$PE.PE' = PF.PF' = PA.PB.$$

Les points E, E', A, B sont donc sur une circonférence et ainsi toute circonférence passant par les points A, B coupe la conique γ suivant une corde parallèle à CD. Or une de ces circonférences passe par les points A, B et par les points symétriques A', B' des points A, B par rapport à l'un quelconque des axes de la conique γ. Pour cette circonférence, l'axe considéré de la conique γ est une des bissectrices des angles formés par les droites AB, A'B'; la droite CD étant parallèle à la droite A'B', les axes de la conique γ sont parallèles aux bissectrices des angles formés par les droites AB, CD; c.q.f.d.

138. 1° Problème. *Construire une conique dont on donne cinq points.*
Soient A, B, C, D, E les cinq points donnés. Le second point où une droite quelconque menée par le point E recoupe la conique est le point conjugué du point E dans l'involution déterminée par les deux couples de points où la droite coupe deux couples de côtés opposés du quadrangle ABCD. _ Pour avoir la tangente au point A, on considère AABC comme un quadrangle inscrit dont deux sommets sont confondus avec le point A sur la tangente cherchée; on coupe ce quadrangle et la conique par la droite DE cette droite est ainsi le support d'une involution déterminée par deux couples de points conjugués, les points D, E et les points d'intersection avec les côtés opposés AB, AC du quadrangle. Un point de la tangente cherchée est le point conjugué dans cette involution du point de rencontre de la droite DE avec la droite BC. _ Les points où la conique coupe une droite donnée arbitrairement forment le couple de points conjugués commun à deux involutions définies sur la droite par les points de rencontre avec les couples de côtés opposés de deux quadrangles tels que ABCD, ABCE dont les sommets sont quatre des cinq points donnés.

2° Problème. *Construire une conique dont on donne cinq tangentes.*
Solution corrélative de la précédente. On considérera le cas particulier où une des tangentes données est à l'infini

3° Problème. *Construire une conique dont on donne quatre points et une tangente.*
Il y a deux coniques répondant à la question, leurs points de contact avec la tangente donnée sont les points doubles de l'involution que les côtés opposés du quadrangle des points donnés déterminent sur la tangente. _ Quand celle-ci est à l'infini, les coniques sont des paraboles; les parallèles à deux couples de côtés opposés du quadrangle des points donnés sont deux couples de rayons conjugués d'un faisceau involutif dont les rayons doubles sont parallèles aux axes des deux paraboles.

4° Problème. *Construire une conique dont on donne quatre tangentes et*

un point.
Solution corrélative de la précédente.
5° Problème. Construire une conique dont on donne trois points et deux tangentes.
Soient A, B, C les points donnés; x, y les tangentes données; X, Y les points de contact de ces tangentes avec une conique répondant à la question. Les coniques tangentes aux droites x, y aux points X, Y forment un faisceau ponctuel; elles coupent la droite BC en des points conjugués d'une involution dont deux couples de points conjugués sont les points B, C et les points D, E où la droite BC rencontre les droites x, y; un des points doubles de cette involution est le point F où la droite BC rencontre la droite XY. – Réciproquement, si le point F est un point double de l'involution (B, C, D, E), une droite quelconque menée par ce point coupe les droites x, y en des points X, Y qui sont les points de contact des droites x, y avec une conique passant par les points B, C. Car la conique déterminée par les points B, X, Y et les tangentes x, y doit couper la droite BC au point conjugué C du point B dans l'involution (D, E; F, F). – Les points de contact des droites x, y avec une conique répondant à la question sont donc les droites joignant les points doubles de trois involutions associées placées sur les côtés du triangle ABC et dont des points conjugués sont les points où ces côtés sont rencontrés par les droites x, y. Il y a donc, en général, quatre coniques répondant à la question. – Lorsque les droites x, y sont les droites isotropes issues d'un point donné, les coniques trouvées sont les coniques ayant ce point pour foyer et circonscrites au triangle ABC; les droites XY sont les directrices de ces coniques pour le foyer donné.
6° Problème. Construire une conique dont on donne trois tangentes et deux points
Solution corrélative de la précédente. Si les points donnés sont les points cycliques, on retrouve les circonférences tangentes aux côtés d'un triangle.
7° Remarque. – Les deux problèmes précédents sont applicables à la construction d'une conique inscrite ou circonscrite à un triangle donné et bitangente à une conique donnée.

C. Sur les faisceaux de coniques. –

138. 1° Théorème. Si deux coniques d'un faisceau ponctuel sont des hyperboles équilatères, toutes les coniques du faisceau sont des hyperboles équilatères.
En effet, les points cycliques sont conjugués par rapport aux deux hyperboles équilatères données; ils sont donc conjugués par rapport à toutes les autres coniques du faisceau et celles-ci sont des hyperboles équilatères.
2) Corollaires. a. – Toutes les coniques qui passent par les points communs à deux hyperboles équilatères sont des hyperboles équilatères.
b. – Toutes les hyperboles qui circonscrites à un triangle passent par l'orthocentre et le lieu de leurs centres est la circonférence des neuf points du triangle.
2° Coniques à axes parallèles. – Si deux coniques ont les axes parallèles, les points à l'infini sur ceux-ci sont conjugués par rapport aux deux coniques et ils sont donc conjugués par rapport à toute conique passant par les points communs aux deux coniques; comme ils forment un groupe harmonique avec les points cycliques, on a: 1) Toutes les coniques passant par les points d'intersection de deux coniques à axes parallèles ont leurs axes parallèles à ceux des deux coniques; 2) Quand deux coniques ont leurs axes parallèles, il existe une circonférence passant par les points communs aux deux coniques; 3) Les cordes communes à

une conique et à une circonférence sont également inclinées sur les axes de la conique; 4) Quand un quadrangle est inscrit à une circonférence, les paraboles circonscrites au quadrangle ont leurs axes perpendiculaires et le lieu des centres des coniques circonscrites au quadrangle est une hyperbole équilatère.
N.B. - Cette hyperbole équilatère (H) est aussi le lieu des pieds des normales menées du centre de la circonférence aux coniques circonscrites au quadrangle.
Soient O le centre de la circonférence γ circonscrite au quadrangle ABCD; X un point quelconque de la droite de l'infini p du plan de la circonférence; X' le conjugué du point X pour les coniques circonscrites au quadrangle ABCD ou le point de concours des diamètres de ces coniques qui sont conjuguées aux droites parallèles passant par le point X; O' le centre de la conique γ' qui est circonscrite au quadrangle ABCD et passe par le point X'. Les droites OX', O'X' sont des diamètres conjugués des droites parallèles OX, O'X pour la circonférence γ et la conique γ'; la droite X'X est donc tangente à la conique γ' au point X'; les droites OX', OX étant perpendiculaires, il en est de même des droites OX' et X'X et le point X' est le pied d'une normale menée du centre O de la circonférence γ à la conique γ'. Dès lors, la propriété résulte de ce que le point X' est aussi le centre d'une des coniques passant par les points A, B, C, D ou un point de l'hyperbole équilatère (H).
Corollaire. D'un point O on peut mener quatre normales à une conique donnée γ'; les pieds de ces normales sont sur une hyperbole équilatère (H) passant par le point O, par le centre O' de γ' et ayant ses asymptotes parallèles aux axes de la conique γ' (hyperbole d'Apollonius du point O pour la conique γ')

D. - Points et droites conjuguées par rapport à une conique.

139. - 1° Problèmes. 1) Lieu du point de rencontre des droites issues de deux points fixes et conjuguées par rapport à une conique donnée. 2) Enveloppe des droites joignant deux points situés sur deux droites fixes et conjuguées par rapport à une conique donnée.
Il suffit de résoudre le premier problème. Soient γ la conique donnée; A, B les points fixes; x, y deux droites issues des points A, B et conjuguées par rapport à la conique γ. Les faisceaux A(x), B(y) sont projectifs. - Lorsque la droite AB n'est pas tangente à la conique γ, le lieu du point x y est une conique γ' passant par les points A, B et par les points de contact de la conique γ avec les tangentes issues des points A, B. Lorsque la droite AB est tangente à la conique γ, le lieu du point xy est la droite joignant les points de contact des secondes tangentes menées des points A, B à la conique γ.
2° Corollaires. 1) Il existe une conique passant par deux points donnés et par les points de contact des tangentes menées de ces points à une conique donnée. 2) Il existe une conique tangente à deux droites données et aux tangentes menées à une conique aux points d'intersection avec deux droites données.
3° Remarques. - 1) La droite AB au 1° a le même pôle pour les coniques γ, γ'. 2) Les droites x, y du 1°, conjuguées par rapport à la conique γ, forment un groupe harmonique avec les tangentes menées du point xy à la conique γ. Si les points A, B sont les points cycliques, ces tangentes sont donc rectangulaires; dès lors, (a): Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à une conique à centre (ellipse ou hyperbole) est une circonférence passant par les points com=

muns à la conique et à ses directrices, et concentrique à la conique; (b): Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à une parabole est la directrice de la parabole.

3) Soit γ' la conique à laquelle sont tangentes les droites joignant les points des droites fixes a, b qui sont conjuguées par rapport à une conique donnée γ ne passant pas par le point ab (1°, 2). Le point ab a la même polaire par rapport aux coniques γ, γ' (3°, 1). La conique γ' est tangente à toute corde de la conique γ dont les extrémités sont projetées du point ab suivant des droites c, d formant un groupe harmonique avec les droites a, b. Mais lorsque les droites a, b sont les droites isotropes, les droites c, d sont perpendiculaires; dès lors, les cordes d'une conique γ qui sont vues d'un point fixe sous un angle droit enveloppent une conique γ' dont le point fixe est un foyer ayant pour directrice la polaire du point fixe par rapport à la conique γ. Si le point fixe est le centre de la conique γ, la conique γ' est une circonférence concentrique à la conique γ.

4° 1) Théorème de Poncelet. – *S'il existe un quadrilatère simple qui est inscrit à une conique donnée γ et circonscrit à une seconde conique donnée γ', il en existe une infinité.*

Soient ABCD un quadrilatère simple inscrit à la conique γ et circonscrit à la conique γ'; E, F les points d'intersection de la conique γ avec une tangente quelconque à la conique γ'; G le point d'intersection des diagonales AC, BD du quadrilatère ABCD; a, b les droites doubles du faisceau involutif φ dont les droites GA et GB, GE et GF sont deux couples de droites conjuguées. On sait (3°, 3) que les cordes de la conique γ dont les extrémités sont projetées du point G suivant des droites conjuguées du faisceau involutif φ sont tangentes à une même conique γ''. Les droites AB, BC, CD, DA, EF sont donc des tangentes à la conique γ'' et celle-ci se confond avec la conique γ'. Il en résulte que si H et K sont les points où les droites GE, GF recoupent la conique γ le quadrilatère EFKH est à la fois inscrit à la conique γ et circonscrit à la conique γ', ce qui démontre le théorème.

2) Corollaire. *Les diagonales des quadrilatères simples inscrits à γ et circonscrits à γ' passent toutes par le point G et les côtés opposés des quadrilatères se coupent sur la polaire de ce point pour les deux coniques.*

E. Coniques harmoniquement inscrites ou harmoniquement circonscrites l'une à l'autre. –

140. 1° Théorèmes.

1) *Quand il existe un triangle qui est inscrit à une conique donnée γ et qui est un triangle polaire pour une autre conique donnée γ', il existe une infinité de pareils triangles. On dit alors que la conique γ est harmoniquement circonscrite à la conique γ'.*

2) *Quand il existe un triangle qui est circonscrit à une conique donnée γ et qui est un triangle polaire pour une autre conique donnée γ', il existe une infinité de pareils triangles. On dit alors que la conique γ est harmoniquement inscrite à la conique γ'.*

Il suffit de démontrer le théorème (1). Soient ABC le triangle qui est inscrit à la conique γ et est un triangle polaire de γ'; D un point quelconque de la conique γ; d la polaire du point D pour la conique γ'; E un des points d'inter-

section de la droite d et de la conique γ; e la polaire du point E pour la conique γ'; E le point de, de sorte que la droite $f \equiv DE$ est la polaire du point F pour la conique γ' et que le triangle $DEF \equiv def$ est un triangle polaire de la conique γ'. Les triangles ABC, DEF étant deux triangles polaires de la conique γ', on sait qu'il existe une conique γ'' qui est circonscrite aux deux triangles; mais les cinq points A, B, C, D, E sont déjà sur la conique γ, la conique γ'' coïncide donc avec la conique γ, ce qui démontre le théorème.

3) Si la conique γ est harmoniquement circonscrite à la conique γ', celle-ci est harmoniquement inscrite à la conique γ.

4) Si la conique γ est harmoniquement inscrite à la conique γ', celle-ci est harmoniquement circonscrite à la conique γ.

Il suffit de démontrer le théorème (3). Soit γ'' une conique par rapport à laquelle les coniques γ, γ' sont des figures polaires réciproques (L'existence de cette conique γ'' sera établie dans la prochaine partie du cours). A tout triangle inscrit à la conique γ correspond un triangle circonscrit à la conique γ' et à tout triangle polaire de la conique γ' correspond un triangle polaire de la conique γ. Au triangle ABC qui est inscrit à la conique γ et qui est un triangle polaire de la conique γ' correspond un triangle abc qui est circonscrit à la conique γ' et qui est un triangle polaire de la conique γ. L'existence de ce triangle abc prouve que la conique γ' est harmoniquement inscrite à la conique γ.

2° 1) **Théorème.** Les circonférences harmoniquement circonscrites à une hyperbole équilatère passent par le centre de celle-ci.

Soient ABC un triangle polaire de l'hyperbole équilatère η; O le centre de l'hyperbole; I, J les points cycliques. Le triangle OIJ est un second triangle polaire de l'hyperbole équilatère η. Il existe donc une conique passant par les points A, B, C, O, I, J; mais cette conique est déterminée par les cinq points A, B, C, I, J et elle est la circonférence circonscrite au triangle ABC, puisque I et J sont les points cycliques.

2) **Corollaires.** Le lieu des centres des hyperboles équilatères ayant le même triangle polaire ABC est la circonférence circonscrite à ce triangle.

3) **Remarque.** La circonférence circonscrite à un triangle formé par trois tangentes à une parabole passe par le foyer de celle-ci; ou bien, le lieu des foyers des paraboles inscrites à un triangle est la circonférence circonscrite au triangle. On sait que s'il existe un triangle qui est inscrit à une conique donnée γ et qui est circonscrit à une seconde conique donnée γ', il existe une infinité de pareils triangles. Mais si F, I, J sont un point réel à distance finie et les points cycliques d'un plan propre et réel, toute conique circonscrite au triangle FIJ est une circonférence et toute conique inscrite au même triangle est une parabole ayant le point F pour foyer. Dès lors, si ABC est un triangle inscrit à une circonférence γ qui passe par le point F, il existe une parabole qui est inscrite à ce triangle et a le point F pour foyer. Cette parabole est déterminée par la condition d'avoir le point F comme foyer et d'être tangente à deux côtés du triangle ABC.

3° **Théorème.** Si deux coniques γ, γ' ont un même triangle polaire, si l'une est circonscrite et si l'autre est inscrite à un même triangle, les sommets

de celui-ci et les sommets du triangle polaire commun sont six points d'une même conique et les côtés des deux triangles sont six tangentes d'une autre conique.

Soient ABC le triangle inscrit à la conique γ et circonscrit à la conique γ'; XYZ le triangle polaire commun aux coniques γ, γ'; A'B'C' un second triangle inscrit à la conique γ et circonscrit à la conique γ'; γ'' une conique ayant les triangles ABC, A'B'C' comme triangles polaires. Le point $D \equiv (BC, B'C')$ est le pôle de la droite $d \equiv AA'$ pour la conique γ''; celle-ci passe donc par les points doubles de l'involution déterminée par les deux couples de points B et C, D et $E \equiv (d, BC)$; cela permet de construire six points de la conique γ''; cette conique est donc déterminée. Mais en faisant une transformation par polaires réciproques ayant la conique γ'' pour conique directrice, la conique γ devient la conique γ' et celle-ci devient la conique γ. Le triangle XYZ qui est un triangle polaire commun aux coniques γ, γ' est donc également un triangle polaire de la conique γ''. Mais le triangle ABC est déjà un triangle polaire de la conique γ''; les deux triangles XYZ, ABC sont donc inscrits à une même conique et circonscrits à une autre conique.

4° Théorèmes.

1) Lorsque deux coniques γ, γ' d'un faisceau ponctuel sont harmoniquement circonscrites à une même conique φ, il en est ainsi de toutes les coniques du faisceau.

2) Lorsque deux coniques γ, γ' d'un faisceau tangentiel sont harmoniquement inscrites à une même conique φ, il en est ainsi de toutes les coniques du faisceau.

Il suffit de démontrer le premier théorème. Soient A un point commun aux deux coniques γ, γ'; a la polaire du point A pour la conique φ. La droite a coupe la conique γ en des points formant avec le point A un triangle polaire de la conique φ, c'est-à-dire, en des points conjugués par rapport à la conique φ. De même, les points où la droite a coupe la conique γ' sont également des points conjugués pour la conique φ. Dès lors, les coniques du faisceau ponctuel auquel appartiennent les coniques γ, γ' tracent sur la droite a une involution qui est identique à celle des points de cette droite qui sont des points conjugués pour la conique φ. Cela revient à dire que les points X, Y où une conique γ'' du faisceau coupe la droite a sont des points conjugués pour la conique φ et qu'ainsi le triangle AXY est un triangle polaire de la conique φ. La conique γ'' circonscrite au triangle AXY est donc harmoniquement circonscrite à la conique φ.

5° Corollaires.

1) Quand deux couples de côtés opposés d'un quadrangle sont formés de droites conjuguées pour une conique, il en est de même du troisième.

2) Quand deux couples de sommets opposés d'un quadrilatère sont formés de points conjugués pour une conique, il en est de même du troisième.

En effet, si A, B, C, D sont les points communs aux coniques γ, γ' (4°), on peut, dans la démonstration précédente, prendre les droites AB et CD, AC et BD, AD et BC comme coniques $\gamma, \gamma', \gamma''$.

6° Remarque. – Si les coniques γ, γ' (4°) sont homothétiques, elles coupent la droite de l'infini aux mêmes points et elles ont en commun deux autres points à

distance finie. La droite d joignant ceux-ci et la droite de l'infini forment une conique du faisceau (γ, γ') et elles sont conjuguées par rapport à la conique φ; la droite d passe donc par le centre de la conique φ. – En particulier, si deux circonférences sont harmoniquement circonscrites à la conique φ, leur axe radical passe par le centre de cette conique et il en résulte que ce point a la même puissance par rapport à toutes les circonférences harmoniquement circonscrites à la conique φ. Toutes ces circonférences doivent donc couper orthogonalement une même circonférence concentrique à la conique φ. – Mais si le point A est le sommet d'un angle droit circonscrit à la conique, les droites isotropes issues de ce point sont conjuguées par rapport à la conique et le point A est une circonférence de rayon nul harmoniquement circonscrite à la conique ; donc, les circonférences harmoniquement circonscrites à une conique à centre φ coupent orthogonalement la circonférence lieu des sommets des angles droits circonscrits à la conique φ. – Lorsque la conique φ est une parabole, les circonférences harmoniquement circonscrites ont leurs centres sur la directrice de la parabole.

Chapitre VII : Les quadriques considérées comme formes de seconde espèce.

§ I : Quadriques du second ordre et quadriques de la seconde classe.

141. 1° On a montré (ch. V, § IV, p 83) que les quadriques proprement dites de la géométrie analytique peuvent être définies comme supports de systèmes réglés ou d'ensembles simplement infinis de droites, par l'intermédiaire de couples de ponctuelles ou de feuillées projectives ayant des droites gauches pour supports, ce qui a permis de les considérer comme des formes de première espèce. On retrouve les quadriques dégénérées en cônes du second degré ou en coniques, en couples de systèmes plans ou de gerbes, en se servant de ponctuelles ou de feuillées projectives dont les supports, au lieu d'être gauches, se coupent ou sont confondus. Une réciprocité entre deux espaces à trois dimensions transforme toute quadrique obtenue par l'intermédiaire de deux ponctuelles projectives en une quadrique déterminée par deux feuillées projectives.

2° Mais on peut définir les quadriques comme les supports d'ensembles doublement infinis de points ou de plans par l'intermédiaire de formes fondamentales projectives de seconde espèce, ce qui permettra de les considérer comme des formes de seconde espèce. Une quadrique est dite du second ordre ou de la seconde classe selon qu'elle est obtenue comme lieu de points ou comme lieu de plans (Voir p. 86, 4°, N.B 1) par application des deux définitions corrélatives suivantes:

1) Une quadrique du second ordre est le support des points communs aux éléments homologues de deux gerbes réciproques de supports différents.

2) Une quadrique de la seconde classe est le support des plans déterminés par les éléments homologues de deux systèmes plans réciproques de supports différents.

3° Les deux définitions se transformant l'une dans l'autre par une réciprocité entre deux espaces à trois dimensions, les conséquences de l'une donnent aisément celles de l'autre. On se bornera donc à l'étude des quadriques du second ordre; on prouvera d'ailleurs que dans les cas où il n'y a pas dégénérescence, une quadrique

du second ordre est aussi une quadrique de la seconde classe et on prouvera encore que ces quadriques sont identiques à celles déjà considérées dans ce cours et dans le cours de géométrie analytique.

§ II : Classification des quadriques du second ordre.

142. 1° **Plans tangents à la quadrique aux supports des deux gerbes qui la définissent.** – 1) **Définition.** Soient P, P_1 les supports des deux gerbes réciproques dont les intersections des éléments homologues sont les points de la quadrique du second ordre Σ. A la droite PP_1 considérée comme appartenant à la gerbe P, correspond un plan bien déterminé ϖ_1 de la gerbe P_1, et, à la même droite considérée comme appartenant à la gerbe P_1, correspond un plan bien déterminé ϖ de la gerbe P. Les points P, P_1 font donc partie de la quadrique Σ et on dit qu'en ces points la quadrique Σ est tangente aux plans ϖ, ϖ_1. On dit aussi que les plans ϖ, ϖ_1 sont les plans tangents à la quadrique Σ aux points P, P_1 et que ces deux points sont les points de contact des deux plans.

2) **Problème.** *Déterminer les points communs à la quadrique Σ et aux plans ϖ, ϖ_1.* La droite PP_1 ne pouvant se trouver dans l'un des plans ϖ, ϖ_1 sans être aussi dans l'autre, on distingue trois cas.

a.– **Les plans ϖ, ϖ_1 passent par la droite PP_1 et sont confondus.** Si la droite a de la gerbe P tourne autour du point P dans le plan ϖ, le plan homologue α_1 de la gerbe P_1 tourne autour de la droite PP_1 et se confond avec le plan $\varpi_1 \equiv \varpi$ dès que la droite a coïncide avec la droite PP_1 ; les points de la droite PP_1 sont les seuls points du plan $\varpi \equiv \varpi_1$ qui appartiennent à la quadrique Σ.

b.– **Les plans ϖ, ϖ_1 passent par la droite PP_1 mais sont distincts.** Cherchons les points communs au plan ϖ et à la quadrique Σ. Si la droite a de la gerbe P tourne autour du point P dans le plan ϖ, le plan homologue α_1 de la gerbe P_1 tourne autour de la droite P_1P et se confond encore avec le plan ϖ_1 lorsque la droite a coïncide avec la droite PP_1. Mais comme dans le cas actuel les plans ϖ, ϖ_1 sont distincts, le plan ϖ est une position θ_1 du plan α_1 différente de ϖ_1 dans la gerbe P_1 et ce plan θ_1 coïncidant avec le plan ϖ contient la position homologue t de la droite a dans le plan ϖ : celui-ci a donc en commun avec la quadrique Σ les points de la droite PP_1 et ceux d'une seconde droite t qui passe par le point P. – De la même manière, le plan ϖ_1 tangent au point P_1 à la quadrique Σ a en commun avec elle les points de la droite PP_1 et ceux d'une droite t_1 issue du point P_1 et la droite homologue, dans la gerbe P_1, du plan θ de la gerbe P qui coïncide avec le plan ϖ_1.

c.– **Les plans ϖ, ϖ_1 ne passent pas par la droite PP_1 de sorte que les points P, P_1 sont les seuls points communs à la droite PP_1 et à la quadrique Σ.** – Cherchons les points communs à la quadrique Σ et au plan ϖ. Lorsque la droite a de la gerbe P tourne autour du point P dans le plan ϖ, le plan homologue α_1 de la gerbe P_1 tourne autour de la droite PP_1 et les deux formes engendrées sont projectives. La feuillée décrite par le plan α_1 coupe le plan ϖ suivant un faisceau projectif à celui engendré par la droite a dans le même plan ; les deux faisceaux ont le point P comme support commun et leurs rayons doubles

sont le lieu des points communs au plan ϖ et à la quadrique Σ. Trois hypothèses sont à envisager.

α) Lorsque les deux faisceaux sont identiques, le plan ϖ fait partie de la quadrique Σ et on montre sans peine qu'il en est de même du plan ϖ_1 (Voir le N.B. ci dessous). Si la droite x est une droite menée arbitrairement par le point P en dehors du plan ϖ, au plan $\alpha \equiv (x, PP_1)$ de la gerbe P correspond donc la droite $a_1 \equiv (\alpha, \varpi_1)$ de la gerbe P_1; le plan homologue dans la gerbe P_1 de la droite x de la gerbe P est un plan ξ_1 passant par la droite a_1 et différant du plan ϖ_1; le point P et le point (x, a_1) sont donc les seuls points communs à la droite x et à la quadrique Σ, et celle-ci est une quadrique dégénérée formée des plans ϖ, ϖ_1. Il n'y aura pas lieu de s'occuper davantage de cette quadrique.

β) Si les faisceaux sont distincts et ont deux rayons doubles, ceux-ci forment le lieu des points communs à la quadrique Σ et au plan ϖ.

γ) Si les faisceaux sont distincts et n'ont qu'un rayon double, celui-ci est encore le lieu des points communs au plan ϖ et à la quadrique Σ.

N.B.– La feuillée qui projette de la droite PP_1 le faisceau engendré par la droite a dans le plan ϖ est, dans la gerbe P, la forme homologue du faisceau obtenu dans la gerbe P_1 en coupant par le plan ϖ_1 la feuillée décrite par le plan α_1. Il en résulte que si on remplace le plan ϖ par le plan ϖ_1 dans les raisonnements qui précèdent, celle des trois hypothèses qui est applicable au plan ϖ se vérifie aussi pour le plan ϖ_1; les lieux des points communs aux plans ϖ ou ϖ_1 et à la quadrique Σ sont donc de même nature; de plus, tout plan passant par la droite PP_1 qui coupe le plan ϖ suivant une droite située sur la quadrique Σ, coupe également le plan ϖ_1 suivant une droite appartenant à la quadrique.

2° Corollaire. *Une droite menée arbitrairement par le point P (ou P_1) dans le plan ϖ (ou ϖ_1) fait partie de la quadrique Σ ou n'a en commun avec elle que le point P (ou P_1).*

3° Problème. *Déterminer les points communs à la quadrique Σ et à un plan β mené arbitrairement par la droite PP_1.*

On peut considérer le plan β comme un plan de la gerbe P; puisqu'il passe par la droite PP_1, la droite homologue dans la gerbe P_1 est une droite b_1 du plan ϖ_1. Si une droite a de la gerbe P tourne autour du point P dans le plan β, le plan homologue α_1 dans la gerbe P_1 tourne autour de la droite b_1; les deux formes engendrées sont projectives et il s'agit de déterminer le lieu du point $A \equiv (a, \alpha_1)$. Deux cas sont à distinguer.

1) La droite PP_1 appartient à la quadrique Σ. On doit supposer le plan β différent des plans ϖ, ϖ_1 (1°) et ceux-ci peuvent être distincts ou confondus. La feuillée $b_1(\alpha_1)$ coupe le plan β suivant le faisceau $P_1(A)$ projectif au faisceau $P(a)$ ou $P(A)$; mais quand la droite a coïncide avec la droite PP_1, le plan α_1 se confond avec le plan ϖ_1, la droite P_1A coïncide avec la droite P_1P, les deux faisceaux $P(A)$, $P_1(A)$ ont un rayon double $PP_1 \equiv P_1P$, ils sont perspectifs et le lieu du point A ou l'ensemble des points communs au plan β et à la quadrique Σ est formé de la droite PP_1 et d'une droite c qui ne passe ni par le point P ni par le point P_1.

2) La droite PP_1 n'appartient pas à la quadrique Σ. Deux hypothèses

sont à examiner.

a. La droite b_1 est l'intersection des plans β, ϖ_1. Lorsque la droite a devient la droite $d \equiv (\beta, \varpi)$, le plan α_1 devient le plan $\delta_1 \equiv (b_1, P_1 P)$ ou β et il contient la droite homologue d dont tous les points appartiennent donc déjà au plan β et à la quadrique Σ. Mais si la droite a est différente de la droite d, le plan α_1 est différent du plan δ_1 ou β qu'il coupe suivant la droite b_1; le point $A \equiv (a, \alpha_1)$ est le point (a, b_1) et il décrit la droite b_1 lorsque la droite a varie. Dans le cas actuel, le lieu des points communs au plan β et à la quadrique Σ est donc formé des droites d, b_1 suivant lesquelles le plan β coupe les plans ϖ, ϖ_1. De même que la droite b_1 est la droite homologue dans la gerbe P_1 du plan β de la gerbe P, la droite d est dans la gerbe P, la droite homologue du plan δ_1 de la gerbe P_1 qui coïncide avec le plan β (Voir le N.B. au 1°).

b. La droite b_1 est différente de la droite $e_1 \equiv (\beta, \varpi_1)$. La feuillée a_1 (α_1) coupe le plan β suivant un faisceau $P_1(A)$ projectif au faisceau $P(a)$ ou $P(A)$. Quand la droite a devient la droite PP_1 dans la gerbe P, le plan α_1 devient le plan ϖ_1 de la feuillée b_1 et la droite P_1A du faisceau P_1 devient la droite e_1. Les deux faisceaux projectifs $P(A), P_1(A)$ du plan β ne sont pas perspectifs et le lieu du point A est une conique tangente au point P_1 à la droite $e_1 \equiv (\beta, \varpi_1)$ du plan ϖ_1; par analogie, cette conique est tangente au point P à la droite $d \equiv (\beta, \varpi)$ du plan ϖ, ce qu'on prouve directement en observant que si la droite a coïncide avec la droite $d \equiv (\beta, \varpi)$, le plan α_1 devient le plan $\delta_1 \equiv (P_1 P, b_1)$ et la droite $P_1 A$ devient la droite $P_1 P$ dans le faisceau P_1.

4° Corollaire. *Une droite menée par l'un des points P, P_1 en dehors des plans ϖ, ϖ_1 coupe la quadrique Σ en deux points différents dont l'un est celui des points P, P_1 d'où elle est issue.*

5° Problème. *Déterminer les points communs à la quadrique Σ et à un plan ne passant que par un seul des points P, P_1 et différent des plans ϖ, ϖ_1.*

Pour fixer les idées, on considère un plan γ qui passe par le point P, est différent du plan ϖ et ne contient pas la droite PP_1. Soit c_1 la droite homologue dans la gerbe P_1 du plan γ de la gerbe P. Si la droite a de la gerbe P tourne autour du point P dans le plan γ, le plan homologue α_1 de la gerbe P_1 tourne autour de la droite c_1, les deux formes engendrées sont projectives, leurs éléments homologues se coupent en un point $A \equiv (a, \alpha_1)$ commun au plan γ et à la quadrique Σ, et dont il s'agit encore de trouver le lieu. Le plan γ étant différent du plan ϖ et ne passant pas par la droite PP_1, la droite c_1 est différente de la droite $P_1 P$ et n'est pas dans le plan ϖ_1; elle coupe le plan γ en un point R différent du point P_1 ce point R appartient à la quadrique Σ et les faisceaux $R(A)$ et $P(A)$ ou $P(a)$ sont projectifs. Deux cas sont à distinguer selon que le plan $\delta_1 \equiv (c_1, P_1 P)$ de la gerbe P_1 passe ou ne passe pas par la droite homologue $d \equiv (\gamma, \varpi)$ de la gerbe P, ou, ce qui revient au même, selon que le plan γ coupe le plan ϖ suivant une droite d qui appartient ou n'appartient pas à la quadrique Σ.

1) Dans le premier cas, le point R est sur la droite d qui est un rayon double des faisceaux projectifs $P(A), R(A)$; ces faisceaux sont perspectifs et le lieu des points A communs à la quadrique Σ et au plan γ est formé de la droite d et d'une autre droite e qui ne passe ni par le point P ni par le point R.

2) Dans le second cas, le point R n'est pas sur la droite d et celle-ci est dans le faisceau $P(A)$ le rayon homologue du rayon RP du faisceau $R(A)$. Le lieu des points com=

muns à la quadrique Σ et au plan γ est une conique tangente à la droite d au point P.

6° Corollaires. 1) Le plan ϖ (ϖ_1) est le lieu des tangentes au point P (P_1) aux coniques passant par ce point sur la quadrique Σ.
C'est pour cette raison que les plans ϖ, ϖ_1 sont dits tangents à la quadrique aux points P, P_1.
2) Toute droite qui n'appartient pas à la quadrique ne peut la rencontrer en plus de deux points et c'est à cause de cela que la quadrique est dite du second ordre. La propriété a déjà été démontrée pour les droites issues du point P ou du point P_1; pour l'appliquer à une autre droite x, il suffit d'observer que les points communs à cette droite et à la quadrique Σ sont sur les deux droites ou sur la conique proprement dite formant le lieu des points communs à la quadrique et au plan (P, x).

7° Théorème. Lorsque la quadrique Σ ne se réduit pas au système des plans ϖ, ϖ_1, chacun de ses points peut être pris comme support de l'une des gerbes réciproques qui la définissent.
Le point P_2 étant pris arbitrairement sur la quadrique Σ, on mène par le point P deux plans α, α' qui coupent le plan ϖ suivant des droites distinctes et la quadrique Σ suivant des coniques proprement dites k, k' tangentes à ces deux droites au point P et ne passant ni par le point P_1 ni par le point P_2. L'intersection a des plans α, α' est extérieure au plan ϖ; elle rencontre la quadrique au point P et en un autre point Q qui est le second point où les coniques k, k' se coupent sur la quadrique. Soient A, A' les seconds points d'intersection des coniques k, k' par un plan β mené arbitrairement par la droite P_2Q. Les feuillies qui projettent les deux coniques des droites P_2A, P_2A' sont respectivement projectives aux faisceaux projetant les mêmes coniques du point P et ces deux couples de formes projectives déterminent une réciprocité entre les gerbes P_2, P, le plan β des points P_2, Q, A, A' qui est commun aux deux feuillées correspondant doublement à la droite PQ qui est commune aux deux faisceaux. Mais la quadrique définie par la réciprocité ainsi obtenue entre les gerbes P, P_2 est la quadrique Σ, un plan quelconque passant par le point P_2 coupant les deux quadriques suivant des coniques ayant cinq points communs, le point P_2 et deux points sur chacune des coniques k, k'.

8° Corollaires. 1) Il y a un plan tangent en chaque point d'une quadrique du du second ordre.
2) Quand deux coniques sont situées dans deux plans distincts et qu'elles ont deux points communs P, Q, elles appartiennent à une infinité de quadriques du second ordre, mais chacune de ces quadriques est déterminée dès qu'on donne un point par lequel elle doit passer en dehors des coniques.

9° Classification des quadriques du second ordre. Ayant écarté le cas où la quadrique Σ est formée des plans ϖ, ϖ_1 une au moins et deux au plus des droites menées par le point P dans le plan ϖ sont situées sur la quadrique.
Si la droite d est une telle droite, tout plan qui la contient a une autre droite en commun avec la quadrique. Soient θ_1, θ_2 deux plans passant par la droite d et g_1, g_2 les secondes droites communes à ces plans et à la quadrique.
Deux cas sont à considérer.

1) Les droites g_1, g_2 rencontrent la droite d au même point S. Dans ce cas, la quadrique Σ est un cône (ou un cylindre) ayant le point S pour sommet. En effet, si A, B sont deux points de la quadrique qui n'appartiennent pas aux droites d, g_1, g_2, deux plans quelconques menés par ces points coupent la quadrique suivant deux coniques γ_1, γ_2 passant par les points A, B et s'appuyant sur les droites d, g_1, g_2 en des points distincts deux à deux. Les cônes $S\gamma_1, S\gamma_2$ qui projettent les coniques γ_1, γ_2 du point S ont cinq génératrices rectilignes communes, les droites d, g_1, g_2, SA, SB; ils sont donc confondus l'un avec l'autre; mais ils sont également confondus avec la quadrique, puisqu'il ne peut y avoir qu'une seule quadrique passant par les coniques γ_1, γ_2 et le point S.
2) Les droites g_1, g_2 coupent la droite d en des points différents G_1, G_2. Dans ce cas, un troisième plan mené par la droite d a en commun avec la quadrique Σ une autre droite g_3; celle-ci coupe la droite d en un point G différent des points G_1, G_2, sans quoi, il résulterait du 1° que la quadrique Σ serait un cône de sommet G_3, les points G_1, G_2 seraient confondus avec le point G_3 et ne serait pas distincts l'un de l'autre. Les points G_1, G_2, G_3 étant différents deux à deux, les droites g_1, g_2, g_3 sont gauches deux à deux; toute droite x qui les rencontre toutes les trois a déjà trois points communs avec la quadrique Σ et est donc toute entière sur celle-ci. La quadrique Σ est donc le support du système réglé dont les droites g_1, g_2, g_3 sont des directrices.
Les quadriques du second ordre définies par la considération de deux gerbes réciproques sont donc identiques à celles construites à l'aide de feuillées projectives et, par suite, à celles de la géométrie analytique. En ne considérant que les quadriques réelles et non dégénérées, elles se distinguent les unes des autres par leurs intersections avec le plan de l'infini; les ellipsoïdes coupent le plan de l'infini suivant des coniques proprement dites et imaginaires; les hyperboloïdes à une et à deux nappes coupent le plan de l'infini suivant des coniques proprement dites et réelles; les paraboloïdes elliptiques ou hyperboliques sont tangents au plan de l'infini et le coupent suivant deux droites imaginaires ou réelles passant par le point de contact.

§ III: Propriétés polaires des quadriques de second ordre.

A. Généralités._

143. 1° Il n'y a pas lieu de s'occuper du cône du second degré ou de la quadrique formée de deux systèmes plans, ni des formes corrélatives, le faisceau du second degré ou la quadrique formée de deux gerbes, dont les propriétés polaires sont déjà connues. On considèrera une quadrique non dégénérée du second ordre et, des propriétés établies, on déduira que la quadrique est également une quadrique de la seconde classe.
2° Soient Σ une quadrique proprement dite du second ordre; B, C les points où une droite menée arbitrairement par un point donné A coupe la quadrique dans l'hypothèse où celle-ci ne passe pas par le point A; A' le conjugué harmonique du point A par rapport aux points B, C. — *Le lieu du point A' est un plan.* — En effet, si A'' est un second point du lieu, la droite $A'A''$ est la polaire du point A pour la conique suivant laquelle le plan $AA'A''$ coupe la quadrique Σ; tous les points de la droite $A'A''$ sont des points du lieu et ce lieu est un plan, toute droite y étant entièrement

contenue dès qu'elle y a deux points.

3° **Définition**.- Le plan α formant le lieu du point A' est appelé le plan polaire du point A et celui-ci est appelé le pôle du plan α pour la quadrique Σ.

4° **Corollaire**. Le plan polaire α du point A pour la quadrique Σ contient: 1) le conjugué harmonique A' du point A sur toute corde BC de la quadrique Σ qui passe par le point A; 2) la polaire du point A pour toute conique obtenue en coupant la quadrique Σ par un plan contenant le point A; 3) la droite d'intersection d des plans tangents β, γ à la quadrique Σ aux extrémités B, C d'une corde passant par A et le plan (d, A) est le conjugué harmonique du plan α par rapport aux plans β, γ; 4) la droite d'intersection des plans $B_1 B_2 B_3$, $C_1 C_2 C_3$, si $B_1 C_1$, $B_2 C_2$, B_3 C_3 sont trois cordes de la quadrique issues du point A; 5) les points de contact des plans tangents et des tangentes menées du point A à la quadrique Σ - d'où il résulte que l'intersection k et la quadrique Σ par le plan α est la courbe de contact de la quadrique avec le cône circonscrit Γ de sommet S.

5° **Autre corollaire**. La quadrique Σ est anallagmatique dans la perspectivité harmonique dont le point A et le plan α sont le centre et le plan de perspectivité.

6° **Définition**. Tout plan tangent à la quadrique Σ est le plan polaire du point de contact et tout point de la quadrique est le pôle du plan tangent en ce point: Le plan polaire d'un point de la quadrique est donc encore le lieu des polaires du point pour toutes les coniques suivant lesquelles les plans menés par ce point coupent la quadrique.

7°. **Problème**. Mener des plans tangents à une quadrique par une droite non située sur la quadrique.

Soit Γ le cône circonscrit à la quadrique Σ ayant pour sommet un point arbitraire A de la droite donnée d. Les plans tangents à la quadrique Σ par le point A forment l'ensemble des plans tangents au cône Γ et chacun d'eux contient une tangente à la conique γ commune au cône et à la quadrique, ou intersection de la quadrique et du plan polaire α du point A. Donc si la droite d coupe le plan α au point B, les plans tangents cherchés sont déterminés par la droite d et les tangentes menées du point B à la conique γ.

144.- 1° **Théorème**. Si le plan polaire α du point A pour la quadrique Σ passe par le point B, le plan polaire β du point B passe aussi par le point A.-

On mène par les points A, B un plan θ qui coupe la quadrique Σ suivant une conique k. Les polaires des points A, B pour cette conique sont les intersections des plans α et θ, β et θ. Le plan α contenant le point B, la droite a passe par le point B; il résulte des propriétés polaires des coniques que la droite b passe par le point A, ce point est donc dans le plan β.

2° **Corollaires** 1) Si un point A se meut dans un plan β, le plan polaire α du point A tourne autour du pôle B du plan β, et réciproquement.

2) Si un point A glisse sur une droite d, le plan polaire α du point A tourne autour d'une droite d_1, et si un point A_1 glisse sur la droite d_1, le plan polaire α_1 du point A_1 tourne autour de la droite d.

Quelle que soit la position du point A sur la droite d, son plan polaire α doit contenir les pôles des plans passant par la droite d; le lieu de ces pôles est donc une droite d_1 autour de laquelle tourne le plan α.

3°- **Définition**.- Les droites d, d_1 dont chacune est le lieu des pôles des plans qui

passent par l'autre sont appelés des droites polaires pour la quadrique Σ.

4° Problème. Construire la droite d_1, connaissant la droite d et la quadrique Σ.

Cette construction peut se faire de différentes manières. 1) La droite d_1 est l'intersection des plans polaires de deux points arbitraires de la droite d ; 2) elle joint les pôles de deux plans menés arbitrairement par la droite d ; 3) elle est l'intersection des plans tangents à la quadrique Σ en deux points communs à celle-ci et à la droite d ; 4) elle joint les points de contact des plans tangents menés à la quadrique Σ par la droite d ; 5) si la droite d n'est pas sur la quadrique, elle joint les pôles de la droite d par rapport aux coniques suivant lesquelles deux plans menés arbitrairement par la droite d coupent la quadrique ; 6) elle est l'intersection des plans polaires de la droite d par rapport aux cônes circonscrits à la quadrique de deux points de la droite d.

5° Corollaires. 1) Si la droite d est sur la quadrique Σ elle se confond avec la droite d_1.

2) Si la droite d est tangente à la quadrique Σ, la droite d_1 est tangente au même point et les droites d, d_1 forment un groupe harmonique avec les génératrices rectilignes issues du point considéré sur la quadrique. (On dit dans ce cas que les droites d, d_1 sont des tangentes conjuguées).

N.B. – Les plans tangents α, β à la quadrique Σ en deux points A, B se coupent suivant la droite polaire de la droite AB. Si le point B se rapproche indéfiniment du point A, les deux droites AB, $\alpha\beta$ ont pour limites des tangentes conjuguées d, d_1.

6° Définition. – 1) Deux points sont dits conjugués par rapport à la quadrique Σ lorsque chacun d'eux est dans le plan polaire de l'autre pour la quadrique. 2) Deux plans sont dits conjugués par rapport à la quadrique Σ lorsque chacun d'eux contient le pôle de l'autre. 3) Un point et une droite sont dits conjugués par rapport à la quadrique Σ lorsque la droite est dans le plan polaire du point et qu'ainsi le point est sur la droite polaire de la droite considérée. 4) Un plan et une droite sont dits conjugués par rapport à la quadrique Σ lorsque la droite passe par le pôle du plan et qu'ainsi le plan contient la droite polaire de la droite. 5) Deux droites sont dites conjuguées par rapport à la quadrique Σ lorsque chacune d'elles s'appuie sur la polaire de l'autre.

N.B. – La dernière définition se justifie par le fait que si deux droites a, b se coupent, il en est de même de leurs polaires a_1, b_1 par rapport à la quadrique Σ. En effet, si P est le point commun aux droites a, b et si ω est le plan des deux droites, les droites a_1, b_1 sont dans le plan polaire ϖ du point P et passent par le pôle O du plan ω pour la quadrique Σ.

7° Ces définitions entraînent les conséquences suivantes : 1) Un point est conjugué à tous les point et à toutes les droites de son plan polaire ; 2) un plan est conjugué à tous les plans et à toutes les droites passant par son pôle ; 3) Une droite est conjuguée à tous les points de la droite polaire a, à tous les plans passant par celle-ci et à toutes les droites qui la coupent ; 4) Tout point de la quadrique Σ est conjugué à lui-même, de même que tout plan tangent et que toute tangente ; 5) Si les points A, B sont conjugués pour la quadrique Σ, ils le sont aussi pour toute conique obtenue en coupant la quadrique par un plan passant par la droite AB. Dès lors, toute droite est le support d'une ponctuelle involutive de points conjugués par rapport à la quadrique ; 6) Par analogie, si les plans α, β sont conjugués par rapport à la quadrique Σ, ils le sont aussi par rapport à tout cône circonscrit dont le sommet est sur la droite AB. Dès lors, toute droite est le support d'une feuillée involutive de plans conjugués par rapport à la quadrique.

8° Corollaires. 1) *Les couples de tangentes conjuguées issues d'un point de la quadrique sont en involution.*
En effet les couples de tangentes conjuguées issues du point A de la quadrique Σ sont dans le plan α tangent à la quadrique en ce point et elles sont coupées par une droite quelconque x du plan α suivant des couples de points conjugués, de même qu'elles sont projetées suivant des couples de plans conjugués d'un point quelconque P pris en dehors du plan α.
2) *Si le support d'un faisceau du premier degré n'appartient pas à la quadrique et si le plan du faisceau n'est pas tangent à la quadrique, en associant deux par deux les rayons du faisceau qui sont conjugués pour la quadrique on obtient un faisceau involutif.*
Soient A le support et ϖ le plan du faisceau; α le plan polaire du point A et P le pôle du plan ϖ pour la quadrique Σ; x la droite d'intersection des plans α, ϖ; d un rayon quelconque du faisceau; d_1 la droite polaire de la droite d; d' la droite conjuguée de la droite d dans le faisceau. La droite d_1 passe par le point P dans le plan α; les droites d, d_1 coupent la droite x en des points D, D_1 qui sont conjugués par rapport à la quadrique Σ; mais la droite d' joint le point A au point D_1 et la propriété résulte donc de ce que la ponctuelle $x(D, D_1)$ est involutive.
3) *Les faisceaux $A(d)$, $P(d_1)$ sont projectifs.*
9° Théorème. *Les droites d, d_1 étant des droites polaires pour la quadrique Σ, si le point A glisse sur la droite d, son plan polaire α tourne autour de la droite d_1 et la ponctuelle $d(A)$ est projective à la feuillée $d_1(\alpha)$.*
Trois cas sont à considérer. 1) Si la droite d est une génératrice rectiligne de la quadrique Σ, elle est confondue avec la droite d_1 et la propriété résulte de ce que le plan α est le plan tangent à la quadrique au point A.
2) Si les droites d, d_1 sont des tangentes conjuguées, elles sont dans le plan tangent ϖ au point P où elles se coupent. Soient k la conique suivant laquelle un plan θ mené par la droite d coupe la quadrique Σ. Lorsque le point A glisse sur la droite d, le plan α tourne autour de la droite d_1 et coupe le plan θ suivant la polaire a du point A pour la conique k. La ponctuelle $d(A)$ est projective au faisceau $A(a)$ par l'intermédiaire de la conique k; mais le faisceau $A(a)$ est perspectif à la feuillée $d_1(\alpha)$, celle-ci est donc projective à la ponctuelle $d(A)$.
3) Lorsque les droites d, d_1 sont gauches, le plan α coupe la droite d en un point A' qui est conjugué au point A pour la quadrique Σ. La ponctuelle $d(A, A')$ étant involutive, les ponctuelles $d(A)$, $d(A')$ sont projectives et la ponctuelle $d(A)$ est projective à la feuillée $d(A')$ qui est perspective à la ponctuelle $d(A')$.
10° Corollaires. 1) *Si deux droites ne sont pas conjuguées pour la quadrique Σ et si on associe tout point de l'une au point conjugué sur l'autre, on obtient deux ponctuelles projectives.* 2) *Si deux droites ne sont pas conjuguées pour la quadrique Σ et si on associe tout plan passant par l'une au plan conjugué passant par l'autre, on obtient deux feuillées projectives.*
Les droites données x, y n'étant pas conjuguées, la droite polaire x_1 de la droite x ne coupe pas la droite y. Si A est un point quelconque de la droite x, son plan polaire α passe par la droite x_1 et coupe la droite y au point A_1 qui est le seul point conjugué au point A sur la droite y. Ayant

$$x(A) \,\pi\, x_1(\alpha) \qquad \text{et} \qquad x_1(\alpha) \,\overline{\pi}\, y(A_1),$$

on en déduit $x(A) \,\pi\, y(A_1)$, c. q. f. d.
145. 1° Tétraèdre polaire de la quadrique Σ. – Soient A un point n'appartenant pas à la quadrique Σ et α son plan polaire. On sait que le plan α ne passe pas par le

le point A et qu'il n'est pas tangent à la quadrique qu'il coupe donc suivant une conique proprement dite (α, Σ). Si le point B est dans le plan α et n'est pas sur la conique (α, Σ), son plan polaire β passe par le point A et coupe le plan α suivant une droite (α, β) qui n'est pas tangente à la quadrique et ne contient pas le point B. Si le point C est un point de la droite (α, β) différent des points où cette droite coupe la conique (α, Σ) ou la quadrique Σ, son plan polaire γ passe par les points A, B et coupe la droite (α, β) en un point D différent du point C et dont le plan polaire δ est le plan ABC. Le tétraèdre ABCD ou $\alpha\beta\gamma\delta$ est appelé un tétraèdre polaire de la quadrique Σ. Chacun de ses sommets est le pôle de la face opposée pour la quadrique Σ, chaque sommet est conjugué aux trois autres, chaque face est conjuguée aux trois autres, toute arête est la droite polaire de l'arête opposée et est conjuguée aux quatre autres; trois sommets et les droites qui les joignent sont les sommets et les côtés d'un triangle polaire de la conique suivant laquelle leur plan coupe la quadrique; trois faces et leurs intersections sont les faces et les arêtes d'un trièdre polaire du cône circonscrit ayant leur point d'intersection pour sommet.

2° Théorème. *La correspondance établie entre les points et leurs plans polaires par la quadrique Σ est une réciprocité involutive entre deux espaces superposés.*

Soient ABCD ou $\alpha\beta\gamma\delta$ un tétraèdre polaire de la quadrique Σ; E un point extérieur aux faces du tétraèdre; ε le plan polaire du point E pour la quadrique Σ. Les cinq couples d'éléments A et α, B et β, C et γ, D et δ, E et ε déterminent une réciprocité R entre deux espaces superposés. Soient X un point quelconque du premier espace et ξ le plan homologue dans le second espace; le théorème sera démontré si on prouve que le plan ξ est le plan polaire du point X pour la quadrique Σ. – A cet effet, on observe d'abord que le point $F \equiv (ABE, CD)$ est à la fois le pôle du plan $\varphi \equiv (\alpha\beta\varepsilon, \gamma\delta)$ pour la quadrique Σ et le point homologue du même plan dans la réciprocité (R); le théorème est donc vrai lorsque le point X est le point F. D'autre part, à cause de la quadrique Σ et à cause de la réciprocité (R), la droite CD est le support de deux ponctuelles projectives l'une comme l'autre à la feuillée $\gamma\delta$; ces deux ponctuelles sont donc projectives l'une à l'autre et comme elles ont trois points doubles, C, D, F, elles sont identiques et la propriété est vraie pour tout point X situé sur une des arêtes du tétraèdre. – On considère ensuite un point X pris arbitrairement dans une des faces du tétraèdre; une droite quelconque d menée dans cette face par le point X coupe les trois arêtes de la face considérée en trois points différents deux à deux, Y, Z, T, auxquels le théorème est déjà applicable; la droite polaire d_1 de la droite d pour la quadrique Σ est donc aussi la droite homologue de la droite d dans la réciprocité (R); la droite d est ainsi le support de deux ponctuelles projectives à une même feuillée dont le support est la droite d_1; elles sont projectives entre elles et comme elles ont trois points doubles Y, Z, T, elles sont identiques et le théorème est vrai pour tout point X de l'une ou l'autre des faces du tétraèdre. – Enfin si le point X est extérieur aux faces du tétraèdre, on mènera par ce point une droite qui coupera les faces du tétraèdre en des points distincts et à laquelle le raisonnement précédent sera applicable; le théorème est donc vrai quelle que soit la position du point X.

3° Corollaires. 1) *Si le point A étant le pôle du plan α pour la quadrique Σ, on associe les points du plan α à leurs plans polaires et les droites du plan α à leurs droites polaires, le système plan α et la gerbe A sont réciproques.*

2) *La quadrique de second ordre Σ est aussi une quadrique de la seconde classe.*

Soient P et P_1 les supports de deux gerbes réciproques déterminant les points de la quadrique Σ par les intersections de leurs éléments homologues; ϖ et ϖ_1 les plans tangents à la quadrique aux points P, P_1 ou les éléments homologues dans les gerbes P, P_1 de la droite PP_1

considérée successivement comme appartenant à la gerbe P_1 ou à la gerbe P; a une droite quelconque de la gerbe P; α_1, le plan homologue dans la gerbe P_1; X le point de la quadrique Σ où la droite a coupe le plan α_1; ξ le plan tangent à la quadrique au point X; a' l'intersection des plans ξ et ϖ; A_1 le pôle du plan α_1 pour la quadrique. Le point A_1 appartient au plan ξ qui peut donc être considéré comme déterminé par le point A_1 et la droite a'. En vertu de la propriété précédente, le système plan $\varpi(a')$ est réciproque à la gerbe $P(a)$ et le système plan $\varpi_1(A_1)$ est réciproque à la gerbe $P_1(\alpha_1)$. Les gerbes $P(a)$, $P_1(\alpha_1)$ étant réciproques, il en est de même des systèmes plans $\varpi(a')$, $\varpi_1(A_1)$ et les plans $\xi \equiv (a', A_1)$ sont les plans tangents d'une quadrique Σ' de la seconde classe. Il faut montrer que cette quadrique coïncide avec Σ ou que les points définis comme points de contact des plans tangents à Σ' sont les points de Σ. Il suffit de faire la démonstration pour l'un d'eux. Or quand la droite a est confondue avec la droite $\varpi\varpi'$, le point A_1 devient le point P_1 ou le point de contact du plan ϖ_1 avec la quadrique Σ'; le théorème est donc démontré.

B. Propriétés diamétrales.

146. - 1° Les propriétés diamétrales se déduisent des propriétés polaires en écartant à l'infini certains éléments de la figure. - On supposera encore que la quadrique considérée Σ est une quadrique proprement dite.

Définitions. - 1) Un plan diamétral est le plan polaire d'un point du plan de l'infini et il prend le nom de plan asymptote quand il est tangent en son pôle à la quadrique.

2) On donne le nom de centre au pôle du plan de l'infini.

3) On donne le nom de diamètre à la droite polaire d'une droite du plan de l'infini.

2° **Propriétés immédiates.** - 1) Tout plan diamétral contient : les points milieux de ses cordes conjuguées (lesquelles sont parallèles); les points de contact des plans tangents et des tangentes parallèles aux cordes conjuguées; les centres des coniques obtenues en coupant la quadrique par des plans parallèles aux mêmes cordes et les diamètres conjugués à cordes pour les coniques considérées; la droite d'intersection des plans tangents aux extrémités d'une corde conjuguée quelconque. - 2) Le plan diamétral coupe la quadrique suivant une conique qui est la courbe de contact avec un cylindre circonscrit dont les génératrices sont conjuguées au plan diamétral. - 3) Un plan asymptote est parallèle à ses cordes conjuguées ou est rejeté à l'infini. - 4) Les plans diamétraux et les diamètres sont les plans et les droites passant par le centre de la quadrique. - 5) Si le centre est à distance finie, le cône circonscrit dont il est le sommet est l'enveloppe des plans asymptotes et s'appelle le cône asymptote. Ce cône a les mêmes systèmes de plans diamétraux conjugués et de diamètres conjugués que la quadrique. Lorsque la quadrique est un ellipsoïde, le cône asymptote est imaginaire et il est réel, si la quadrique est un hyperboloïde. - 6) Lorsque la quadrique est un paraboloïde, le centre est à l'infini, les diamètres sont parallèles entre eux et les plans diamétraux sont parallèles aux diamètres. - 7) Tout diamètre d'une quadrique est le lieu des centres des coniques déterminées sur les quadriques par les plans conjugués à ce diamètre et le lieu des sommets des cônes circonscrits suivant ces coniques; il coupe la quadrique aux points de contact des plans tangents parallèles aux plans conjugués. - 8) Tout diamètre d d'une quadrique est le support d'une feuillée involutive de plans diamétraux conjugués; cette involution est une involution singulière lorsque le diamètre d est une tangente à la quadrique et qu'ainsi il est parallèle à ses plans conjugués. Si le diamètre d n'est pas parallèle à un

plan conjugué, un quelconque δ de ceux-ci coupe la feuillée involutive des plans diamétraux conjugués dont la droite d est le support suivant le faisceau involutif des diamètres conjugués de la conique k intersection du plan δ et de la quadrique. Si le centre de la quadrique est à distance finie et si δ est un plan diamétral, deux diamètres conjugués quelconques d_1, d_2 de la conique k et la droite d forment ce qu'on appelle un système de diamètres conjugués de la quadrique; de même, les faces du trièdre $dd_1 d_2$ forment un système de plans diamétraux conjugués; ces plans et le plan de l'infini sont les faces d'un tétraèdre polaire.- 9) Quand tous les trièdres de diamètres conjugués sont trirectangles, toutes les sections faites dans la quadrique par les plans diamétraux sont des circonférences et la quadrique est une sphère. On obtient également une sphère comme lieu des points communs aux éléments homologues de deux gerbes réciproques lorsque ces éléments sont constamment perpendiculaires.

3° Axes et plans principaux.- 1) Définition. Tout diamètre perpendiculaire à ses plans conjugués est un axe de la quadrique. Tout axe d'une quadrique est donc un axe de symétrie de la quadrique.

2) Cas des paraboloïdes.- Théorème 1.- *Quand la quadrique est un paraboloïde, elle a un axe et n'en a qu'un seul.*

En effet, tous les diamètres d'un paraboloïde étant parallèles entre eux, le seul axe du paraboloïde est le diamètre conjugué aux plans parallèles qui sont perpendiculaires aux diamètres.

Plans principaux.- Cet axe est le support d'une feuillée involutive de plans diamétraux conjugués du paraboloïde. Si cette involution est rectangulaire, deux plans diamétraux conjugués quelconques menés par l'axe sont perpendiculaires, toute section plane perpendiculaire à l'axe est une circonférence dont le centre est sur l'axe et le paraboloïde est de révolution autour de son axe; les plans diamétraux menés par cette droite sont perpendiculaires à leurs cordes conjuguées, on les appelle les plans principaux du paraboloïde.- Si l'involution n'est pas rectangulaire, il n'y a que deux feuillets conjugués qui soient perpendiculaires et ces feuillets sont les seuls plans diamétraux perpendiculaires à leurs cordes conjuguées ou les seuls plans principaux du paraboloïde; on peut donc énoncer ce théorème: *Un paraboloïde n'a en général que deux plans principaux; ils sont perpendiculaires l'un à l'autre et ils se coupent suivant l'axe du paraboloïde; quand il y a plus de deux plans principaux, tout plan passant par l'axe est un plan principal et le paraboloïde est de révolution.*

3) Cas des ellipsoïdes et des hyperboloïdes.- On sait déjà que dans le cas où la quadrique est une sphère, chaque diamètre est perpendiculaire au plan diamétral conjugué et est un axe. Dans les autres cas, des considérations analogues à celles faites dans le cas du cône du second degré conduisent à ce théorème: *Tout ellipsoïde ou hyperboloïde possède trois axes formant un trièdre trirectangle de diamètres conjugués de la quadrique; les faces de ce trièdre forment un système de plans diamétraux conjugués et on les appelle les plans principaux de la quadrique. Ce n'est que si la quadrique est de révolution qu'elle possède une infinité de trièdres trirectangles d'axes et de plans principaux; ces trièdres ont une arête commune, l'axe de révolution, et une face commune, le plan diamétral conjugué à l'axe de révolution.*

4°. Equations des quadriques réelles déduites des propriétés diamétrales.-

1). Ellipsoïde rapporté à trois diamètres conjugués A_1A, B_1B, C_1C de longueurs $2a, 2b, 2c$.- Soit ODEM le contour des coordonnées x, y, z d'un point quelconque M de l'ellipsoïde. Le plan qui passe par M parallèlement au plan des xy coupe l'ellipsoïde suivant une

ellipse dont le centre O' est sur l'axe Oz et dont deux diamètres conjugués A'_1, A', B'_1, B' sont dans les plans xz, yz. En menant MP équipollent à ED, les ellipses A'OB', AOC, BOC donnent respectivement.

$$\frac{O'P^2}{O'A'^2} + \frac{PM^2}{O'B'^2} = 1, \qquad \frac{O'A'^2}{OA^2} + \frac{OO'^2}{OC^2} = 1, \qquad \frac{O'B'^2}{OB^2} + \frac{OO'^2}{OC^2} = 1$$

ou

$$\frac{x^2}{O'A'^2} + \frac{y^2}{O'B'^2} = 1, \qquad \frac{O'A'^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad \frac{O'B'^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

En éliminant les inconnues auxiliaires O'A', O'B', on obtient l'équation cherchée

(1) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

2) Hyperboloïdes rapportés à des diamètres conjugués. – Un hyperboloïde et son cône asymptote ayant les mêmes systèmes de plans diamétraux conjugués et de diamètres conjugués, on en conclut que; de trois diamètres conjugués d'un hyperboloïde, un est intérieur et deux sont extérieurs au cône asymptote. Le plan qui passe par le diamètre intérieur et un des diamètres extérieurs coupe l'hyperboloïde suivant une hyperbole dont les diamètres considérés sont deux diamètres conjugués et dont les asymptotes sont deux génératrices rectilignes du cône asymptote. Si cette hyperbole est intérieure au cône asymptote, on est dans le cas d'un hyperboloïde à deux nappes et on trouvera, par des raisonnements pareils à ceux faits pour l'ellipsoïde, que son équation est

(2) $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Lorsque l'hyperbole est extérieure au cône asymptote, l'hyperboloïde est à une nappe et on trouve que son équation est

(3) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

3) Equations des paraboloïdes. – On prend comme axe des z un diamètre quelconque du paraboloïde. Ce diamètre coupe le paraboloïde en un point impropre et en un point propre O. Le plan tangent au point O est parallèle aux plans conjugués du diamètre considéré. Ce diamètre est le support d'une feuillée involutive de plans diamétraux conjugués du paraboloïde. Si cette involution est elliptique, les sections faites dans le paraboloïde par les plans conjugués au diamètre Oz sont des ellipses ayant leurs centres sur le diamètre Oz, et ces sections sont des hyperboles lorsque l'involution est hyperbolique. On prend le plan tangent en O pour plan des xy et on prend comme plan des xz et yz deux plans diamétraux conjugués quelconques passant par l'axe Oz. Des raisonnements analogues à ceux qu'on a faits dans le cas de l'ellipsoïde conduisent aux équations

(4) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c}, \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c},$$ (5)

suivant que le paraboloïde est elliptique ou hyperbolique.

N.B. – Les équations (1) à (5) prouvent encore qu'il y a identité entre les quadriques réelles de la géométrie projective et celles de la géométrie analytique.

Notes: I Triangles homologiques placés dans le même plan.

147. 1° Définition. – Deux triangles placés dans le même plan sont dits homolo-

giques lorsque leurs sommets et leurs côtés se correspondent chacun à chacun de telle façon que les côtés correspondants se coupent en trois points en ligne droite (axe d'homologie) et que les droites joignant les sommets correspondants passent par un même point (centre d'homologie).

2° Théorème. Pour que deux triangles placés dans le même plan soient homologiques, il suffit que les côtés correspondants se coupent en trois points situés en ligne droite.

Soient ABC ≡ abc, A'B'C' ≡ a'b'c' deux triangles placés dans le même plan ϖ et dont les côtés a et a', b et b', c et c' se coupent en trois points A", B", C" situés sur une même droite d. Ces triangles sont des figures homologues dans deux systèmes plans collinéaires ayant le plan ϖ pour support commun et dont la collinéation est assurée par les quatre couples de droites homologues a et a', b et b', c et c' d et d. Mais les points A", B", C" sont trois points doubles de cette collinéation; la droite d est donc le support d'une ponctuelle double et la collinéation se réduit à une perspectivité. Les points A et A', B et B', C et C' étant trois couples de points correspondants, le centre de perspectivité doit se trouver sur les droites AA', BB', CC'; ces droites sont donc concourantes.

3° Théorème. Pour que deux triangles placés dans le même plan soient homologiques, il suffit que les sommets correspondants soient sur trois droites concourantes.

Soient ABC ≡ abc, A'B'C' ≡ a'b'c' deux triangles placés dans le même plan ϖ et dont les sommets A et A', B et B', C et C' sont sur trois droites a", b", c" passant par un même point D. Ces triangles sont des figures homologues de deux systèmes plans collinéaires ayant le plan ϖ pour support commun et dont la collinéation est assurée par les quatre couples A et A', B et B' C et C', D et D de points homologues. Mais les droites a", b", c" sont des droites doubles de cette collinéation, le point D est le support d'un faisceau double et la collinéation se réduit à une perspectivité. Les droites a et a', b et b', c et c' étant trois couples de droites correspondantes, l'axe de perspectivité doit contenir les points aa', bb', cc': ces points sont donc en ligne droite.

4° Corollaires. 1) Quand les côtés d'un triangle variable tournent dans un plan autour de trois points en ligne droite et que deux sommets glissent sur deux droites fixes, le troisième sommet glisse aussi sur une droite fixe passant par le point de concours des deux autres droites fixes.

2) Quand les sommets d'un triangle variable glissent sur trois droites concourantes d'un même plan et que deux côtés passent par deux points fixes, le troisième côté passe par un point fixe en ligne droite avec les deux autres points fixes.

148. 1° Théorème. Lorsque trois points sont en ligne droite sur les côtés d'un triangle, les droites qui joignent les conjuguées harmoniques de ces points sur les côtés correspondants aux sommets opposés, se coupent en un même point.

Soient A', B', C' les points d'intersection des côtés du triangle ABC par la droite d; A", B", C" les conjugués harmoniques de ces points par rapport aux points B et C, C et A, A et B. Les quatre points B, C, A', A" formant un groupe harmonique, il en est de même des droites qui les projettent du point B' et des points où ces droites coupent la droite AB. La droite A"C" passe donc par le point B', la droite B"A" passe par le point C' et la droite C"B" passe par le point A'. La droite A'B'C' est donc l'axe d'homologie des triangles ABC, A"B"C" et, ces triangles étant homologiques, les droites AA", BB", CC" se coupent en un même point D.

2° Théorème. - Réciproquement, si trois droites issues des sommets d'un triangle

se coupent en un même point dans le plan du triangle, les conjuguées harmoniques de ces droites dans les angles du triangle coupent les côtés opposés en trois points en ligne droite.

3° Remarque. La droite d est la polaire du point D et celui-ci est le pôle de la droite d par rapport au triangle ABC.

4° Corollaires. 1) Les médianes d'un triangle se coupent en un même point qui est le pôle de la droite de l'infini par rapport au triangle. 2) Les bissectrices des angles d'un triangle coupent les côtés opposés en des points qui, trois par trois, sont sur les polaires par rapport au triangle des centres des circonférences tritangentes.

5° N.B. sur le 1°. Il résulte des propriétés involutives du quadrilatère complet que les circonférences α, β, γ décrites sur les segments rectilignes $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ comme diamètres passent par deux points F, G et que les milieux A_1, B_1, C_1 de ces trois segments rectilignes sont sur une même droite, la médiatrice de FG. – Quand A' et A'', B' et B'', C' et C'' sont les pieds des bissectrices, les circonférences α, β, γ s'appellent les circonférences d'Apollonius du triangle, elles passent respectivement par les points A, B, C et les points F, G s'appellent les centres isodynamiques du triangle; les distances de chacun de ces points aux sommets du triangle sont inversement proportionnelles aux côtés opposés. Les points A_1, B_1, C_1 sont les points où les tangentes en A, B, C au cercle ABC coupent les côtés du triangle et la droite contenant ces trois points est la polaire du point de Lemoine K du triangle, à la fois par rapport au triangle et au cercle circonscrit. Si O et R sont le centre et le rayon de ce cercle on a

$$OA_1^2 - A_1A^2 = OB_1^2 - B_1B^2 = OC_1^2 - C_1C^2 = R^2,$$

et le point O ayant la même puissance par rapport aux circonférences α, β, γ est sur leur axe radical EF. Il en est de même du point K, parce que la droite OK est perpendiculaire à la droite des centres A_1, B_1, C_1 des trois circonférences.

II. Points et transversales inverses ou réciproques par rapport à un triangle. –

149. – 1° Théorème. *Si trois droites issues des sommets d'un triangle se coupent en un même point du plan du triangle, leurs isogonales sont concourantes.*

Soient a_1, b_1, c_1 les droites joignant les sommets A, B, C du triangle ABC au point D_1 situé dans le plan du triangle. Les isogonales a_2, b_2, c_2 des droites a_1, b_1, c_1 sont les conjuguées de ces droites dans les faisceaux involutifs dont les supports sont les sommets du triangle et dont les rayons doubles sont les bissectrices des angles du triangle. Dès lors, le théorème résulte de ce que ces faisceaux involutifs sont associés aux sommets du triangle.

2° Définition. Les points D_1 et D_2 où se coupent les droites a_1, b_1, c_1 et a_2, b_2, c_2 sont appelés des points inverses par rapport au triangle ABC. Ils sont les foyers d'une conique inscrite au triangle, leurs distances aux côtés du triangle sont inversement proportionnelles et leurs projections sur les côtés du triangle sont six points d'une circonférence dont le centre est le milieu de leur distance.

3° Corollaire. *Les hauteurs d'un triangle sont concourantes.*

En effet, elles sont les isogonales des rayons du cercle circonscrit aboutissant aux sommets du triangle. –

N.B. On déduit de là la propriété servant de définition au cercle des neuf points.

4° Théorème. *Si trois points des côtés d'un triangle sont en ligne droite, il en est de même des points isogonaux.*

Soient A_1, B_1, C_1 les points d'intersection des côtés d'un triangle par une droite d. Les points isogonaux A_2, B_2, C_2 des points A_1, B_1, C_1 sont les conjugués de ces points dans des ponctuelles involutives dont les supports sont les côtés du triangle et dont les points doubles sont les pieds des bissectrices. Dès lors, le théorème résulte de ce que ces ponctuelles involutives sont associées sur les côtés du triangle.

5° Définition. Les droites d_1, d_2 contenant les points A_1, B_1, C_1 et A_2, B_2, C_2 sont appelées des transversales inverses par rapport au triangle ABC.

6° Théorème. *Si deux droites sont des transversales inverses, leurs pôles par rapport au triangle sont des points inverses.*

Cette propriété résulte de ce que les isogonales des droites formant un groupe harmonique avec les côtés de l'angle considéré, forment également un groupe harmonique avec les côtés de l'angle.

150. 1° Théorème. *Si trois droites issues des sommets d'un triangle sont concourantes, leurs isotomiques sont concourantes.*

2° **Théorème**. Si trois points des côtés d'un triangle sont en ligne droite, il en est de même des points isotomiques.
Les théorèmes se démontrent à l'aide de trois involutions associées sur les côtés du triangle dont chacune est une symétrie par rapport au milieu du côté correspondant.

3° **Définition**. – Les points où se coupent les deux systèmes de trois droites considérées au 1° et les droites sur lesquelles se trouvent les deux systèmes de trois points considérés au 2° s'appellent des points réciproques et des transversales réciproques par rapport au triangle.

4° **Théorème**. – Si deux droites sont des transversales réciproques, leurs pôles par rapport au triangle sont des points réciproques. –

151. 1° 1) **Théorème**. Le lieu des points inverses ou réciproques des points d'une droite quelconque par rapport à un triangle est une conique circonscrite au triangle, et réciproquement.
Soient ABC le triangle considéré; d une droite quelconque du plan du triangle; P un point mobile sur la droite d; P' le point inverse ou réciproque du point P par rapport au triangle ABC. Les faisceaux engendrés par les droites AP', BP', CP' sont respectivement projectifs à ceux engendrés par les droites AP, BP, CP. Ceux-ci étant perspectifs à la ponctuelle d (P) sont projectifs les uns aux autres; il en est de même de ceux engendrés par les droites AP', BP', CP'. Lorsque la droite AP' coïncide avec la droite AB, la droite AP est sur la droite AC; le point P est le point B' où la droite d coupe la droite AC. La droite d étant une droite quelconque, le point B' est différent du point C, la droite BP' est une droite t_B différente de BA et passant par B, le point P' coïncide avec le point B. Les faisceaux projectifs décrits par les droites AP', BP' n'étant pas perspectifs, le lieu du point P' est une conique δ circonscrite au triangle et tangente à la droite t_B au point B.

2) N.B.[1] – Lorsque la droite d passe par un sommet du triangle, la conique δ dégénère en deux droites dont l'une passe par le sommet considéré et dont l'autre est le côté opposé. Lorsque la droite d est un côté du triangle, la conique δ est formée des deux autres côtés du triangle.

3) N.B.[2] Dans le cas général, les tangentes t_A, t_B, t_C à la conique δ aux points A, B, C coupent les côtés opposés du triangle en des points situés sur la transversale inverse ou réciproque de la droite d.

2° **Théorème**. – L'ensemble des transversales inverses ou réciproques des droites issues d'un point quelconque dans le plan du triangle sont les rayons d'un faisceau de second degré ayant pour support une conique inscrite au triangle, et réciproquement.
La démonstration de ce théorème et les cas de dégénérescence se déduisent de ce qui précède par une réciprocité quelconque entre deux systèmes plans. Dans le cas général, les droites qui joignent les sommets du triangle aux points où la conique touche les côtés opposés se coupent au point inverse ou réciproque du point par où passent les transversales inverses ou réciproques des tangentes de la conique.

Errata

– p. 2, l. 4, au lieu de $F = F.T_1$, il faut $F = F.T$.
p. 4, les formules (10) et (11) doivent être remplacée par les suivantes

$$(10) \quad X'_1 = (aa' + bc')X''_1 + (ab' + bd')X''_2, \qquad X'_2 = (ca' + dc')X''_1 + (cb' + dd')X''_2$$

et

$$(11) \qquad \begin{vmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ c'a' + dc' & cb' + dd' \end{vmatrix} = DD' \neq 0.$$

p. 11, la formule (2) doit être $D = |a_{11} \; a_{22} \; a_{33} \; a_{44}| \neq 0$.
p. 21, l. 8 et 9, au lieu de systèmes homologues, il faut systèmes plans collinéaires
p. 29, l. 8, alinéa 2, au lieu de centre, il faut plan.
p. 41, l. 8 au lieu de réelles, il faut imaginaires, et au lieu de n'ont pas, il faut ont.
p. 63, l. 18 du bas, au lieu de D, il faut C.

Table des Matières.

Errata faisant suite à ceux de la page 175 du Tome II de Géométrie projective. —

Pages	Lignes				
108,	12,	remplacer	$XY', X'Y$	par	$xy', x'y$
114,	20,	"	Y, Z	"	X, Y
116,	20,	"	donne	"	donne un point
118,	6,	"	$d_1 d_2$	"	$d d_2$
118,	11 du bas,	"	(N, M, E, F)	"	(N, H, E, F)
122,	15,	"	AB'	"	BD'
124,	4 du bas,	"	b	"	d
126,	16,	"	X_1	"	X'
127,	14,	"	des limites	"	distinctes
128,	4 du bas }	"	F'	"	F_1
129,	4 },				
133,	11,	"	π	"	$\frac{1}{4}\pi$
134,	6,	"	$OD=, OD_1=$	"	$OC=, OC_1=$
138,	20,	"	$2p.CD$	"	$2p.OF$
138,	10 du bas,	"	polaire	"	podaire
141,	14 du bas,	"	polaires	"	podaires
142,	24 du bas,	"	directrices	"	directions
144,	16 du bas,	"	plan diamétral	"	diamètre
153,	17 et 20 du bas,	"	parallèle	"	perpendiculaire
155,	10 du bas,	"	hyperboles	"	hyperboles équilatères
156,	19 du bas }	"	conjuguées	"	conjugués
157,	5 },				
168,	18 et 19 du bas,	"	$A(a)$	"	$P(a)$

118, ajouter, après la ligne 4, : "Corollaire. Si F et F_1, G et G_2 sont deux couples de points conjugués des involutions données sur les droites d_1, d_2, les droites FG et F_1G_2, FG_2 et F_1G coupent la droite b en deux couples de points conjugués de l'involution déterminée sur cette droite par les coniques du faisceau."

p. 118, remplacer à partir de : "D'autre part" de ligne 3 du bas jusque "G, H" à la ligne 4 de la page 119, par : "D'autre part, il résulte du corollaire énoncé plus haut que les droites GH_2, G_1H coupent la droite b en des points où viendront les points C, D; les points M, N coïncident alors avec les points G, H;".

Cours de la Faculté des Sciences de l'Université Libre de Bruxelles

AD. MINEUR



Géométrie Projective

(NOUVELLE ÉDITION)

III

BRUXELLES
J. VAN DIJL, Libraire-Editeur, rue des Etudiants, 38
ET
ANCIENNE LIBRAIRIE CASTAIGNE, rue Montagne aux Herbes Potagères, 22



Cours de la Faculté des Sciences de l'Université Libre de Bruxelles

AD. MINEUR



Géométrie Projective

(NOUVELLE ÉDITION)

III

BRUXELLES
J. VAN DIJL, LIBRAIRE-EDITEUR, rue des Etudiants, 38
ET
ANCIENNE LIBRAIRIE CASTAIGNE, rue Montagne aux Herbes Potagères, 22

Chapitre I : Formes fondamentales de seconde ou de troisième espèce projectives, de même nom et de même support.

§ I. Formes fondamentales de seconde espèce.

A. Collinéation quelconque.

1. **Recherche des éléments doubles.** Pour fixer les idées, on considère deux systèmes plans superposés rapportés aux mêmes coordonnées ternaires, entre lesquels existe une collinéation dont les équations sont

(1) $$X'_i = a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + a_{i3}X_3 \qquad \text{ou} \qquad x_i = a_{1i}x'_1 + a_{2i}x'_2 + a_{3i}x'_3, \qquad (2)$$
pour $i = 1,2,3$, avec la condition

(3) $$D = |a_{11} \quad a_{22} \quad a_{33}| \neq 0.$$

Les points homologues X, X' seront confondus et formeront un point double de la collinéation, si leurs coordonnées sont proportionnelles. La détermination des points doubles se ramène donc à la recherche d'un nombre non nul, k, rendant compatibles les équations

(4) $$\begin{aligned} (a_{11}-k)X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 &= 0, \\ a_{21}X_1 + (a_{22}-k)X_2 + a_{23}X_3 &= 0, \\ a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + (a_{33}-k)X_3 &= 0. \end{aligned}$$

Les valeurs de k répondant à la question sont les racines de l'équation du troisième degré (dite l'équation en k)

(5) $$D(k) = \begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-k & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-k \end{vmatrix} = 0$$

et cette équation est aussi la condition de compatibilité des équations aux droites doubles

(6) $$\begin{aligned} (a_{11}-k)x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 &= 0, \\ a_{12}x_1 + (a_{22}-k)x_2 + a_{32}x_3 &= 0, \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + (a_{33}-k)x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Il résulte de la condition (3) ou $D(0) \neq 0$ que les trois racines de l'équation en k sont différentes de zéro.

2. **Théorème.** *Les valeurs des racines de l'équation en k ne sont pas altérées par une transformation des coordonnées ternaires.*

Si on effectue la transformation de coordonnées définie par les formules

$$X_i = b_{i1}X_{01} + b_{i2}X_{02} + b_{i3}X_{03},$$

pour $i = 1,2,3$; avec la condition

$$\Delta = |b_{11} \quad b_{22} \quad b_{33}| \neq 0,$$

les équations (1) deviennent

$$b_{i1}X'_{01} + b_{i2}X'_{02} + b_{i3}X'_{03} = (a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21} + a_{i3}b_{31})X_{01} + (a_{i1}b_{12} + a_{i2}b_{22} + a_{i3}b_{32})X_{02} + (a_{i1}b_{13} + a_{i2}b_{23} + a_{i3}b_{33})X_{03}.$$

Les équations aux points doubles dans le nouveau système de coordonnées sont

$$(a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21} + a_{i3}b_{31} - b_{i1}k)X_{01} + (a_{i1}b_{12} + a_{i2}b_{22} + a_{i3}b_{32} - b_{i2}k)X_{02} + (a_{i1}b_{13} + a_{i2}b_{23} + a_{i3}b_{33} - b_{i3}k)X_{03} = 0,$$
dont la condition de compatibilité est

$$\Delta . D(k) = 0 \qquad \text{ou} \qquad D(k) = 0,$$

puisque Δ n'est pas nul.

3. **Théorème.** – *Quand deux éléments doubles de même nom correspondent à deux racines inégales*

de l'équation en k, ils sont différents l'un de l'autre.
Si les racines inégales k_1, k_2 de l'équation en k correspondaient à un même point double X, on aurait

$$a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + a_{i3}X_3 = k_1 X_i \qquad \text{et} \qquad a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + a_{i3}X_3 = k_2 X_i$$

pour $i = 1,2,3$; on en tirerait

$$(k_1 - k_2) X_i = 0$$

ou

$$X_1 = X_2 = X_3 = 0 ,$$

ce qui est absurde.

4. **Théorème.** *Quand deux éléments doubles de noms différents correspondent à deux racines inégales de l'équation en k, ils appartiennent l'un à l'autre.*

Soient k_1, k_2 les racines considérées ; X un point double correspondant à k_1 ; x une droite double correspondant à k_2. Les équations $(i = 1, 2, 3)$

$$a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + a_{i3}X_3 = k_1 X_i \qquad \text{et} \qquad a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 + a_{3i}x_3 = k_2 x_i$$

donnent respectivement

$$\Sigma x_i (a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + a_{i3}X_3) = k_1 \Sigma x_i X_i \qquad \text{et} \qquad \Sigma X_i (a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 + a_{3i}x_3) = k_2 \Sigma x_i X_i$$

Mais on a identiquement

$$\Sigma x_i (a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + a_{i3}X_3) = \Sigma X_i (a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 + a_{3i}x_3).$$

Il en résulte que

$$(k_1 - k_2) \Sigma x_i X_i = 0 ;$$

k_1 étant différent de k_2, on a donc

$$\Sigma x_i X_i = 0$$

et le point X est sur la droite x.

5° **Théorème.** *Si le point double A et la droite double a correspondent à une même racine simple k_1 de l'équation en k, le point A n'est pas sur la droite a.*

En prenant le point A comme premier point fondamental des coordonnées ternaires, il résulte des équations (4) qu'on doit faire

$$a_{11} = k_1 , \qquad a_{21} = 0, \qquad a_{31} = 0.$$

Les équations (6) aux droites doubles se réduisent à

$$(k_1 - k) x_1 = 0, \qquad a_{12}x_1 + (a_{22} - k) x_2 + a_{32}x_3 = 0, \qquad a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + (a_{33} - k) x_3 = 0.$$

Les coordonnées a_1, a_2, a_3 de la droite a devant vérifier ces équations pour $k = k_1$, on a identiquement

(7) $$a_{12}a_1 + (a_{22} - k_1) a_2 + a_{32}a_3 = 0 , \quad a_{13}a_1 + a_{23}a_2 + (a_{33} - k_1) a_3 = 0.$$

Si la droite a passait par le point A, sa coordonnée a_1 serait nulle, on devrait avoir

(8) $$\begin{vmatrix} a_{22} - k_1 & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} - k_1 \end{vmatrix} = 0$$

et k_1 serait une racine multiple de l'équation en k devenue ici

(9) $$D(k) = (k - k_1) \begin{vmatrix} a_{22} - k & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} - k \end{vmatrix} = 0.$$

6. **Théorème.** *Si le point double A correspond à une racine multiple k_1 de l'équation en k, il existe au moins une droite double qui passe par le point A et correspond à la même valeur de k.*

En conservant les notations employées dans la démonstration du théorème précédent, la condition (8) est vérifiée, car k_1 est une racine multiple de l'équation en k, et parmi les solutions en a_1, a_2, a_3 des équations (7), il y en a au moins une pour laquelle $a_1 = 0$.

7. **Théorème.** *A une racine simple k_1 de l'équation en k, ne correspondent qu'un seul point double et une seule droite double.*

En effet, k_1 étant une racine simple de l'équation en k, on a

$$D'(k_1) \neq 0 \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} a_{11}-k_1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-k_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22}-k_1 & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}-k_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}-k_1 & a_{13} \\ a_{31} & a_{33}-k_1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

on peut supposer

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k_1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-k_1 \end{vmatrix} \neq 0$$

et quand on remplace k par k_1, les deux premières équations de chacun des systèmes (4) ou (6) sont distincts; les deux premières équations du système (4) représentent deux droites différentes dont le point de rencontre est le seul point double correspondant à k_1; de même, les deux premières équations du système (6) représentent deux points différents et la droite joignant ces deux points est la seule droite double correspondant à k_1.

8. 1° **Corollaire.** *Quand les trois racines de l'équation en k sont simples, il y a trois points doubles et trois droites doubles qui sont les sommets et les côtés d'un triangle avec la condition que chaque sommet et le côté opposé correspondent à une même valeur de k.*

2° **Remarque.** En prenant le triangle des éléments doubles comme triangle fondamental des coordonnées ternaires, si k_1, k_2, k_3 sont les valeurs de k, les équations de la collinéation sont

(A) $$X'_1 = k_1 X_1, \qquad X'_2 = k_2 X_2, \qquad X'_3 = k_3 X_3$$

et

(A') $$x_1 = k_1 x'_1, \qquad x_2 = k_2 x'_2, \qquad x_3 = k_3 x'_3.$$

9. **Problème.** *Déterminer les éléments doubles de la collinéation lorsque l'équation en k a une racine simple k_1 et une racine double k_2.*

On peut supposer que les éléments A et a, B et c du triangle fondamental $ABC \equiv abc$ des coordonnées ternaires correspondent respectivement aux racines k_1 et k_2. Les équations aux points doubles et aux droites doubles se réduisent à

$$(k_1-k)X_1=0, \qquad (k_2-k)X_2+a_{23}X_3=0, \qquad (k_2-k)X_3=0$$

et

$$(k_1-k)x_1=0, \qquad (k_2-k)x_2=0, \qquad a_{23}x_2+(k_2-k)x_3=0.$$

En faisant $k=k_1$, on retrouve le point A et la droite a.

En faisant $k=k_2$, on a

$$X_1=0 \text{ avec } a_{23}X_2=0 \qquad \text{et} \qquad x_1=0 \text{ avec } a_{23}x_2=0.$$

Deux cas sont à distinguer. 1° $a_{23}=0$. Tous les points de la ponctuelle a et toutes les droites du faisceau A sont les éléments doubles correspondant à k_2. Les équations de la collinéation deviennent

(B) $$X'_1 = k_1 X_1, \qquad X'_2 = k_2 X_2, \qquad X'_3 = k_2 X_3$$

et

(B') $$x_1 = k_1 x'_1, \qquad x_2 = k_2 x'_2, \qquad x_3 = k_2 x'_3.$$

La collinéation se réduit à une perspectivité de centre A et d'axe a. Au quatrième point fondamental des coordonnées ternaires D (1,1,1), correspond le point $D'(k_1, k_2, k_3)$. La valeur de la constante de pers-

pectivité est donc

$$B(A,C,D,D') = k_1 : k_2$$

et la perspectivité est harmonique si $k_1 = -k_2$.

2° $a_{23} \neq 0$. Le point B et la droite c sont les seuls éléments doubles relatifs à k_2. Les équations (1) de la collinéation entre les points X, X' sont devenues

$$X'_1 = k_1 X_1, \qquad X'_2 = k_2 X_2 + a_{23} X_3, \qquad X'_3 = k_2 X_3.$$

Lorsque le point X coïncide avec le point $C(0,0,1)$, le point X' est un point $C'(0, a_{23}, k_2)$ différent des points B, C sur la droite a. En mettant le quatrième point fondamental des coordonnées ternaires sur la droite CC', on doit faire

$$a_{23} = k_2$$

et les équations de la collinéation s'écrivent

(C) $$X'_1 = k_1 X_1, \qquad X'_2 = k_2(X_2 + X_3), \qquad X'_3 = k_2 X_3$$

et

(C') $$x_1 = k_1 x'_1, \qquad x_2 = k_2 x'_2, \qquad x_3 = k_2(x'_2 + x'_3).$$

10. Problème. Déterminer les éléments doubles lorsque l'équation en k a une racine triple k_1.

On peut supposer que le sommet A et le côté b du triangle fondamental des coordonnées ternaires sont des éléments doubles obtenus pour $k = k_1$. Les équations aux éléments doubles deviennent

$$(k_1 - k) X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3 = 0, \qquad (k_1 - k) X_2 = 0, \qquad a_{32} X_2 + (k_1 - k) X_3 = 0$$

et

$$(k_1 - k) x_1 = 0, \qquad a_{12} x_1 + (k_1 - k) x_2 + a_{32} x_3 = 0, \qquad a_{13} x_1 + (k_1 - k) x_3 = 0.$$

En faisant $k = k_1$, ces équations se réduisent à

$$a_{12} X_2 + a_{13} X_3 = 0 \text{ avec } a_{32} X_2 = 0 \qquad \text{et} \qquad a_{12} x_1 + a_{32} x_3 = 0 \text{ avec } a_{13} x_1 = 0.$$

Trois cas sont à distinguer. 1° Les équations aux points doubles se réduisent à des identités; on a donc

$$a_{12} = a_{13} = a_{32} = 0$$

et les équations aux droites doubles se réduisent également à des identités.

Dans ce cas, les équations de la collinéation sont

(D) $$X'_1 = k_1 X_1, \qquad X'_2 = k_1 X_2, \qquad X'_3 = k_1 X_3$$

et

(D') $$x_1 = k_1 x'_1, \qquad x_2 = k_1 x'_2, \qquad x_3 = k_1 x'_3.$$

On a donc

$$X'_1 : X'_2 : X'_3 = X_1 : X_2 : X_3, \qquad x_1 : x_2 : x_3 = x'_1 : x'_2 : x'_3$$

et la collinéation se réduit à la transformation identique.

2° Les équations aux points doubles se réduisent à une seule. Il y a une infinité de points doubles sur une droite issue du point A; cette droite est nécessairement une droite double et on peut supposer qu'elle est précisément la droite b. On doit faire

$$a_{13} = 0 \qquad \text{avec} \qquad a_{12} \text{ ou } a_{32} \neq 0.$$

Mais les équations aux droites doubles se réduisent à la seule équation

$$a_{12} x_1 + a_{32} x_3 = 0$$

et il y a une infinité de droites doubles passant par le point $(a_{12}, 0, a_{32})$. Ce point étant un point double situé sur la droite b, on peut supposer qu'il coïncide avec le point A, ce qui permet de faire $a_{12} \neq 0$ et $a_{32} = 0$. Les équations de la collinéation entre les points X, X' deviennent ainsi

$$X'_1 = k_1 X_1 + a_{12} X_2, \qquad X'_2 = k_1 X_2, \qquad X'_3 = k_1 X_3.$$

Lorsque le point X coïncide avec le point $B(0,1,0)$, le point X' est un point $B'(a_{12}, k_1, 0)$ différent des points A, B de la droite c. En mettant le quatrième point fondamental des coordonnées ternaires sur la droite CB', on doit faire

$$a_{12} = k;$$

les équations de la collinéation s'écrivent

(E) $$X'_1 = k_1(X_1 + X_2), \qquad X'_2 = k_1 X_2, \qquad X'_3 = k_1 X_3$$

et

(E') $$x_1 = k_1 x'_1 \qquad x_2 = k_1(x'_1 + x'_2), \qquad x_3 = k_1 x'_3.$$

Cette collinéation est une perspectivité de centre A et d'axe b.

3° Les équations aux points doubles sont distinctes. On a

$$a_{13} \neq 0 \qquad \text{et} \qquad a_{32} \neq 0,$$

de sorte que les équations aux droites doubles sont aussi des équations distinctes. Le point A et la droite b sont les seuls éléments doubles de la collinéation.

Les équations de la collinéation entre les points X, X' sont devenues

$$X'_1 = k_1 X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3, \qquad X'_2 = k_1 X_2, \qquad X'_3 = a_{32} X_2 + k_1 X_3.$$

A la droite

$$X'_1 = 0,$$

correspond la droite

$$k_1 X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3 = 0,$$

qui ne passe ni par le point A, ni par le point C; mais on peut supposer que cette droite passe par le point B, ce qui permet de faire

$$a_{12} = 0.$$

Lorsque le point X coïncide avec le point $B(0,1,0)$, le point X' devient le point $B'(0, k_1, a_{32})$ et en mettant le quatrième point fondamental des coordonnées ternaires sur la droite AB', on doit faire

$$a_{32} = k_1.$$

De même, lorsque le point X coïncide avec le point $C(0,0,1)$, le point X' devient le point $C'(a_{13}, 0, k_1)$; en mettant le quatrième point fondamental des coordonnées ternaires sur la droite BC', ce qui achève de le déterminer, on doit faire

$$a_{13} = k_1,$$

et les équations de la collinéation deviennent

(F) $$X'_1 = k_1(X_1 + X_3), \qquad X'_2 = k_1 X_2, \qquad X'_3 = k_1(X_2 + X_3)$$

et

(F') $$x_1 = k_1 x'_1, \qquad x_2 = k_1(x'_2 + x'_3), \qquad x_3 = k_1(x'_1 + x'_3).$$

11. **Conclusion.** Quand deux formes fondamentales de seconde espèce superposées sont collinéaires, six cas sont à distinguer d'après le nombre et la disposition des éléments doubles; ces six cas sont caractérisés par les six systèmes d'équations de (A) et (A') à (F) et (F'), les valeurs de k affectées d'indices différents dans un même système d'équations ayant des valeurs différentes.

B. Collinéation involutive.

12. 1° **Définition.** Quand deux formes fondamentales de seconde espèce sont superposées, on dit qu'il y a involution si les éléments homologues se correspondent doublement ou sont permutables entre eux. Dans ce cas, on considère les deux formes comme n'en faisant qu'une seule dite involutive ou

en involution par collinéation et les éléments appelés d'abord des éléments homologues sont dits des éléments conjugués.

2° Théorème. *La seule collinéation involutive possible entre formes fondamentales de seconde espèce est la perspectivité harmonique, c'est-à-dire, la perspectivité dont la constante est égale à -1.*

Ce théorème pourrait se déduire de l'examen de l'ensemble des équations écrites dans la théorie précédente ; mais on peut le démontrer directement. Pour fixer les idées, on suppose que les formes données dans deux systèmes plans collinéaires de même support déterminent une involution dans laquelle

$$X \equiv Y' \text{ et } Y \equiv X', \qquad Z \equiv T' \text{ et } T \equiv Z'$$

sont deux couples de points conjugués n'appartenant pas à une même ponctuelle. Ces points sont les sommets d'un quadrangle dont les points diagonaux

$$S \equiv S' \equiv (XY, ZT) \equiv (X'Y', Z'T'),\ U \equiv U' \equiv (XZ, YT) \equiv (X'Z', Y'T'),\ V \equiv V' \equiv (XT, YZ) \equiv (X'T', Y'Z')$$

sont des points doubles de la collinéation donnée. Les droites $SX \equiv S'X'$, $SZ \equiv S'Z'$, $SU \equiv S'U'$, $SV \equiv S'V'$ étant quatre droites doubles, les faisceaux projectifs S, S' se confondent en un faisceau double, les deux systèmes plans sont perspectifs et le point $S \equiv S'$ est le centre de perspectivité ; l'axe de perspectivité coïncide avec la droite double

$$s \equiv s' \equiv UV \equiv U'V'$$

qui ne passe pas par le centre de perspectivité ; la constante de perspectivité est la valeur du rapport anharmonique des quatre points

$$S \equiv S', \qquad P \equiv P' \equiv (s, SX) \equiv (s, S'X'), \qquad X, \quad X',$$

elle est donc égale à -1 et la collinéation se réduit à une perspectivité harmonique.

C. Réciprocité quelconque.

13. 1° Pour fixer les idées, on considère deux systèmes plans superposés ϖ, ϖ' rapportés aux mêmes coordonnées ternaires et on établit entre ces systèmes plans une réciprocité dont les équations sont, pour $i = 1, 2, 3$,

$$(1) \qquad x'_i = a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + a_{i3}X_3 \qquad \text{ou} \qquad DX_i = \alpha_{1i}x'_1 + \alpha_{2i}x'_2 + \alpha_{3i}x'_3 \qquad (2)$$

ou

$$(3) \qquad x_i = a_{1i}X'_1 + a_{2i}X'_2 + a_{3i}X'_3 \qquad \text{ou} \qquad DX'_i = \alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \alpha_{i3}x_3 \qquad (4)$$

avec la condition

$$(5) \qquad D = |a_{11} \quad a_{22} \quad a_{33}| \neq 0$$

et sachant que α_{ij} est le mineur de a_{ij} dans D.

2° Problème. *Déterminer les points de chaque système plan qui sont sur les droites homologues dans l'autre système plan et les droites de chaque système plan qui passent par les points homologues dans l'autre système plan.*

Pour que les points X, X' soient sur les droites x, x' auxquelles ils correspondent respectivement, il faut et il suffit qu'on ait

$$x'_1X_1 + x'_2X_2 + x'_3X_3 = 0 \qquad \text{et} \qquad x_1X'_1 + x_2X'_2 + x_3X'_3 = 0$$

ou, en vertu des équations (1), (2), (3), (4),

$$\Sigma a_{ij}X_iX_j = 0, \qquad \Sigma a_{ij}X'_iX'_j = 0, \qquad \Sigma \alpha_{ij}x_ix_j = 0, \qquad \Sigma \alpha_{ij}x'_ix'_j = 0.$$

Les points considérés X, X' sont donc les points de deux ponctuelles du second degré ayant le même support d'équation, en coordonnées courantes X_i,

(6) $$a_{11}X_1^2 + a_{22}X_2^2 + a_{33}X_3^2 + (a_{23}+a_{32})X_2X_3 + (a_{31}+a_{13})X_3X_1 + (a_{12}+a_{21})X_1X_2 = 0,$$

et les droites considérées x, x' sont les droites de deux faisceaux du second degré ayant le même support d'équation, en coordonnées courantes x_i,

(7) $$\alpha_{11}x_1^2 + \alpha_{22}x_2^2 + \alpha_{33}x_3^2 + (\alpha_{23}+\alpha_{32})x_2x_3 + (\alpha_{31}+\alpha_{13})x_3x_1 + (\alpha_{12}+\alpha_{21})x_1x_2 = 0.$$

Si ces équations se réduisaient à des identités, le déterminant D serait un déterminant symétrique gauche et il serait nul. Cette hypothèse doit donc être écartée et comme la ponctuelle du second degré trouvée dans l'un des système plans est la transformée du faisceau du second degré trouvé dans l'autre système plan, il y a trois cas à distinguer selon que les équations (6) et (7) représentent deux droites confondues et deux points confondus, deux droites distinctes et deux points distincts, ou des coniques non dégénérées.

14. **Premier cas:** Les équations (6) et (7) représentent deux droites confondues et deux points confondus. On peut supposer que les droites représentées par l'équation (6) coïncident avec le côté BC du triangle fondamental des coordonnées ternaires, et, en outre, que les points représentés par l'équation (7) coïncident avec le sommet A de ce triangle. Les équations se réduisent ainsi à

$$X_1^2 = 0 \quad \text{et} \quad x_1^2 = 0,$$

on a, à la fois

$$a_{11} \neq 0, \qquad a_{22} = a_{33} = a_{23} + a_{32} = a_{31} + a_{13} = a_{12} + a_{21} = 0,$$

$$\alpha_{11} \neq 0, \qquad \alpha_{22} = \alpha_{33} = \alpha_{23} + \alpha_{32} = \alpha_{31} + \alpha_{13} = \alpha_{12} + \alpha_{21} = 0;$$

on en déduit

$$a_{12} = a_{21} = a_{13} = a_{31} = 0, \qquad a_{23} = -a_{32} \neq 0$$

et les équations de la réciprocité se réduisent donc à

(A) $$x'_1 = a_{11}X_1, \qquad x'_2 = a_{23}X_3, \qquad x'_3 = -a_{23}X_2$$

ou

(A') $$x_1 = a_{11}X'_1, \qquad x_2 = -a_{23}X'_3, \qquad x_3 = a_{23}X'_2.$$

Remarque. En considérant les points X, X' des systèmes plans ϖ, ϖ' qui correspondent à une même droite $x' \equiv x$ du support commun et les droites x, x' qui correspondent à un même point $X' \equiv X$, on trouve que le carré de la réciprocité est la perspectivité harmonique de centre A et d'axe BC définie par les équations

(a) $$X'_1 = X_1, \quad X'_2 = -X_2, \quad X'_3 = -X_3 \qquad \text{et} \qquad x'_1 = x_1, \quad x'_2 = -x_2, \quad x'_3 = -x_3.$$

15. **Second cas:** Les équations (6) et (7) représentent deux droites distinctes et deux points distincts. On peut supposer que les droites représentées par l'équation (6) coïncident avec les côtés AB, AC du triangle fondamental des coordonnées ternaires; en les désignant par les notations s et t, u' et v' selon qu'on les considère dans le système plan ϖ ou dans le système plan ϖ', l'équation (7) doit représenter les points $S' \equiv V$, $T' \equiv U$ situés sur une droite passant par le point A et correspondant doublement à ce point; on peut encore supposer que le point $U \equiv T'$ est le quatrième point fondamental des coordonnées ternaires et que le point $V \equiv S'$ est le point conjugué harmonique du point $U \equiv T'$ par rapport aux points A, P, si P est le point de rencontre des droites BC et $UV \equiv S'T'$. De cette manière, les équations (6) et (7) doivent se réduire à

$$X_2X_3 = 0 \quad \text{et} \quad (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 - x_2 - x_3) = 0 \quad \text{ou} \quad x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - 2x_2x_3 = 0.$$

En comparant la première de ces équations à l'équation primitive (6) on constate qu'on doit faire

(α) $$a_{23} + a_{32} \neq 0, \qquad a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{31} + a_{13} = a_{12} + a_{21} = 0$$

et les équations de la réciprocité deviennent déjà

$$x'_1 = a_{12}X_2 + a_{13}X_3, \qquad x'_2 = -a_{12}X_1 + a_{23}X_3, \qquad x'_3 = -a_{13}X_1 + a_{32}X_2$$

ou

$$x_1 = -a_{12}X'_1 - a_{13}X'_3, \qquad x_2 = a_{12}X'_1 + a_{32}X'_3, \qquad x_3 = a_{13}X'_1 + a_{23}X'_2.$$

En remplaçant X_1, X_2, X_3 ou X'_1, X'_2, X'_3 par les coordonnées 1,1,1 ou −1,1,1 des points $U \equiv T'$, $V \equiv S'$, ces équations doivent donner pour x'_1, x'_2, x'_3 et x_1, x_2, x_3 les coordonnées 0,0,1 et 0,1,0 des droites $u' \equiv s \equiv AB$ et $t \equiv v' \equiv AC$; on doit donc avoir

$$a_{12} + a_{13} = -a_{12} + a_{23} = a_{13} + a_{32} = -a_{12} + a_{32} = a_{13} + a_{21} = 0$$

et en tenant compte des conditions (α), on peut faire

$$a_{12} = -a_{13} = a_{23} = a_{32} = -a_{21} = a_{31} = 1.$$

Les équations de la réciprocité se réduisent ainsi à

(B) $\qquad x'_1 = X_2 - X_3, \qquad x'_2 = -X_1 + X_3, \qquad x'_3 = X_1 + X_2$

ou

(B') $\qquad x_1 = -X'_2 + X'_3, \qquad x_2 = X'_1 + X'_3, \qquad x_3 = -X'_1 + X'_2.$

on en tire

(B_1) $\qquad X_1 = -x'_1 - x'_2 + x'_3, \qquad X_2 = x'_1 + x'_2 + x'_3, \qquad X_3 = -x'_1 + x'_2 + x'_3$

et

(B'_1) $\qquad X'_1 = -x_1 + x_2 - x_3, \qquad X'_2 = -x_1 + x_2 + x_3, \qquad X'_3 = x_1 + x_2 + x_3.$

Remarques. 1° Si E', F' sont les points où les droites UX, VX coupent les droites $u' \equiv AB$, $v' \equiv AC$, la droite $E'F'$ est dans le système plan ϖ' la droite homologue x' du point X du système plan ϖ; de même, si E, F sont les points où les droites $S'X'$, $T'X'$ coupent les droites $s \equiv AB$, $t \equiv AC$, la droite EF est dans le système plan ϖ la droite homologue x du point X' du système plan ϖ'.

2° En considérant les points X, X' des systèmes plans ϖ, ϖ' qui correspondent à une même droite $x' \equiv x$ et les droites x, x' qui correspondent à un même point $X' \equiv X$, on obtient, pour carré de la réciprocité, la collinéation dont les équations sont

(C) $\qquad X'_1 = -X_1 - X_2 + X_3, \qquad X'_2 = X_3, \qquad X'_3 = X_2$

ou

(C') $\qquad x'_1 = -x_1, \qquad x'_2 = x_1 + x_3, \qquad x'_3 = -x_1 + x_2.$

Les points doubles de cette collinéation sont les points A, P; les droites doubles sont la droite UV et la droite p, conjuguée harmonique de la droite UV par rapport aux droites AB, AC.
La droite UV est le support d'une ponctuelle involutive dont les points U, V sont des points conjugués et dont les points A, P sont les points doubles. Le point A est le support d'un faisceau involutif dont les droites AB, AC sont des droites conjuguées et dont les droites UV, p sont les droites doubles.
Les points xx' et $X' \equiv X$ sont en ligne droite avec le point P; ils sont projetés du point A suivant des droites conjuguées dans une involution dont les droites doubles sont les droites AB, AC; ils sont donc permutables entre eux et les droites y, y' qui correspondent au point $Y' \equiv Y \equiv xx'$ dans la réciprocité donnée se coupent au point $X' \equiv X$.
Les droites XX' et $x' \equiv x$ se coupent sur la droite p; elles rencontrent la droite UV en des points conjugués d'une involution dont les points U, V sont les points doubles, elles sont donc permutables entre elles et les points Y, Y' qui correspondent à la droite $y' \equiv y \equiv XX'$ dans la réciprocité donnée sont sur la droite $x' \equiv x$.

16. **Troisième cas: Les équations (6) et (7) représentent des coniques non dégénérées γ, γ'.**
1°. Les droites qui correspondent à un point $X \equiv X'$ de la conique γ sont les tangentes x', x menées de ce point à la conique γ'; les faisceaux du second degré $\gamma(x')$, $\gamma(x)$ ainsi déterminés lorsque le point $X \equiv X'$ décrit la conique γ sont projectifs et leurs éléments doubles sont les tangentes à γ' aux points d'intersection des deux coniques. De même, les points qui correspondent à une tangente $x \equiv x'$ de la conique γ' sont les points X', X où cette tangente coupe la conique γ; les ponctuelles du second degré $\gamma(X')$, $\gamma(X)$ ainsi déterminées lorsque

la droite $x \equiv x'$ varie sont projectives et leurs éléments doubles sont les points de contact avec γ des tangentes communes aux deux coniques. Le nombre des éléments doubles de deux formes projectives de première espèce superposées est ∞, 2 ou 1; on en déduit que les coniques γ, γ' peuvent être confondues, être bitangentes ou avoir un contact du troisième ordre. On arrive à la même conclusion par le calcul et on détermine en outre la nature du carré de la réciprocité dans chacun des cas possibles.

2° Théorème. *Lorsque les équations (6) et (7) représent des coniques proprement dites γ, γ' pour que les droites correspondant à un même point de la conique γ dans les deux systèmes plans coïncident, il faut et il suffit que l'une d'elle soit tangente en ce point à la conique γ, et, si, cette condition est remplie, les coniques γ, γ' sont tangentes au point considéré.*

En prenant le point considéré comme sommet A du triangle fondamental ABC des coordonnées ternaires, le coefficient a_{11} de X_1^2 dans l'équation (6) est nul et les coordonnées des droites x', x qui correspondent au point A sont

$$0, \; a_{21}, \; a_{31} \qquad \text{et} \qquad 0, \; a_{12}, \; a_{13}$$

alors que les coordonnées de la tangente à la conique γ au point A sont

$$0, \quad a_{12}+a_{21}, \quad a_{13}+a_{31}.$$

La première partie de la propriété à démontrer résulte de l'équivalence des trois conditions

$$a_{12}:a_{21}=a_{13}:a_{31}, \quad a_{12}:(a_{12}+a_{21})=a_{13}:(a_{13}+a_{31}), \; a_{21}:(a_{12}+a_{21})=a_{31}:(a_{13}+a_{31}).$$

D'autre part, si les droites correspondant au point A sont confondues avec le côté AB du triangle fondamental des coordonnées ternaires, leurs coordonnées sont 0, 0, 1. On doit donc avoir

$$a_{21}=a_{12}=0, \qquad a_{13}\neq 0 \qquad \text{et} \qquad a_{31}\neq 0$$

La condition $D \neq 0$ se réduit à

$$a_{13}\,a_{22}\,a_{31}\neq 0$$

et il faut en outre qu'on ait

$$a_{13}+a_{31}\neq 0$$

pour que la conique γ ne soit pas une conique dégénérée.

L'équation (7) devient

$$\alpha_{11}x_1^2+\alpha_{22}x_2^2+(\alpha_{31}+\alpha_{13})\,x_3x_1+(\alpha_{12}+\alpha_{21})\,x_1x_2=0,$$

avec

$$\alpha_{31}+\alpha_{13}\neq 0;$$

elle admet la solution

$$x_1=0, \qquad x_2=0, \qquad x_3=1;$$

la conique γ' est donc tangente à la droite AB et le point de contact ayant pour équation

$$(\alpha_{31}+\alpha_{13})\,x_1=0 \qquad \text{ou} \qquad x_1=0,$$

est le point A.

3° Théorème. *Lorsque les équations (6) et (7) représentent des coniques proprement dites γ, γ' et que les droites correspondant à trois points de la conique γ se confondent avec les tangentes en ces points, la même propriété existe pour n'importe quel point de la conique γ et l'équation (7) est l'équation tangentielle de cette conique, de sorte que les deux coniques γ, γ' coïncident.*

Si A, B, C sont les trois points considérés, la propriété résulte de ce que les coniques γ, γ' devant être tangentes l'une à l'autre en ces points, coïncident; ce cas est celui dans lequel les projectivités définies au 1° ont un nombre infini d'éléments doubles. Pour traiter la question par le calcul, on prend le triangle ABC pour triangle fondamental des coordonnées ternaires; il résulte des raisonnements qu'on a faits dans la démonstration du théorème précédent qu'on doit avoir

$$a_{11}=a_{22}=a_{33}=0, \quad a_{12}:a_{21}=a_{13}:a_{31}, \quad a_{23}:a_{32}=a_{21}:a_{12}, \quad a_{31}:a_{13}=a_{32}:a_{23}.$$

on en tire

$$a_{12}^2=a_{21}^2 \quad \text{ou} \quad a_{12}=\pm a_{21}.$$

Si on avait

$$a_{12}=-a_{21},$$

on aurait aussi

$$a_{23}=-a_{32}, \qquad a_{13}=-a_{31}$$

et le déterminant D serait nul.
On doit donc avoir

$$a_{23}=a_{32}=a_1 \qquad a_{31}=a_{13}=a_2, \qquad a_{12}=a_{21}=a_3$$

et l'équation (6) de la conique γ se réduit à

$$a_1X_2X_3+a_2X_3X_1+a_3X_1X_2=0.$$

Les tangentes aux points A, B, C à cette conique se coupent deux à deux en des points
$A_1(-a_1,a_2,a_3)$, $B_1(a_1,-a_2,a_3)$, $C_1(a_1,a_2,-a_3)$.
Les droites AA_1, BB_1, CC_1 passent par le point de coordonnées a_1, a_2, a_3. En prenant ce point comme quatrième point fondamental des coordonnées ternaires, on peut faire

$$a_1=a_2=a_3=1.$$

L'équation de la conique γ s'écrit

$$X_2X_3+X_3X_1+X_1X_2=0$$

et les équations de la réciprocité deviennent

(C) $\qquad x'_1=X_2+X_3, \qquad x'_2=X_1+X_3, \qquad x'_3=X_1+X_2,$

ou

(C') $\qquad x_1=X'_2+X'_3, \qquad x_2=X'_1+X'_3, \qquad x_3=X'_1+X'_2.$

ou

(C_1) $\qquad X'_1=-x_1+x_2+x_3, \qquad X'_2=x_1-x_2+x_3, \qquad X'_3=x_1+x_2-x_3,$

ou

(C'_1) $\qquad X_1=-x'_1+x'_2+x'_3, \qquad X_2=x'_1-x'_2+x'_3, \qquad X_3=x'_1+x'_2-x'_3.$

Les droites homologues x', x d'un point quelconque $X'\equiv X$ sont donc confondues avec la polaire de ce point pour la conique γ; en particulier les droites homologues d'un point de cette conique coïncident avec la tangente à la conique en ce point.
L'équation (7) de la conique γ' peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & x_1 \\ 1 & 0 & 1 & x_2 \\ 1 & 1 & 0 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

ce qui est l'équation tangentielle de la conique γ et les deux coniques coïncident.
Définition. – La réciprocité (C) prend le nom de polarité et on dit que la conique γ est la conique directrice de cette polarité.
Remarque. – En considérant les points X, X' qui correspondent à une même droite $x'\equiv x$ et les droites x, x' qui correspondent à un même point $X'\equiv X$, on trouve que le carré de la réciprocité (C) est la transformation identique
(c). $\qquad X'_1:X'_2:X'_3=X_1:X_2:X_3, \qquad x'_1:x'_2:x'_3=x_1:x_2:x_3.$

4° Problème. Déterminer la nature de la réciprocité lorsque les droites homologues des points de la conique γ ne se confondent pas avec les tangentes en ces points et qu'ainsi les coniques γ, γ' sont distinctes.

On peut prendre pour triangle fondamental des coordonnées ternaires un triangle ABC inscrit à la conique γ et tel que les droites homologues du point A considéré successivement dans les deux systèmes plans soient les droites x' ou AB, x ou AC. Les équations de la réciprocité deviennent

$$x'_1 = a_{12} X_2, \qquad x'_2 = a_{23} X_3, \qquad x'_3 = a_{31} X_1 + a_{32} X_2$$

et on doit avoir

$$D = a_{12} a_{23} a_{31} \neq 0$$

L'équation (6) de la conique γ se réduit à

$$(a_{23} + a_{32}) X_2 X_3 + a_{31} X_3 X_1 + a_{12} X_1 X_2 = 0$$

et il faut qu'on ait

$$a_{23} + a_{32} \neq 0$$

pour que cette conique soit une conique proprement dite.

Deux cas sont à distinguer selon que a_{32} est ou n'est pas nul.

1) $a_{32} = 0$. Dans ce cas, les équations précédentes deviennent

$$x'_1 = a_{12} X_2, \qquad x'_2 = a_{23} X_3, \qquad x'_3 = a_{31} X_1$$

et

$$a_{23} X_2 X_3 + a_{31} X_3 X_1 + a_{12} X_1 X_2 = 0$$

avec la condition

$$a_{12} a_{23} a_{31} \neq 0.$$

En même temps, l'équation (7) se réduit à

$$\frac{x_2 x_3}{a_{23}} + \frac{x_3 x_1}{a_{31}} + \frac{x_1 x_2}{a_{12}} = 0$$

et la conique γ' est inscrite au triangle ABC.

Les tangentes à la conique γ aux sommets du triangle ABC coupent les côtés du triangle en trois points situés sur la droite

$$d \equiv \frac{X_1}{a_{23}} + \frac{X_2}{a_{31}} + \frac{X_3}{a_{12}} = 0$$

et les droites joignant les sommets du triangle ABC aux points de contact des côtés opposés avec la conique γ' se coupent au point

$$D \equiv a_{23} x_1 + a_{31} x_2 + a_{12} x_3 = 0 .$$

Le point D est le pôle de la droite d aussi bien pour les coniques γ, γ' que pour le triangle ABC. En prenant le point D comme quatrième point fondamental des coordonnées ternaires, on peut faire

$$a_{23} = a_{31} = a_{12} = 1;$$

les équations de la réciprocité deviennent

$$\text{(D)} \qquad x'_1 = X_2, \quad x'_2 = X_3, \quad x'_3 = X_1 \qquad \text{ou} \qquad x_1 = X'_3, \quad x_2 = X'_1, \quad x_3 = X'_2$$

et les équations des coniques γ, γ' se réduisent à

$$X_2 X_3 + X_3 X_1 + X_1 X_2 = 0 \qquad \text{et} \qquad x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2 = 0.$$

Les droites homologues du point B sont $x' \equiv BC$, $x = BA$; celles qui correspondent au point C sont $x' = CA$, $x = CB$.

L'équation ponctuelle de la conique γ' est

$$X_1^2+X_2^2+X_3^2-2X_2X_3-2X_3X_1-2X_1X_2=0$$

ou

$$(X_1+X_2+X_3)^2-4(X_2X_3+X_3X_1+X_1X_2)=0.$$

Les coniques γ, γ' sont donc bitangentes, la droite d est la corde des contacts et le point D est le point de rencontre des tangentes communes.

Remarques. – a. – Le point A étant un point quelconque de la conique γ, chaque point de la conique γ est le sommet d'un triangle inscrit à cette conique et circonscrit à la conique γ' avec la condition que le point D est constamment le pôle de la droite d pour ce triangle.

b. – Par collinéation, on peut transformer la figure de telle manière que les coniques γ, γ' deviennent des circonférences concentriques réelles γ_1, γ'_1; les triangles inscrits à la circonférence γ_1 et circonscrits à la circonférence γ'_1, seront des triangles équilatéraux; le rayon de la circonférence γ'_1 sera la moitié de celui de la circonférence γ_1.

c. – En considérant les points X, X' homologues d'une même droite $x'\equiv x$ et les droites x, x' homologues d'un même point $X'\equiv X$, on obtient comme carré de la réciprocité (D) la collinéation dont les équations sont

$$(d)\qquad X_1=X'_2,\quad X'_2=X'_3,\quad X_3=X'_1\qquad \text{et}\qquad x_1=x'_2,\quad x_2=x'_3,\quad x_3=x'_1.$$

Les points doubles de cette collinéation sont le point D et les points de contact E, F des coniques γ, γ'; les droites doubles sont les côtés du triangle DEF.

Par la transformation définie dans la remarque précédente, la collinéation devient une rotation de 120° autour du centre des circonférences γ_1, γ'_1.

Le cube de la collinéation (d) est la transformation identique.

2) $a_{32}\neq 0$. Les tangentes aux points A, B, C à la circonférence γ coupent les côtés du triangle ABC en trois points situés sur la droite

$$d\equiv\frac{X_1}{a_{23}+a_{32}}+\frac{X_2}{a_{31}}+\frac{X_3}{a_{12}}=0;$$

ces tangentes forment un triangle $A_1B_1C_1$ et les droites AA_1, BB_1, CC_1 se coupent au point

$$D\equiv(a_{23}+a_{32})x_1+a_{31}x_2+a_{12}x_3=0.$$

Le point D est le pôle de la droite d pour la conique γ et pour le triangle ABC. En prenant le point D comme quatrième point fondamental des coordonnées ternaires, on peut faire

$$a_{23}+a_{32}=a_{31}=a_{12}=1;$$

les équations de la réciprocité se réduisent à

$$(E)\qquad x'_1=X_2,\qquad x'_2=a_{23}X_3,\qquad x'_3=X_1+(1-a_{23})X_2$$

ou

$$(E')\qquad x_1=X'_3,\qquad x_2=X'_1+(1-a_{23})X'_3,\qquad x_3=a_{23}X'_2;$$

les équations des coniques γ, γ' deviennent

$$X_2X_3+X_3X_1+X_1X_2=0\qquad \text{et}\qquad a_{23}(a_{23}-1)x_1^2+x_2x_3+a_{23}x_3x_1+a_{23}x_1x_2=0.$$

La conique γ' est tangente aux droites AB, AC et son équation en coordonnées ponctuelles est

$$X_1^2+a_{23}^2X_2^2+a_{23}^2X_3^2+2a_{23}(a_{23}-2)X_2X_3-2a_{23}X_3X_1-2a_{23}X_1X_2=0$$

ou

$$(X_1+a_{23}X_2+a_{23}X_3)^2-4a_{23}(X_2X_3+X_3X_1+X_1X_2)=0$$

Les coniques γ, γ' sont tangentes l'une à l'autre aux points où elles sont rencontrées par la droite

$$p\equiv X_1+a_{23}X_2+a_{23}X_3=0$$

et le pôle de cette droite pour les deux coniques est le point

$$P \equiv (2a_{23}-1)x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Deux hypothèses sont à envisager

a.- Les coniques γ, γ' sont tangentes au point P et la droite p est leur tangente commune en ce point. Cela arrive si le point P est sur la droite p, c'est-à-dire, quand on a

$$(2a_{23}-1) + a_{23} + a_{23} = 0 \qquad \text{ou} \qquad a_{23} = \frac{1}{4}.$$

Les équations de la réciprocité deviennent

$$(F) \qquad x'_1 = X_2, \qquad x'_2 = \frac{1}{4}X_3, \qquad x'_3 = X_1 + \frac{3}{4}X_2$$

ou

$$(F_1) \qquad x_1 = X'_3, \qquad x_2 = X'_1 + \frac{3}{4}X'_3, \qquad x_3 = \frac{1}{4}X'_2.$$

Les équations des coniques γ, γ' sont donc

$$X_2X_3 + X_3X_1 + X_1X_2 = 0$$

et

$$3x_1^2 - 16x_2x_3 - 4x_3x_1 - 4x_1x_2 = 0$$

ou

$$16X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - 14X_2X_3 - 8X_3X_1 - 8X_1X_2 = 0;$$

Celles de la droite p et du point P sont

$$4X_1 + X_2 + X_3 = 0 \qquad \text{et} \qquad x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0.$$

Les coniques γ, γ' ont un contact du troisième ordre au point P et ce point est le second point où la droite AD coupe la conique γ. La conique γ' est tangente aux droites AB, AC aux points $C_2(1,4,0)$, $B_2(1,0,4)$ situés sur les droites PC_1, PB_1. Les droites BC, B_1C_1, B_2C_2, p se coupent en un même point qui est le pôle de la droite AP pour les coniques γ, γ'.

Remarques. - α) Par colliniation, on peut transformer la figure pour que la conique γ devienne la circonférence osculatrice en un sommet de la transformée de la conique γ'; ou bien, pour que les coniques γ, γ' deviennent des paraboles égales ayant le même axe et tournant leurs concavités dans le même sens.

β) En considérant les points X, X' homologues d'une même droite $x' \equiv x$ et les droites x, x' homologues d'un même point $X' \equiv X$, on trouve comme carré de la réciprocité donnée la colliniation dont les équations sont

$$(f) \qquad X'_1 = -\frac{3}{4}X_2 + \frac{1}{4}X_3, \qquad X'_2 = 4X_1 + 3X_2, \qquad X'_3 = X_2$$

ou

$$(f_1) \qquad x'_1 = 4x_3, \qquad x'_2 = \frac{1}{4}x_1, \qquad x'_3 = -\frac{3}{4}x_1 + x_2 + x_3.$$

La droite p et le point P sont les seuls éléments doubles de cette colliniation.

b.- Les coniques γ, γ' sont tangentes l'une à l'autre en des points distincts E, F de la droite p qui ne passe donc pas par le point P. De même que dans le cas précédent, les points de contact C_2, B_2 de la conique γ' avec les droites AB, AC sont sur les droites PC_1, PB_1; le point P est sur la droite AD et les droites BC, B_1C_1, B_2C_2, p se coupent au pôle de la droite AD pour les coniques γ, γ'.

Les droites homologues du point B sont la droite $x \equiv BA$ et la droite x' qui est la seconde tangente issue du point B à la conique γ'; les droites homologues du point C sont la droite $x' \equiv CA$ et la droite x qui est la seconde tangente issue du point C à la conique γ'.

Remarques. α - Par colliniation, on peut transformer la figure pour que les coniques γ, γ' deviennent des circonférences concentriques γ_1, γ'_1; mais, contrairement à ce qu'on a trouvé dans la remarque b au 3°, 1, le rayon de la circonférence γ'_1 ne sera pas la moitié du rayon de la circonférence γ_1 et aucun des triangles inscrits à γ_1 ne sera circonscrit à γ'_1.

β) En considérant les points homologues X, X' d'une même droite $x' \equiv x$ et les droites homologues x, x' d'un

même point $X' = X$, on trouve que le carré de la réciprocité (E) est la collinéation d'équations

(e) $$X'_1 = (a_{23}-1)X_2 + a_{23}X_3,\quad X'_2 = \frac{1}{a_{23}}X_1 + \left(\frac{1}{a_{23}}-1\right)X_2,\qquad X'_3 = X_2$$

et

(e_1) $$x'_1 = \frac{1}{a_{23}}x_3,\quad x'_2 = a_{23}x_1,\qquad x'_3 = (a_{23}-1)x_1 + x_2 + \left(\frac{1}{a_{23}}-1\right)x_3.$$

Les points et les droites doubles de cette collinéation sont les sommets et les côtés du triangle PEF.

17. Conclusion. _ Quand deux figures fondamentales de seconde espèce sont réciproques et superposées, six cas sont à considérer d'après la nature et les positions relatives des lieux représentés par les équations (6) et (7). Le carré de la réciprocité est l'une ou l'autre des collinéations obtenues pour les formes collinéaires superposées, à l'exception de la perspectivité dont l'axe passe par le centre; mais on retrouve deux fois la collinéation à trois points doubles et la perspectivité qu'on obtient est la perspectivité harmonique.

D. Réciprocité involutive.

18. Définition _ Quand deux formes fondamentales de seconde espèce, réciproques et de même nom, sont placées sur le même support, on dit que deux éléments du support commun se correspondent doublement s'ils sont homologues l'un de l'autre quel que soit l'ordre dans lequel on les considère comme appartenant aux deux formes données. On dit qu'il y a involution si les éléments homologues se correspondent toujours doublement, et, dans ce cas, on considère les deux formes comme n'en faisant qu'une seule dite en involution ou involutive par réciprocité; les éléments appelés d'abord des éléments homologues prennent le nom d'éléments conjugués.

19. 1° Théorème. *La polarité est la seule réciprocité involutive que l'on puisse établir entre deux formes fondamentales de seconde espèce, de même nom et de même support.*

En effet, si deux formes fondamentales de seconde espèce, réciproques et de même nom, sont superposées, deux éléments homologues qui se correspondent doublement sont des éléments doubles de la collinéation équivalente au carré de la réciprocité considérée, dès lors, pour qu'il y ait involution, il est nécessaire et suffisant que tous les éléments du support commun des deux formes soient des éléments doubles de cette collinéation, ou, ce qui revient au même, que celle-ci se réduise à la transformation identique et, d'après ce qu'on a vu dans la théorie précédente, cela n'arrive que si la réciprocité donnée est une polarité.

2° Définition _ Dans un système plan en involution par réciprocité, chaque point s'appelle le pôle de la droite conjuguée et chaque droite s'appelle la polaire du point conjugué. Dans une gerbe involutive par réciprocité, chaque droite s'appelle la polaire du plan conjugué et chaque plan s'appelle le plan polaire de la droite conjuguée.

3° Remarque. Le théorème (1°) peut se démontrer par un raisonnement indépendant de la théorie précédente et donnant comme cette théorie, un moyen de faire la classification des réciprocités entre formes fondamentales de seconde espèce superposées. Pour fixer les idées on considère deux systèmes plans superposés rapportés aux mêmes coordonnées ternaires et on établit entre eux une réciprocité dont les équations sont

(1) $x'_i = a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + a_{i3}X_3$ ou $DX_i = \alpha_{1i}x'_1 + \alpha_{2i}x'_2 + \alpha_{3i}x'_3$ (2)

ou

(3) $x_i = a_{1i}X'_1 + a_{2i}X'_2 + a_{3i}X'_3$ ou $DX'_i = \alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \alpha_{i3}x_3.$ (4)

Dans ces équations,

(5) $$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

et α_{ij} est le mineur de a_{ij} dans le déterminant D.

Le point X correspondra doublement à la droite x, s'il existe un nombre k différent de zéro et tel

qu'on ait

$$(6)\quad \begin{aligned} &(a_{11}-k a_{11})X_1+(a_{12}-k a_{21})X_2+(a_{13}-k a_{31})X_3=0,\\ &(a_{21}-k a_{12})X_1+(a_{22}-k a_{22})X_2+(a_{23}-k a_{32})X_3=0,\\ &(a_{31}-k a_{13})X_1+(a_{32}-k a_{23})X_2+(a_{33}-k a_{33})X_3=0. \end{aligned}$$

1) Donc, pour qu'il y ait involution, il est nécessaire et suffisant que l'on puisse donner à k une valeur différente de zéro et telle que les trois équations précédentes soient vérifiées quelles que soient les valeurs de X_1, X_2, X_3, ou telle que tous les coefficients de ces trois équations soient nuls. – Si on suppose a_{11}, ou a_{22}, ou a_{33} différent de zéro, les conditions

$$a_{11}-k a_{11}=0, \qquad a_{22}-k a_{22}=0, \qquad a_{33}-k a_{33}=0$$

donnent pour k la seule valeur

$$k=1;$$

en portant cette valeur de k dans les autres conditions

$$a_{ij}-k a_{ji}=0,$$

on constate que $a_{ij}=a_{ji}$; le déterminant D est symétrique et la réciprocité est une polarité.

Si les éléments principaux a_{11}, a_{22}, a_{33} du déterminant D sont nuls, il faut bien que l'un des éléments secondaires a_{ij} $(i\neq j)$ ne soit pas nul; il résulte des conditions

$$a_{ij}-k a_{ji}=0, \qquad a_{ji}-k a_{ij}=0$$

qu'on doit avoir

$$a_{ji}\neq 0 \quad \text{et} \quad k^2=1.$$

Si on faisait $k=-1$, d'où $a_{ij}=-a_{ji}$, le déterminant D serait nul. On doit donc faire $k=1$, d'où $a_{ij}=a_{ji}$, le déterminant D est symétrique et la réciprocité est une polarité.

2) Lorsque les équations (6) ne se réduisent pas à des identités, les valeurs de k pour lesquelles elles sont compatibles sont les racines de l'équation

$$(7)\qquad D(k)=\begin{vmatrix} a_{11}-k a_{11} & a_{12}-k a_{21} & a_{13}-k a_{31}\\ a_{21}-k a_{12} & a_{22}-k a_{22} & a_{23}-k a_{32}\\ a_{31}-k a_{13} & a_{32}-k a_{23} & a_{33}-k a_{33}\end{vmatrix}=0$$

Cette équation admet la racine $k=1$ pour laquelle le déterminant $D(k)$ est symétrique gauche. Si le sommet $A(1,0,0)$ du triangle fondamental des coordonnées ternaires correspond à cette valeur de k portée dans les équations (6), on a

$$a_{12}=a_{21}, \qquad a_{13}=a_{31},$$

et le point A correspond doublement à la droite de coordonnées

$$a_{11}, \quad a_{12} \text{ ou } a_{21}, \quad a_{13} \text{ ou } a_{31}.$$

Deux cas sont à distinguer selon que cette droite passe ou ne passe pas par le point A.

a. – Lorsque la droite passe par le point A, en la prenant pour le côté AC $(0,1,0)$ du triangle fondamental des coordonnées ternaires, on a

$$a_{11}=0, \qquad a_{12}=a_{21}\neq 0, \qquad a_{13}=a_{31}=0;$$

l'équation (7) admet $k=1$ comme racine triple, le point A et la droite AC sont les seuls éléments doubles de la collinéation obtenue par le carré de la réciprocité donnée. On se retrouve dans les conditions du n° 16, 4°, 2, a.

b. – Si la droite correspondant doublement au point A ne passe pas par ce point, en la prenant pour le côté BC du triangle fondamental des coordonnées ternaires, on a

$$a_{11}\neq 0, \qquad a_{12}=a_{21}=0, \qquad a_{13}=a_{31}=0;$$

les équations (6) deviennent

$$(8) \qquad a_{11}(1-k)X_1 = 0, \qquad a_{22}(1-k)X_2 + (a_{23} - k a_{32})X_3 = 0, \qquad (a_{32} - k a_{23})X_2 + a_{33}(1-k)X_3 = 0$$

et l'équation en k se réduit à

$$(9) \qquad D(k) = a_{11}(1-k) \cdot \begin{vmatrix} a_{22}(1-k) & a_{23} - k a_{32} \\ a_{32} - k a_{23} & a_{33}(1-k) \end{vmatrix} = 0.$$

Si cette équation admettait une seconde fois la racine $k = 1$, on aurait

$$a_{23} = a_{32}$$

et on retrouverait la polarité. On supposera donc les autres valeurs de k différentes de l'unité et

$$a_{23} \neq a_{32}.$$

Mais quand on donne à k une valeur différente de l'unité dans la première des équations (8), on doit faire $X_1 = 0$ et ainsi les points différents du point A qu'on obtiendra par les équations (8) sont situés sur la droite BC. D'autre part, ces points sont les points doubles des ponctuelles superposées sur la droite BC dans la collinéation équivalente au carré de la réciprocité. Il y a donc trois cas à distinguer selon le nombre des points doubles.

α) Tous les points de la droite BC sont des points doubles. En exprimant que les équations (8) sont vérifiées quels que soient X_2 et X_3, si on fait $X_1 = 0$ et $k \neq 1$, on a

$$a_{22} = 0, \qquad a_{33} = 0, \qquad k = -1, \qquad a_{23} = -a_{32}.$$

Les équations de la réciprocité deviennent

$$x'_1 = a_{11}X_1, \qquad x'_2 = a_{23}X_3, \qquad x'_3 = -a_{23}X_2.$$

et le carré de cette réciprocité est l'homologie harmonique d'axe BC et de centre A.

β) Deux points seulement de la droite BC sont des points doubles. On peut supposer qu'ils sont les points B, C, ce qui permet de faire

$$a_{22} = 0, \qquad a_{33} = 0 \qquad a_{23} \neq \pm a_{32};$$

les équations de la réciprocité deviennent

$$x'_1 = a_{11}X_1, \qquad x'_2 = a_{23}X_3, \qquad x'_3 = a_{32}X_2$$

et le carré de cette réciprocité est la collinéation à trois points doubles, les points A, B, C.

γ) Un seul point de la droite BC est un point double. On peut supposer que ce point coïncide avec le point B et cela permet de faire

$$a_{22} = 0, \qquad a_{23} = -a_{32}, \qquad a_{33} \neq 0;$$

les équations de la réciprocité deviennent

$$x'_1 = a_{11}X_1, \qquad x'_2 = a_{23}X_3, \qquad x'_3 = -a_{23}X_2 + a_{33}X_3$$

et le carré de cette réciprocité est une collinéation admettant deux points doubles et deux droites doubles, les points A, B et les droites BC, AB.

20. 1° Théorème. *Deux systèmes plans réciproques superposés sont en involution dès que les sommets d'un triangle du support commun sont, dans l'une des deux formes, les points homologues des côtés opposés considérés comme appartenant à l'autre forme.*

En prenant le triangle considéré comme triangle fondamental des coordonnées ternaires dans les deux formes, les équations de la réciprocité doivent être vérifiées par

$$\begin{array}{llllll} X_1 = 1, & X_2 = 0, & X_3 = 0 & \text{avec} & x'_1 = 1, & x'_2 = 0, & x'_3 = 0, \\ X_1 = 0, & X_2 = 1, & X_3 = 0 & \text{avec} & x'_1 = 0 & x'_2 = 1 & x'_3 = 0, \\ X_1 = 0, & X_2 = 0, & X_3 = 1 & \text{avec} & x'_1 = 0 & x'_2 = 0 & x'_3 = 1. \end{array}$$

On doit donc faire $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$, le déterminant D est symétrique et il y a involution.

2° **Définition**. Dans un système plan involutif par réciprocité, tout triangle dont les sommets sont les pôles des côtés opposés est appelé un triangle polaire et, dans toute gerbe involutive par réciprocité, tout trièdre dont les arêtes sont les polaires des faces opposées est appelé un trièdre polaire (voir II, nos 114 et 129).

3° **Théorème**. *Un système plan involutif par réciprocité est déterminé dès qu'on donne un triangle polaire, un point extérieur aux côtés du triangle et la polaire de ce point, laquelle sera donc une droite ne passant par aucun des sommets du triangle.*

Soient $ABC \equiv abc$, D, d un triangle, un point et une droite d'un même plan ϖ. Si le point D n'appartient à aucune des droites a, b, c et si la droite d ne passe par aucun des points A, B, C, le plan ϖ est le support commun de deux systèmes plans entre lesquels il existe une réciprocité déterminée par les quatre couples d'éléments homologues A et a, B et b, C et c, D et d. Les points A, B, C et les droites a, b, c étant les sommets et les côtés d'un triangle, cette réciprocité est l'involution répondant à la question.

4° **Théorème**. *Etant donné un pentagone simple ABCDE dans un plan ϖ, il y a une involution dans laquelle chaque sommet du pentagone est le pôle du côté opposé.*

Si le point F est le point de rencontre des côtés AE et BC, cette involution est celle dans laquelle le triangle CEF est un triangle polaire et le point D le pôle de la droite AB.

5° **Gerbe rectangulaire**. – Lorsque le cône isotrope est le cône directeur de la polarité établie dans une gerbe ayant un point propre pour support, toute droite est perpendiculaire à son plan polaire, tout trièdre polaire est trirectangle et la gerbe est dite rectangulaire. On retrouve cette propriété par le calcul en rapportant la figure à des coordonnées cartésiennes x, y, z ayant le support de la gerbe pour origine; l'équation du cône isotrope est

$$\Psi(x, y, z) = 0 \qquad \text{ou} \qquad x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos yz + 2zx\cos zx + 2xy\cos xy = 0,$$

et le plan polaire de la droite

$$d \equiv x : x_1 = y : y_1 = z : z_1$$

est le plan

$$\delta \equiv x\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} + y\frac{\partial \Psi}{\partial y_1} + z\frac{\partial \Psi}{\partial z_1} = 0$$

ou le plan perpendiculaire à la droite d par le sommet du cône.

21. Produit de deux polarités placées dans un même système plan ou dans la même gerbe.

– 1° Pour fixer les idées on considère deux polarités données dans un même système plan ϖ. Si elles ont la même conique directrice, leur produit est la transformation identique et il n'y a pas lieu de s'en occuper. Lorsque les coniques directrices sont des coniques différentes γ, γ', le produit des deux polarités est une collinéation entre deux systèmes plans superposés et cette collinéation doit nécessairement être l'une de celles différentes de la transformation identique, trouvées précédemment (nos 1 à 11). Cinq cas sont à distinguer.

2° **Premier cas: La collinéation a trois points doubles et trois droites doubles qui sont les sommets et les côtés d'un triangle ABC ou abc.**

Les points A, B, C sont les seuls points du système plan ϖ ayant les mêmes polaires par rapport aux coniques γ, γ'; ces polaires sont les côtés opposés a, b, c du triangle ABC et ce triangle est le seul triangle polaire commun aux coniques γ, γ'. En prenant le triangle ABC ou abc comme triangle fondamental des coordonnées ternaires, les équations ponctuelles et les équations tangentielles des deux coniques sont

$$(1) \qquad a_1X_1^2 + a_2X_2^2 + a_3X_3^2 = 0, \qquad a'_1X_1^2 + a'_2X_2^2 + a'_3X_3^2 = 0$$

et

$$(2) \qquad \frac{1}{a_1}x_1^2 + \frac{1}{a_2}x_2^2 + \frac{1}{a_3}x_3^2 = 0, \qquad \frac{1}{a'_1}x_1^2 + \frac{1}{a'_2}x_2^2 + \frac{1}{a'_3}x_3^2 = 0,$$

dont tous les coefficients sont différents de zéro puisque les coniques γ, γ' sont des coniques proprement dites.

Les équations entre les points homologues X, X' de la collinéation qui est le produit des deux polarités sont

(3) $$a'_1 X'_1 = a_1 X_1, \qquad a'_2 X'_2 = a_2 X_2, \qquad a'_3 X'_3 = a_3 X_3$$

et les équations aux points doubles de cette collinéation sont

(4) $$(a_1 - k a'_1) X_1 = 0, \qquad (a_2 - k a'_2) X_2 = 0, \qquad (a_3 - k a'_3) X_3 = 0$$

dans lesquelles k doit être remplacé par les racines de l'équation

(5) $$(a_1 - k a'_1)(a_2 - k a'_2)(a_3 - k a'_3) = 0.$$

Cette équation devant avoir trois racines simples, il faut qu'on ait

(6) $$a_1 : a'_1 \neq a_2 : a'_2, \qquad a_2 : a'_3 \neq a_3 : a'_3, \qquad a_3 : a'_3 \neq a_1 : a'_1.$$

Les équations

(7) $$(a_1 - k a'_1) X_1^2 + (a_2 - k a'_2) X_2^2 + (a_3 - k a'_3) X_3^2 = 0$$

et

(8) $$\left(\frac{k}{a_1} - \frac{1}{a'_1}\right) x_1^2 + \left(\frac{k}{a_2} - \frac{1}{a'_2}\right) x_2^2 + \left(\frac{k}{a_3} - \frac{1}{a'_3}\right) x_3^2 = 0,$$

dans lesquelles k est un paramètre arbitraire, représentent, la première, une infinité de coniques passant par les points communs aux coniques γ, γ'; la seconde, une infinité de coniques tangentes aux tangentes communes aux coniques γ, γ'. – On dit que les coniques représentées par l'équation (7) forment un faisceau ponctuel de coniques et que celles représentées par l'équation (8) forment un faisceau tangentiel de coniques. En annulant les discriminants de ces équations, on obtient des équations équivalentes à l'équation (5). Il en résulte que chacun des deux faisceaux de coniques contient trois coniques dégénérées. Les équations des coniques dégénérées du faisceau ponctuel (7) sont

(9) $$\left(\frac{a_2}{a_1} - \frac{a'_2}{a'_1}\right) X_2^2 + \left(\frac{a_3}{a_1} - \frac{a'_3}{a'_1}\right) X_3^2 = 0, \quad \left(\frac{a_3}{a_2} - \frac{a'_3}{a'_2}\right) X_3^2 + \left(\frac{a_1}{a_2} - \frac{a'_1}{a'_2}\right) X_1^2 = 0, \quad \left(\frac{a_1}{a_3} - \frac{a'_1}{a'_3}\right) X_1^2 + \left(\frac{a_2}{a_3} - \frac{a'_2}{a'_3}\right) X_2^2 = 0$$

et celles des coniques dégénérées du faisceau tangentiel (8) sont

(10) $$\left(\frac{a_1}{a_2} - \frac{a'_1}{a'_2}\right) x_2^2 + \left(\frac{a_1}{a_3} - \frac{a'_1}{a'_3}\right) x_3^2 = 0, \quad \left(\frac{a_2}{a_3} - \frac{a'_2}{a'_3}\right) x_3^2 + \left(\frac{a_2}{a_1} - \frac{a'_2}{a'_1}\right) x_1^2 = 0, \quad \left(\frac{a_3}{a_1} - \frac{a'_3}{a'_1}\right) x_1^2 + \left(\frac{a_3}{a_2} - \frac{a'_3}{a'_2}\right) x_2^2 = 0.$$

Les équations (9) représentent respectivement deux droites distinctes passant par le point A et formant un groupe harmonique avec les droites, b, c; deux droites distinctes passant par le point B et formant un groupe harmonique avec les droites c, a; deux droites distinctes passant par le point C et formant un groupe harmonique avec les droites a, b. Les coniques γ, γ' ont donc quatre points communs D, E, F, G qui sont les sommets d'un quadrangle dont les points A, B, C sont les points diagonaux.

Les équations (10) représentent respectivement deux points distincts situés sur la droite a et formant un groupe harmonique avec les points B, C; deux points distincts situés sur la droite b et formant un groupe harmonique avec les points C, A; deux points distincts situés sur la droite c et formant un groupe harmonique avec les points A, B. Les coniques γ, γ' ont donc quatre tangentes communes d, e, f, g qui sont les côtés d'un quadrilatère dont les droites a, b, c sont les diagonales.

Remarques. – 1) Les points A, B, C sont les points diagonaux des quadrangles ayant pour sommets les points de contact de chacune des coniques γ, γ' avec les tangentes communes d, e, f, g. – Les droites a, b, c sont les diagonales des quadrilatères ayant pour côtés les tangentes à chacune des coniques γ, γ' aux points communs D, E, F, G.

2) Chacun des sommets du quadrilatère defg est le centre de deux perspectivités dans lesquelles les coniques γ, γ' sont des figures correspondantes; les axes de ces perspectivités sont les côtés du quadrangle DEFG.

3) Il résulte aussi des équations (1) que les coniques γ, γ' se correspondent dans chacune des quatre polarités dont la conique directrice est l'une ou l'autre des coniques représentées par les équations

$$(11)\qquad \pm\sqrt{a_1 a'_1}\,X_1^2 \pm \sqrt{a_2 a'_2}\,X_2^2 \pm \sqrt{a_3 a'_3}\,X_3^2 = 0.$$

4) Le triangle ABC est un triangle polaire pour toutes les coniques du faisceau ponctuel (7) des coniques circonscrites au quadrangle DEFG. En prenant le point D comme quatrième point fondamental des coordonnées ternaires, les équations des trois couples de côtés opposés du quadrangle DEFG sont

$$X_2^2 - X_3^2 = 0, \qquad X_3^2 - X_1^2 = 0, \qquad X_1^2 - X_2^2 = 0$$

et l'équation (7) du faisceau ponctuel des coniques circonscrites à ce quadrangle peut être remplacée par

$$X_2^2 - X_3^2 + k\left(X_3^2 - X_1^2\right) = 0,$$

dans laquelle k est un paramètre arbitraire.

(6) Si

$$x = 0 \text{ et } y = 0, \qquad z = 0 \text{ et } t = 0$$

sont les équations de deux couples de côtés opposés du quadrangle DEFG, l'équation du faisceau ponctuel des coniques circonscrites au quadrangle peut également s'écrire

$$xy + kzt = 0.$$

5) Le triangle abc est un triangle polaire commun à toutes les coniques du faisceau tangentiel (8) des coniques inscrites au quadrilatère defg. En prenant la droite d comme quatrième droite fondamentale des coordonnées ternaires, les équations des trois couples de sommets opposés du quadrilatère defg sont

$$x_2^2 - x_3^2 = 0, \qquad x_3^2 - x_1^2 = 0, \qquad x_1^2 - x_2^2 = 0$$

et l'équation (8) du faisceau tangentiel des coniques inscrites à ce quadrilatère peut être remplacée par

$$x_2^2 - x_3^2 + k\left(x_3^2 - x_1^2\right) = 0,$$

dans laquelle k est un paramètre arbitraire.

(7) Si

$$X = 0 \text{ et } Y = 0, \qquad Z = 0 \text{ et } T = 0$$

sont les équations de deux couples de sommets opposés du quadrilatère defg, l'équation du faisceau tangentiel des coniques inscrites à ce quadrilatère peut également s'écrire

$$XY + kZT = 0$$

(voir II, n° 88).

3° Second cas: La collinéation est une perspectivité dont le centre est le point A et dont l'axe est une droite a ne passant pas par le point A.

Tout point B pris sur la droite a a la même polaire b par rapport aux coniques γ, γ'; cette droite passe par le point A et si elle coupe la droite a au point C, la droite c ou AB est la polaire du point C par rapport aux deux coniques. On peut supposer les points B, C différents l'un de l'autre et le triangle ABC ou abc est un triangle polaire commun aux deux coniques γ, γ'; en le prenant comme triangle fondamental des coordonnées ternaires, les équations (1) à (5) écrites dans le cas précédent restent applicables. Cependant, comme dans le cas actuel, l'équation (5) doit avoir une racine simple correspondant au point A et une racine double correspondant aux points de la droite a, il faut qu'on ait

$$a_1 : a'_1 \neq a_2 : a'_2 = a_3 : a'_3.$$

Les équations ponctuelles et les équations tangentielles des coniques γ, γ' peuvent donc s'écrire

$$(1)\qquad a_1 X_1^2 + a_2 X_2^2 + a_3 X_3^2 = 0, \qquad a'_1 X_1^2 + a_2 X_2^2 + a_3 X_3^2 = 0$$

et

$$(2)\qquad \frac{1}{a_1}x_1^2 + \frac{1}{a_2}x_2^2 + \frac{1}{a_3}x_3^2 = 0, \qquad \frac{1}{a'_1}x_1^2 + \frac{1}{a_2}x_2^2 + \frac{1}{a_3}x_3^2 = 0.$$

Les équations

$$(3)\qquad (a_1 - k a'_1)X_1^2 + (1-k)(a_2 X_2^2 + a_3 X_3^2) = 0$$

et

$$(4)\qquad \left(\frac{k}{a_1} - \frac{1}{a'_1}\right)x_1^2 + (k-1)\left(\frac{1}{a_2}x_2^2 + \frac{1}{a_3}x_3^2\right) = 0,$$

dans lesquelles k est un paramètre arbitraire, représentent, la première, une infinité de coniques passant par les points communs aux coniques γ, γ'; la seconde, une infinité de coniques tangentes aux tangentes communes aux coniques γ, γ'. Mais en remplaçant dans l'équation (4) le paramètre k par un autre paramètre $\frac{a_1}{k a_1'}$, ces équations peuvent s'écrire

$$(5) \qquad \frac{a_1 - k a_1'}{1-k} X_1^2 + a_2 X_2^2 + a_3 X_3^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{1-k}{a_1 - k a_1'} x_1^2 + \frac{1}{a_2} x_2^2 + \frac{1}{a_3} x_3^2 = 0;$$

il en résulte que ces équations représentent les mêmes coniques; ces coniques passent donc par les points communs aux coniques γ, γ' et sont, en même temps, tangentes aux tangentes communes à ces deux coniques. On dit qu'elles forment un faisceau de coniques à la fois ponctuel et tangentiel.
En annulant les discriminants des équations (5) on trouve que les équations des coniques dégénérées du faisceau considéré comme un faisceau ponctuel sont

$$(6) \qquad X_1^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad a_2 X_2^2 + a_3 X_3^2 = 0$$

et que les équations des coniques dégénérées du faisceau considéré comme un faisceau tangentiel sont

$$(7) \qquad x_1^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{a_2} x_2^2 + \frac{1}{a_3} x_3^2 = 0.$$

Les équations (6) représentent respectivement deux droites confondues avec la droite a et deux droites distinctes e, f issues du point A et formant un groupe harmonique avec les droites b, c. Les équations (7) représentent respectivement deux points confondus avec le point A et les points distincts E, F où les droites e, f coupent la droite a. Il résulte de là que les coniques γ, γ' sont tangentes aux droites e, f aux points E, F.

Remarques. — 1) Tout triangle dont les sommets sont le point A et dont les autres sommets partagent harmoniquement le segment rectiligne EF est un triangle polaire commun aux coniques γ, γ' et aux coniques du faisceau représenté par les équations (5).

2) Les coniques γ, γ' se correspondent dans quatre perspectivités; le point A et la droite a sont le centre et l'axe de deux de ces perspectivités; le point E et la droite f, le point F et la droite e sont respectivement les centres et les axes des deux autres.

3) Les coniques γ, γ' se correspondent dans les quatre polarités dont les coniques directrices sont déterminées par l'une ou l'autre des équations

$$(8) \qquad \pm\sqrt{a_1 a_1'}\, X_1^2 \pm a_2 X_2^2 \pm a_3 X_3^2 = 0.$$

4) En mettant le quatrième point fondamental D des coordonnées ternaires sur l'une des droites AE, AF, les équations ponctuelle et tangentielle du faisceau des coniques tangentes à ces deux droites aux points E, F s'écrivent

$$(9) \qquad k X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 = 0, \qquad x_1^2 + k x_2^2 - k x_3^2 = 0,$$

k désignant un paramètre arbitraire dont chaque valeur correspond à une même conique dans les deux équations.

5) Quand on prend le triangle AEF ou aef comme triangle fondamental des coordonnées ternaires, les équations précédentes sont remplacées par les suivantes

$$k X_1^2 + 2 X_2 X_3 = 0, \qquad x_1^2 + 2k\, x_2 x_3 = 0,$$

chaque valeur de k correspondant encore à une même conique dans les deux équations (Voir II, n° 90)

4° Troisième cas: La collinéation a pour éléments doubles correspondants le sommet A et le côté opposé a, le sommet B et le côté adjacent c du triangle ABC ou abc.

Les points A, B sont donc les seuls points ayant la même polaire pour les coniques γ, γ'; ces polaires sont la droite a pour le point A et la droite c pour le point B, de sorte que les deux coniques sont tangentes à la droite c au point B. Lorsque le point C est un point arbitraire de la droite a et que le triangle ABC est le triangle

fondamental des coordonnées ternaires, les équations ponctuelles des deux coniques sont

(1) $$a_1X_1^2 + a_3X_3^2 + 2b_1X_2X_3 = 0, \qquad a_1'X_1^2 + a_3'X_3^2 + 2b_1'X_2X_3$$

dont tous les coefficients sont différents de zéro. Les équations entre les points homologues X, X' de la collinéation qui est le produit des deux polarités sont

(2) $$a_1'X_1' = a_1X_1, \qquad b_1'X_3' = b_1X_3, \qquad a_3'X_3' + b_1'X_2' = a_3X_3 + b_1X_2$$

et les équations aux points doubles de cette collinéation sont

(3) $$(a_1 - k\,a_1')X_1 = 0, \quad (b_1 - k\,b_1')X_3 = 0, \quad (a_3 - k\,a_3')X_3 + (b_1 - k\,b_1')X_2 = 0,$$

dans lesquelles k doit être remplacé par les racines de l'équation

(4) $$(a_1 - k\,a_1')(b_1 - k\,b_1')^2 = 0.$$

Cette équation devant avoir une racine simple et une racine double correspondant respectivement au point A et au point B, il faut qu'on ait

(5) $$a_1 : a_1' \neq b_1 : b_1' \qquad \text{et} \qquad a_1 : a_3' \neq b_1 : b_1'.$$

L'équation

(6) $$(a_1 - k\,a_1')X_1^2 + (a_3 - k\,a_3')X_3^2 + 2(b_1 - k\,b_1')X_2X_3 = 0$$

dans laquelle k est un paramètre arbitraire, représente une infinité de coniques passant par les points communs aux coniques γ, γ' et on dit que ces coniques forment un faisceau ponctuel. En annulant le discriminant de l'équation précédente, on retrouve l'équation (4); le faisceau ponctuel (6) contient donc deux coniques dégénérées dont les équations sont

(7) $$\left(\frac{a_3}{a_1} - \frac{a_3'}{a_1'}\right)X_3^2 + 2\left(\frac{b_1}{a_1} - \frac{b_1'}{a_1'}\right)X_2X_3 = 0 \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{a_1}{b_1} - \frac{a_1'}{b_1'}\right)X_1^2 + \left(\frac{a_3}{b_1} - \frac{a_3'}{b_1'}\right)X_3^2 = 0.$$

Ces équations représentent, la première, deux droites différentes issues du point A et dont l'une est la droite c; la seconde, deux droites différentes issues du point B et formant un groupe harmonique avec les droites a, c. Il en résulte que les coniques γ, γ' sont tangentes l'une à l'autre au point B où leur tangente commune est la droite c et qu'elles se coupent en deux points différents E, F sur une droite issue du point A. La position du point C sur la droite a étant arbitraire, on peut supposer que ce point est situé sur la droite AEF et, en mettant le quatrième point fondamental des coordonnées ternaires sur l'une des droites BE ou BF, les équations ponctuelles des coniques γ, γ' deviennent

(8) $$X_1^2 - X_3^2 + 2b_1X_2X_3 = 0, \qquad X_1^2 - X_3^2 + 2b_1'X_2X_3 = 0$$

avec

(9) $$b_1 \neq b_1'.$$

Les équations tangentielles des coniques sont

(10) $$b_1^2x_1^2 + x_2^2 + 2b_1x_2x_3 = 0, \qquad b_1'^2x_1^2 + x_2^2 + 2b_1'x_2x_3 = 0.$$

L'équation

(11) $$(b_1^2 + k\,b_1'^2)x_1^2 + (1+k)x_2^2 + 2(b_1 + k\,b_1')x_2x_3 = 0$$

dans laquelle k est un paramètre arbitraire, représente une infinité de coniques tangentes aux tangentes communes aux coniques γ, γ'. On dit que toutes ces coniques forment un faisceau tangentiel de coniques. Les coniques dégénérées de ce faisceau tangentiel correspondent aux valeurs de k pour lesquelles

(12) $$(b_1^2 + k\,b_1'^2)(b_1 + k\,b_1')^2 = 0$$

et leurs équations sont

(13) $$(b_1 + b'_1)x_2^2 + 2b_1b'_1x_2x_3 = 0, \qquad b_1b'_1x_1^2 - x_2^2 = 0.$$

La première est formée de deux points, le point B et un point G différent du point B sur la droite a ; la seconde est formée de deux points différents H, K situés sur la droite AB et formant un groupe harmonique avec les points A, B. Il en résulte que les coniques γ, γ' ont trois tangentes communes, la droite c, à laquelle elles sont tangentes au point B, et les droites e ou GH, f ou GK. (voir II, n° 89).

Remarques.– 1) Les coniques γ, γ' se correspondent dans sept perspectivités dont le centre et les axes sont le point B et la droite E, F, le point ef et l'une ou l'autre des droites c ou E F, le point ce et l'une ou l'autre des droites BE ou BF, le point fc et l'une ou l'autre des droites BE, BF.

2) L'équation du faisceau ponctuel des coniques passant par les points E, F et tangentes à la droite c au point B peut s'écrire

(14) $$X_1^2 - X_3^2 + 2kX_2X_3 = 0,$$

k désignant un paramètre arbitraire.

4) Si

(16) $x = 0$ et $y = 0$, $z = 0$ et $t = 0$

sont les équations des droites BE et BF, c et E F, l'équation du même faisceau ponctuel est

(17) $$xy + kzt = 0,$$

k désignant un paramètre arbitraire.

3) L'équation du faisceau tangentiel des coniques tangentes aux droites e, f et tangentes au point B à la droite c peut s'écrire

$$x_1^2 - x_2^2 + 2kx_2x_3 = 0, \qquad (15)$$

k désignant un paramètre arbitraire.

5) Si

$X = 0$ et $Y = 0$, $Z = 0$ et $T = 0$ (18)

sont les équations des points ce et cf, B et ef, l'équation du même faisceau tangentiel est

$$XY + kZT = 0, \qquad (19)$$

k désignant un paramètre arbitraire.

5° Quatrième cas : La collinéation a un seul point double A et une seule droite double b passant par le point A.

Le point A est le seul point ayant la même polaire par rapport aux deux coniques γ, γ' ; cette polaire commune est la droite b et, comme elle passe par le point A, elle est la tangente commune en ce point aux deux coniques. Si BC est la seconde tangente menée à la conique γ d'un point encore arbitraire C de la droite b, en prenant le triangle ABC pour triangle fondamental des coordonnées ternaires, on peut donner au quatrième point fondamental D de ces coordonnées une position telle que l'équation ponctuelle de la conique γ soit

(1) $$X_3^2 + 2X_1X_2 = 0,$$

tandis que celle de la conique γ' doit être de la forme

(2) $$a_2X_2^2 + a_3X_3^2 + 2b_1X_2X_3 + 2b_3X_1X_2 = 0$$

dans laquelle a_3 et b_3 doivent être différents de zéro pour que cette conique ne se décompose pas en droites. Les équations entre les points homologues X, X' dans la collinéation qui est le produit des deux polarités sont

(3) $$X'_1 = b_3X_1 + a_2X_2 + b_1X_3, \qquad X'_2 = b_3X_2, \qquad X'_3 = b_1X_2 + a_3X_3$$

et les équations aux points doubles de cette collinéation sont

(4) $$(b_3 - k)X_1 + a_2X_2 + b_1X_3 = 0, \qquad (b_3 - k)X_2 = 0, \qquad b_1X_2 + (a_3 - k)X_3 = 0$$

dans lesquelles k doit être remplacé par les racines de l'équation

(5) $$(b_3 - k)^2(a_3 - k) = 0.$$

Cette équation devant avoir une racine triple correspondant au point A et à la droite b, il faut qu'on ait

(6) $$a_3 = b_3 \qquad \text{et} \qquad b_1 \neq 0.$$

Il en résulte que l'équation de la conique γ' peut s'écrire

(7) $$a_2X_2^2 + X_3^2 + 2b_1X_2X_3 + 2X_1X_2 = 0.$$

L'équation

(8) $$a_2X_2^2+(1-k)X_3^2+2b_1X_2X_3+2(1-k)X_1X_2=0,$$

dans laquelle k est un paramètre arbitraire, représente une infinité de coniques passant par les points communs aux coniques γ, γ'. On dit que toutes ces coniques forment un faisceau ponctuel de coniques. En annulant le discriminant de cette équation, on obtient l'équation

(9) $$(1-k)^3=0.$$

Le faisceau ponctuel actuel ne contient donc qu'une seule conique dégénérée dont l'équation est

(10) $$a_2X_2^2+2b_1X_2X_3=0$$

et qui est formée de deux droites distinctes, la droite b et une droite issue du point A. Comme la droite b est tangente au point A aux coniques γ, γ', celles-ci n'ont que deux points communs, le point A où elles sont tangentes l'une à l'autre, et un second point, où elles ont des tangentes distinctes. On peut supposer que le second point est le point B; de cette manière, a_2 devient nul et l'équation ponctuelle de la conique γ' se réduit à

(11) $$X_3^2+2b_1X_2X_3+2X_1X_2=0.$$

En considérant les équations tangentielles des deux coniques γ, γ', on trouve immédiatement que ces coniques ont une seconde tangente commune c différente de la tangente commune b.

Remarques. – 1) Les coniques γ, γ' se correspondent dans deux perspectivités dont les centres et les axes sont le point A et la droite c, le point bc et la droite c.

2) On dit que les coniques γ, γ' ont un contact du second ordre au point A sur la droite b.

3) L'équation du faisceau ponctuel des coniques ayant un contact du second ordre au point A sur la droite b et passant par le point B peut s'écrire

(12) $$X_3^2+2kX_2X_3+2X_1X_2=0,$$

k désignant un paramètre arbitraire.

4) L'équation du faisceau tangentiel des coniques ayant un contact du second ordre sur la droite a au point B et tangentes à la droite b peut s'écrire

$$x_3^2+2kx_2x_3+2x_1x_2=0, \quad (13)$$

k désignant un paramètre arbitraire.

(Voir II, n°91, 1° et 2°)

6° Cinquième cas: La collinéation se réduit à une perspectivité ayant pour centre le point A et pour axe la droite b passant par le point A.

Les coniques γ, γ' sont encore tangentes à la droite b au point A et les équations (1) à (5) écrites dans le cas précédent sont encore applicables. Mais, dans le cas actuel, la racine triple de l'équation (5) doit correspondre à tous les points de la droite b dans les équations (4) et il faut qu'on ait

(1) $$a_3=b_3, \qquad b_1=0, \qquad a_2\neq 0.$$

De cette manière, les équations ponctuelles et les équations tangentielles des coniques γ, γ' sont

(2) $$X_3^2+2X_1X_2=0, \qquad a_2X_2^2+X_3^2+2X_1X_2=0$$

et

(3) $$x_3^2+2x_1x_2=0, \qquad a_2x_1^2-x_3^2-2x_1x_2=0.$$

Les équations

(4) $$a_2X_2^2+(1-k)(X_3^2+2X_1X_2)=0, \qquad a_2x_1^2-(1-k)(x_3^2+2x_1x_2)=0 \quad (5)$$

représentent les mêmes coniques qui passent donc par les points communs aux coniques γ, γ' et qui sont en même temps tangentes aux tangentes communes à ces deux coniques. On dit que toutes ces coniques forment un faisceau à la fois ponctuel et tangentiel. En annulant les discriminants des deux équations (4) et (5) du faisceau, on obtient des équations en k n'ayant qu'une seule racine

(6) $$k = 1.$$

Le faisceau considéré comme faisceau ponctuel (4) ne contient donc qu'une seule conique dégénérée formée de deux droites confondues avec la droite b, et, considéré comme faisceau tangentiel (5), il ne contient qu'une seule conique dégénérée formée de deux points confondus avec le point A. Il en résulte que le point A est le seul point commun et la droite b la seule tangente commune aux coniques γ, γ'.

Remarques. – 1) Les coniques γ, γ' se correspondent dans une perspectivité dont le centre et l'axe sont le point A et la droite b.

2) On dit que les coniques γ, γ' ont un contact du troisième ordre au point A sur la droite b.

3) En remplaçant $\frac{a_2}{1-k}$ par k, les équations (4) et (5) du faisceau ponctuel et tangentiel des coniques ayant un contact de troisième ordre au point A sur la droite b deviennent

(7) $$k X_2^2 + X_3^2 + 2 X_1 X_2 = 0 \qquad \text{et} \qquad k x_1^2 - x_3^2 - 2 x_1 x_2 = 0,$$ (8)

chaque valeur du paramètre k correspond à la même conique dans les deux faisceaux.

§II: Formes fondamentales de troisième espèce.

A. Collinéation quelconque.

22. Recherche des éléments doubles. – On considère deux espaces à trois dimensions $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ superposés que l'on rapporte aux mêmes coordonnées quaternaires et entre lesquels on établit une collinéation dont les équations sont

(1) $$X_i' = a_{i1} X_1 + a_{i2} X_2 + a_{i3} X_3 + a_{i4} X_4 \qquad \text{ou} \qquad \xi_i = a_{1i} \xi_1' + a_{2i} \xi_2' + a_{3i} \xi_3' + a_{4i} \xi_4',$$ (2)

pour $i = 1, 2, 3, 4$, avec la condition

(3) $$D = | a_{11} \quad a_{22} \quad a_{33} \quad a_{44} | \neq 0.$$

Les points doubles et les plans doubles de cette collinéation sont déterminés par les équations

(4)
$$\begin{aligned}
&(a_{11}-k) X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3 + a_{14} X_4 = 0,\\
&a_{21} X_1 + (a_{22}-k) X_2 + a_{23} X_3 + a_{24} X_4 = 0,\\
&a_{31} X_1 + a_{32} X_2 + (a_{33}-k) X_3 + a_{34} X_4 = 0,\\
&a_{41} X_1 + a_{42} X_2 + a_{43} X_3 + (a_{44}-k) X_4 = 0,
\end{aligned}$$
et
$$\begin{aligned}
&(a_{11}-k) \xi_1 + a_{21} \xi_2 + a_{31} \xi_3 + a_{41} \xi_4 = 0,\\
&a_{12} \xi_1 + (a_{22}-k) \xi_2 + a_{32} \xi_3 + a_{42} \xi_4 = 0,\\
&a_{13} \xi_1 + a_{23} \xi_2 + (a_{33}-k) \xi_3 + a_{43} \xi_4 = 0,\\
&a_{14} \xi_1 + a_{24} \xi_2 + a_{34} \xi_3 + (a_{44}-k) \xi_4 = 0,
\end{aligned}$$ (5)

si k est un nombre différent de zéro vérifiant l'équation du quatrième degré (dite l'équation en k)

(6) $$D(k) = \begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22}-k & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-k & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}-k \end{vmatrix} = 0.$$

Si on voulait déterminer les droites doubles, il faudrait établir les équations de la collinéation entre droites à l'aide des formules (1) ou (2); les équations aux droites doubles formeraient un système de six équations linéaires dont la condition de compatibilité serait une équation du sixième degré. Mais quand on aura déterminé les points et les plans doubles, on pourra remplacer les formules (1) et (2) par des formules plus simples et se servir de celles-ci pour rechercher les droites doubles.

23. Théorème. *Les valeurs des racines de l'équation en k ne sont pas altérées par une transformation des coordonnées quaternaires.* – Voir le n° 2.

24. Théorème. *Quand deux points doubles ou deux plans doubles correspondent à des racines inégales de l'équation en k, ils sont différents l'un de l'autre.* – Voir le n° 3.

25. Théorème. Quand un point double et un plan double correspondent à deux racines inégales de l'équation en k, ils appartiennent l'un à l'autre. _ Voir le n° 4.
26. Théorème. Si le point double A et le plan double α correspondent à une même racine simple de l'équation en k, le point double A n'est pas dans le plan double α. _ Voir le n° 5.
27. Théorème. Si le point double A correspond à une racine multiple de l'équation en k, il y a au moins un plan double qui passe par le point A et qui correspond à la même valeur de k. Voir le n° 6.
28. Théorème. A une racine simple de l'équation en k, ne correspondent qu'un seul point double et un seul plan double. _ Voir le n° 7.
29. 1°. Corollaire. _ Quand les quatre racines de l'équation en k sont simples, il y a quatre points doubles et quatre plans doubles qui sont les sommets et les faces d'un tétraèdre avec la condition que chaque sommet et la face opposée correspondent à une même valeur de k.
2°. Remarques _ a. _ En prenant le tétraèdre des éléments doubles comme tétraèdre fondamental des coordonnées quaternaires, les équations de la collinéation entre points et entre plans sont, si k_1, k_2, k_3, k_4 sont les valeurs de k,

(A) $$x'_1 = k_1 x_1, \qquad x'_2 = k_2 x_2, \qquad x'_3 = k_3 x_3, \qquad x'_4 = k_4 x_4$$
et
(A') $$\xi_1 = k_1 \xi'_1, \qquad \xi_2 = k_2 \xi'_2, \qquad \xi_3 = k_3 \xi'_3, \qquad \xi_4 = k_4 \xi'_4$$

b. Les équation de la collinéation entre droites sont, pour $ij = 12, 13, 14, 34, 42, 23$.
$$x'_{ij} = k_i k_j x_{ij} \qquad \text{ou} \qquad \xi_{ij} = k_i k_j \xi'_{ij}$$
En les prenant sous leur première forme, les équations aux droites doubles sont
$$(k_i k_j - \lambda)\, x_{ij} = 0.$$
Les droites doubles sont les arêtes du tétraèdre des points et des plans doubles, même si deux des produits $k_i k_j$ sont égaux. 30. Problème. Déterminer les éléments doubles de la collinéation lorsque l'équation en k a deux racines simples k_1, k_2 et une racine double k_3.
Les théorèmes précédents de prendre le tétraèdre fondamental ABCD ou $\alpha\beta\gamma\delta$ des coordonnées quaternaires pour que les sommets et les faces remplissent les conditions suivantes: le sommet A et la face α sont le seul point double et le seul plan double pour $k = k_1$; le sommet B et la face β sont le seul point double et le seul plan double pour $k = k_2$; le sommet C et la face δ sont un point double et un plan double pour $k = k_3$. Les équations (4) et (5) aux points doubles et aux plans doubles deviennent

(7) $$(k_1 - k)x_1 = 0, \qquad (k_2 - k)x_2 = 0, \qquad (k_3 - k)x_3 + a_{34}x_4 = 0, \qquad (k_3 - k)x_4 = 0$$
et
$$(k_1 - k)\xi_1 = 0, \qquad (k_2 - k)\xi_2 = 0, \qquad (k_3 - k)\xi_3 = 0, \qquad a_{34}\xi_3 + (k_3 - k)\xi_4 = 0$$

Il y a deux cas à distinguer: 1° $a_{34} = 0$. Tous les points de la ponctuelle $\alpha\beta \equiv CD$ sont des points doubles et tous les points de la feuillée $AB \equiv \gamma\delta$ sont des plans doubles correspondant à k_3. Les équations de la collinéation entre points et entre plans se réduit à

(B) $$x'_1 = k_1 x_1, \qquad x'_2 = k_2 x_2, \qquad x'_3 = k_3 x_3, \qquad x''_4 = k_3 x_4$$
et
(B') $$\xi_1 = k_1 \xi'_1, \qquad \xi_2 = k_2 \xi'_2, \qquad \xi_3 = k_3 \xi'_3, \qquad \xi_4 = k_3 \xi'_4.$$

Les équations de la collinéation entre droites sont ce que deviennent celles trouvées dans le numéro précédent quand on fait $k_4 = k_3$. Les droites doubles sont la droite AB, la droite CD, les rayons du faisceau A dans le plan β et les rayons du faisceau B dans le plan α.
2° $a_{34} \neq 0$. Le point C et le plan δ sont le seul point double et le seul plan double pour $k = k_3$. Les équations de la collinéation entre les points x, x' sont devenues

$$X'_1 = k_1 X_1, \qquad X'_2 = k_2 X_2, \qquad X'_3 = k_3 X_3 + a_{34} X_4, \qquad X'_4 = k_3 X_4.$$

Quand le point X coïncide avec le point D $(0,0,0,1)$, le point X' est le point D' $(0,0,a_{34},k_3)$ différent des points C, D sur la droite CD. En mettant le cinquième point fondamental des coordonnées quaternaires dans le plan ABD', a_{34} devient égal à k_3 et les équations de la collinéation entre points et entre plans se réduisent à

(C) $\qquad X'_1 = k_1 X_1, \qquad X'_2 = k_2 X_2, \qquad X'_3 = k_3 (X_3 + X_4), \qquad X'_4 = k_3 X_4,$

et

(C') $\qquad \xi_1 = k_1 \xi'_1, \qquad \xi_2 = k_2 \xi'_2, \qquad \xi_3 = k_3 \xi'_3, \qquad \xi_4 = k_3 (\xi'_3 + \xi'_4)$

Les équations en coordonnées ponctuelles de la collinéation entre droites x, x' sont

$$X'_{12} = k_1 k_2 X_{12}, \quad X'_{13} = k_1 k_3 (X_{13} + X_{14}), \quad X'_{14} = k_1 k_3 X_{14}, \quad X'_{34} = k_3^2 X_{34}, \quad X'_{42} = k_2 k_3 X_{42}, \quad X'_{23} = k_2 k_3 (X_{23} - X_{42}).$$

Les équations aux droites doubles sont

$(k_1 k_2 - \lambda) X_{12} = 0,\ (k_1 k_3 - \lambda) X_{13} + k_1 k_3 X_{14} = 0,\ (k_1 k_3 - \lambda) X_{14} = 0,\ (k_3^2 - \lambda) X_{34} = 0,\ (k_2 k_3 - \lambda) X_{42} = 0,\ (k_2 k_3 - \lambda) X_{23} - k_2 k_3 X_{42} = 0,$

pour

$$\lambda = k_1 k_2,\ k_1 k_3,\ k_3^2 \text{ ou } k_2 k_3.$$

Les droites doubles sont les quatre droites AB, BC, CD, CD, même si $k_1 k_2 = k_3^2$.

31. **Problème.** *Déterminer les éléments doubles de la collinéation lorsque l'équation en k a deux racines doubles k_1, k_2.*

On peut prendre le tétraèdre fondamental ABCD ou $\alpha\beta\gamma\delta$ des coordonnées quaternaires pour que le sommet A et la face γ, le sommet B et la face δ soient des éléments doubles correspondant respectivement à k_1 et à k_2. Les équations (4) et (5) aux points doubles et aux plans doubles deviennent

(9) $(k_1 - k) X_1 + a_{13} X_3 + a_{14} X_4 = 0,\ (k_2 - k) X_2 + a_{23} X_3 + a_{24} X_4 = 0,\ (k_1 - k) X_3 = 0,\ (k_2 - k) X_4 = 0$

et

(10) $(k_1 - k)\xi_1 = 0,\ (k_2 - k)\xi_2 = 0,\ a_{13}\xi_1 + a_{23}\xi_2 + (k_1 - k)\xi_3 = 0,\ a_{14}\xi_1 + a_{24}\xi_2 + (k_2 - k)\xi_4 = 0.$

En y faisant $k = k_1$ ou $k = k_2$, elles se réduisent à

(11) $\quad a_{13} X_3 = 0,\ (k_2 - k_1) X_2 + a_{23} X_3 = 0;\ X_4 = 0 \quad$ et $\quad \xi_2 = 0,\ a_{13}\xi_1 = 0,\ a_{14}\xi_1 + (k_2 - k_1)\xi_4 = 0 \quad$ (12)

ou

(13) $\quad (k_1 - k_2) X_1 + a_{14} X_4 = 0,\ a_{24} X_4 = 0,\ X_3 = 0 \quad$ et $\quad \xi_1 = 0,\ a_{23}\xi_2 + (k_1 - k_2)\xi_3 = 0,\ a_{24}\xi_2 = 0. \quad$ (14)

Plusieurs cas sont à distinguer. 1° $a_{13} = a_{24} = 0$. Les équations (11) définissent une ponctuelle de points doubles dont le support est une droite passant par le point A, mais différente de la droite AB dans le plan δ. On peut supposer que cette droite coïncide avec l'arête AC du tétraèdre fondamental des coordonnées quaternaires, ce qui donne

$$a_{23} = 0.$$

Les équations (12) définissent une feuillée de plans doubles dont le support joint le point B à un point différent du point A dans le plan γ. On peut supposer que ce support est l'arête BD du tétraèdre fondamental des coordonnées quaternaires, ce qui donne

$$a_{14} = 0.$$

Les équations (13) définissent une ponctuelle de points doubles dont le support est la droite BD et les équations (14) définissent une feuillée de plans doubles dont le support est la droite AC.

Les équations de la collinéation entre points et entre plans deviennent

(D) $\qquad X'_1 = k_1 X_1, \qquad X'_2 = k_2 X_2, \qquad X'_3 = k_1 X_3, \qquad X'_4 = k_2 X_4$

et

(D') $\qquad \xi_1 = k_1 \xi'_1, \qquad \xi_2 = k_2 \xi'_2, \qquad \xi_3 = k_1 \xi'_3, \qquad \xi_4 = k_2 \xi'_4.$

Les équations en coordonnées ponctuelles de la collinéation entre droites x, x' sont

$$X'_{12}=k_1k_2X_{12},\quad X'_{13}=k_1^2X_{13},\quad X'_{14}=k_1k_2X_{14},\quad X'_{34}=k_1k_2X_{34},\quad X'_{42}=k_2^2X_{42},\quad X'_{23}=k_1k_2X_{23}.$$

Les équations aux droites doubles sont

$$(k_1k_2-\lambda)X_{12}=0,(k_1^2-\lambda)X_{13}=0,(k_1k_2-\lambda)X_{14}=0,(k_1k_2-\lambda)X_{34}=0,(k_2^2-\lambda)X_{42}=0,(k_1k_2-\lambda)X_{23}=0,$$

pour

$$\lambda=k_1k_2,\ k_1^2 \text{ ou } k_2^2.$$

Les droites doubles sont les droites AC, BD et celles qui s'appuient sur ces deux droites, même si $k_1^2=k_2^2$.

2° $a_{13}=0$ et $a_{24}\neq 0$, [ou $a_{13}\neq 0$ et $a_{24}=0$]. Les conclusions énoncées au 1° pour les équations (11) et (12) sont encore applicables : la droite AC est le support d'une ponctuelle de points doubles, la droite BD est le support d'une feuillée de plans doubles et les coefficients a_{23}, a_{14} des équations de la collinéation sont nuls. Mais il résulte des équations (13) et (14) que le point B et le plan δ sont le seul point double et le seul plan double pour $k=k_2$. Les équations de la collinéation entre les points X, X' sont devenues

$$X'_1=k_1X_1,\quad X'_2=k_2X_2+a_{24}X_4,\quad X'_3=k_1X_3,\quad X'_4=k_2X_4.$$

Quand le point X coïncide avec le point D(0,0,0,1), le point X' est un point D'$(0, a_{24}, 0, k_2)$ différent des points B, D sur la droite BD. En mettant le cinquième point fondamental des coordonnées quaternaires dans le plan ACD', a_{24} devient égal à k_2 et les équations de la collinéation entre points et entre plans se réduisent à

(E) $$X'_1=k_1X_1,\quad X'_2=k_2(X_2+X_4),\quad X'_3=k_1X_3,\quad X'_4=k_2X_4$$

et

(E') $$\xi_1=k_1\xi'_1,\quad \xi_2=k_2\xi'_2,\quad \xi_3=k_1\xi'_3,\quad \xi_4=k_2(\xi'_2+\xi'_4).$$

Les équations en coordonnées ponctuelles de la collinéation entre droites x, x' sont

$$X'_{12}=k_1k_2(X_{12}+X_{14}),\ X'_{13}=k_1^2X_{13},\ X'_{14}=k_1k_2X_{14},\ X'_{34}=k_1k_2X_{34},\ X'_{42}=k_2^2X_{42},\ X'_{23}=k_1k_2(X_{23}-X_{34}).$$

Les équations aux droites doubles sont

$$(k_1k_2-\lambda)X_{12}+k_1k_2X_{14}=0,(k_1^2-\lambda)X_{13}=0,(k_1k_2-\lambda)X_{14}=0,(k_1k_2-\lambda)X_{34}=0,(k_2^2-\lambda)X_{42}=0,(k_1k_2-\lambda)X_{23}-k_1k_2X_{34}=0,$$

pour

$$\lambda=k_1k_2,\ k_1^2 \text{ ou } k_2^2.$$

Les droites doubles sont les droites du faisceau B dans le plan δ, la droite AC et la droite BD, même si $k_1^2=k_2^2$.

3° a_{13} et $a_{24}\neq 0$. Le point A et le plan γ, le point B et le plan δ sont les seuls points doubles et les seuls plans doubles correspondant respectivement à $k=k_1$ et à $k=k_2$. Les équations de la collinéation entre les points X, X' sont

$$X'_1=k_1X_1+a_{13}X_3+a_{14}X_4,\qquad X'_2=k_2X_2+a_{23}X_3+a_{24}X_4,\qquad X'_3=k_1X_3,\quad X'_4=k_2X_4.$$

Le plan double δ est le support de deux systèmes plans entre lesquels il existe une collinéation dont les équations sont

$$X'_1=k_1X_1+a_{13}X_3,\qquad X'_2=k_2X_2+a_{23}X_3,\qquad X'_3=k_1X_3$$

et

$$x_1=k_1x'_1,\qquad x_2=k_2x'_2,\qquad x_3=a_{13}x'_1+a_{23}x'_2+k_1x'_3.$$

Les équations aux points doubles et aux droites doubles de cette collinéation sont

$$(k_1-k)X_1+a_{13}X_3=0,\qquad (k_2-k)X_2+a_{23}X_3=0,\qquad (k_1-k)X_3=0$$

et

$$(k_1-k)x_1=0,\qquad (k_2-k)x_2=0,\qquad a_{13}x_1+a_{23}x_2+(k_1-k)x_3=0,$$

dans lesquelles on doit remplacer k par les racines de l'équation

$$(k_1-k)^2(k_2-k)=0.$$

A la racine double $k=k_1$ de cette équation, correspondent le point double A et la droite double AB ; à la racine simple $k=k_2$, correspondent le point double B et une droite double passant par le point A mais différente de la droite AB. On peut supposer cette droite confondue avec la droite AC et alors

$$a_{23}=0.$$

De la même manière, on pourra supposer que la droite BD est une des deux droites doubles de la collinéation existant entre les systèmes plans dont le support est le plan double γ et il en résulte que

$$a_{14}=0.$$

Dans ces conditions les équations entre les points homologues X, X' des espaces collinéaires donnés deviennent

$$X'_1=k_1X_1+a_{13}X_3,\quad X'_2=k_2X_2+a_{24}X_4,\quad X'_3=k_1X_3,\quad X'_4=k_2X_4.$$

Quand le point X est le point $C(0,0,1,0)$, le point X' est le point $C'(a_{13},0,k_1,0)$ différent des points A, C sur la droite AC. Quand le point X est le point $D(0,0,0,1)$, le point X' est le point $D'(0,a_{24},0,k_2)$ différent des points B, D sur la droite BD. En plaçant le cinquième point fondamental E des coordonnées quaternaires sur la droite C'D', on a

$$a_{13}=k_1 \quad \text{et} \quad a_{24}=k_2.$$

De cette manière, les équations de la collinéation entre points et entre plans sont

(F) $$X'_1=k_1(X_1+X_3),\quad X'_2=k_2(X_2+X_4),\quad X'_3=k_1X_3,\quad X'_4=k_2X_4$$

et

(F') $$\xi_1=k_1\xi'_1,\quad \xi_2=k_2\xi'_2,\quad \xi_3=k_1(\xi'_1+\xi'_3),\quad \xi_4=k_2(\xi'_2+\xi'_4).$$

Les droites doubles sont les droites AB, AC, BD, même si $k_1^2=k_2^2$.

32. Problème. Déterminer les éléments doubles de la collinéation lorsque l'équation en k a une racine simple k_1 et une racine triple k_2.

On peut prendre le tétraèdre fondamental ABCD ou $\alpha\beta\gamma\delta$ des coordonnées quaternaires pour que le sommet A et la face α soient les seuls éléments doubles pour $k=k_1$, tandis que le sommet B et la face γ sont un point double et un plan double pour $k=k_2$. Les équations (4) et (5) aux points doubles et aux plans doubles deviennent

(15) $$(k_1-k)X_1=0,\ (k_2-k)X_2+a_{23}X_3+a_{24}X_4=0,\quad (k_2-k)X_3=0,\quad a_{43}X_3+(k_2-k)X_4=0$$

et

(16) $$(k_1-k)\xi_1=0,\ (k_2-k)\xi_2=0,\quad a_{23}\xi_2+(k_2-k)\xi_3+a_{43}\xi_4=0,\quad a_{24}\xi_2+(k_2-k)\xi_4=0.$$

En y faisant $k=k_2$, elles se réduisent à

(17) $$X_1=0,\quad a_{23}X_3+a_{24}X_4=0,\quad a_{43}X_3=0$$

et

(18) $$\xi_1=0,\quad a_{23}\xi_2+a_{43}\xi_3=0,\quad a_{24}\xi_2=0.$$

Différents cas sont à distinguer. 1° Les équations (17) se réduisent à une seule qui est nécessairement

$$X_1=0.$$

On a donc

$$a_{23}=a_{24}=a_{43}=0$$

et les équations (18) se réduisent à la seule équation

$$\xi_1=0.$$

La solution triple k_2 de l'équation en k correspond à une infinité de points doubles, les points du système plan α et à une infinité de plans doubles, les plans de la gerbe A. La collinéation entre les deux espaces se réduit à une perspectivité de centre A et de plan α ; ses équations sont

(G) $$X'_1 = k_1 X_1, \qquad X'_2 = k_2 X_2, \qquad X'_3 = k_2 X_3, \qquad X'_4 = k_2 X_4$$
et
(G') $$\xi_1 = k_1 \xi'_1 \qquad \xi_2 = k_2 \xi'_2, \qquad \xi_3 = k_2 \xi'_3, \qquad \xi_4 = k_2 \xi'_4.$$

Les droites doubles sont celles du système plan α et de la gerbe A.

2° Les équations (17) se réduisent à deux équations distinctes. Si une de ces équations est
$$X_1 = 0$$
et, dans ce second cas, les équations (17) définissent une ponctuelle de points doubles dont le support est une droite menée par le point B dans le plan α. Or, le support de cette ponctuelle détermine avec le point A un plan double relatif à k_2, et, comme le plan γ est un quelconque des plans doubles pour $k = k_2$, on peut supposer que le support des points doubles est la droite BD; cela permet de faire
$$a_{24} = 0 \qquad \text{et} \qquad a_{23} \text{ ou } a_{43} \neq 0.$$
Dans ces conditions les équations (18) se réduisent à deux équations distinctes
$$\xi_1 = 0, \qquad a_{23}\xi_2 + a_{43}\xi_4 = 0.$$
et il y a une feuillée de plans doubles dont le support va du point A à un point $(0, a_{23}, 0, a_{43})$ de la droite BD Mais ce dernier point est un point double relatif à k_2 et on peut supposer qu'il coïncide avec le point B, ce qui revient à faire
$$a_{23} \neq 0 \qquad \text{et} \qquad a_{43} = 0.$$
Les équations de la collinéation entre les points X, X' deviennent
$$X'_1 = k_1 X_1, \quad X'_2 = k_2 X_2 + a_{23} X_3, \qquad X'_3 = k_2 X_3, \qquad X'_4 = k_2 X_4$$
Quand le point X coïncide avec le point C $(0,0,1,0)$, le point X' est un point C' $(0, a_{23}, k_2, 0)$ différent des points B, C sur la droite BC. On peut supposer que le cinquième point E des coordonnées quaternaires est dans le plan ADC' et a_{23} devient égal à k_2. De cette manière, les équations de la collinéation entre points et entre plans sont

(H) $$X'_1 = k_1 X_1, \quad X'_2 = k_2 (X_2 + X_3), \quad X'_3 = k_2 X_3, \quad X'_4 = k_2 X_4$$
et
(H') $$\xi_1 = k_1 \xi'_1, \quad \xi_2 = k_2 \xi'_2, \quad \xi_3 = k_2 (\xi'_2 + \xi'_3), \quad \xi_4 = k_2 \xi'_4.$$

Les droites doubles sont les droites du faisceau A dans le plan γ et les rayons du faisceau B dans le plan α.

3° Les équations (17) sont distinctes. On a donc
$$a_{24} \neq 0 \qquad \text{et} \qquad a_{43} \neq 0.$$
Dans ce cas, le point B et le plan γ sont le seul point double et le seul plan double pour $k = k_2$. Au plan
$$X'_2 = 0,$$
correspond le plan
$$k_2 X_2 + a_{23} X_3 + a_{24} X_4 = 0$$
qui passe par le point A et ne contient ni le point B ni le point D; on peut supposer que ce plan passe par le point C et par le point $(1,1,1,-1)$, ce qui permet de faire
$$a_{23} = 0 \qquad \text{et} \qquad a_{24} = k_2$$
De même, au plan
$$X'_4 = 0,$$
correspond le plan
$$a_{43} X_3 + k_2 X_4 = 0$$
qui passe par les points A, B, mais ne passe ni par le point C ni par le point D; on peut encore supposer que ce plan passe par le point $(1,1,1,-1)$, ce qui donne
$$a_{43} = k_2.$$

Dans ces conditions, les équations de la collinéation entre points et entre plans sont

(I) $$X'_1 = k_1 X_1,\quad X'_2 = k_2(X_2 + X_4),\quad X'_3 = k_2 X_3,\quad X'_4 = k_2(X_3 + X_4)$$

et

(I') $$\xi_1 = k_1 \xi'_1,\quad \xi_2 = k_2 \xi'_2 \quad \xi_3 = k_2(\xi'_3 + \xi'_4),\quad \xi_4 = k_2(\xi'_2 + \xi'_4).$$

Les droites doubles sont les droites AB et BD.

33. Problème. *Déterminer les éléments doubles de la collinéation lorsque l'équation en k a une racine quadruple k_1.*

On peut supposer que le sommet A et la face β du tétraèdre fondamental ABCD ou $\alpha\beta\gamma\delta$ des coordonnées quaternaires sont un point double et un plan double de la collinéation. Les équations aux points doubles et aux plans doubles deviennent

(19) $$\begin{cases} (k_1 - k)X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + a_{14}X_4 = 0, & (k_1 - k)X_2 = 0, \\ a_{32}X_2 + (a_{33} - k)X_3 + a_{34}X_4 = 0, & a_{42}X_2 + a_{43}X_3 + (a_{44} - k)X_4 = 0 \end{cases}$$

et

(20) $$\begin{cases} (k_1 - k)\xi_1 = 0, & a_{12}\xi_1 + (k_1 - k)\xi_2 + a_{32}\xi_3 + a_{42}\xi_4 = 0, \\ a_{13}\xi_1 + (a_{33} - k)\xi_3 + a_{43}\xi_4 = 0, & a_{14}\xi_1 + a_{34}\xi_3 + (a_{44} - k)\xi_4 = 0. \end{cases}$$

Pour $k = k_1$; elles se réduisent à

(21) $$a_{12}X_2 + a_{13}X_1 + a_{14}X_4 = 0,\quad a_{32}X_2 + (a_{33} - k_1)X_3 + a_{34}X_4 = 0,\quad a_{42}X_2 + a_{43}X_3 + (a_{44} - k_1)X_4 = 0$$

et

(22) $$a_{12}\xi_1 + a_{32}\xi_3 + a_{42}\xi_4 = 0,\quad a_{13}\xi_1 + (a_{33} - k_1)\xi_3 + a_{43}\xi_4 = 0,\quad a_{14}\xi_1 + a_{34}\xi_3 + (a_{44} - k_1)\xi_4 = 0.$$

D'autre part, l'équation en k se réduit à

$$(k_1 - k)^2 . \begin{vmatrix} a_{33} - k & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} - k \end{vmatrix} = 0$$

et il en résulte que k_1 est une racine double de l'équation

(23) $$\begin{vmatrix} a_{33} - k & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} - k \end{vmatrix} = 0.$$

Différents cas sont à distinguer : 1° Les équations (21) se réduisent à des identités. Dans ce cas, la collinéation devient la transformation identique dont les équations sont

(J) $$X'_1 = k_1 X_1,\quad X'_2 = k_1 X_2,\quad X'_3 = k_1 X_3,\quad X'_4 = k_1 X_4$$

et

(J') $$\xi_1 = k_1 \xi'_1,\quad \xi_2 = k_1 \xi'_2,\quad \xi_3 = k_1 \xi'_3,\quad \xi_4 = k_1 \xi'_4$$

2° Les équations (21) se réduisent à une seule équation distincte. Dans ce cas, il y a un plan de points doubles et on peut supposer qu'il coïncide avec le plan β, ce qui permet de faire

$$a_{12} \text{ ou } a_{32} \text{ ou } a_{42} \neq 0,\quad a_{13} = a_{43} = a_{14} = a_{34} = 0,\quad a_{33} = a_{44} = k_1.$$

Les équations (22) se réduisent à la seule équation

$$a_{12}\xi_1 + a_{32}\xi_3 + a_{42}\xi_4 = 0;$$

il y a une gerbe de plans doubles dont le support est le point $(a_{12}, 0, a_{32}, a_{42})$ du plan β et peut être pris pour le point A, ce qui donne

$$a_{12} \neq 0 \quad \text{et} \quad a_{32} = a_{42} = 0.$$

Les équations de la collinéation entre les points X, X' deviennent

$$X'_1 = k_1 X_1 + a_{12} X_2, \quad X'_2 = k_1 X_2, \quad X'_3 = k_1 X_3, \quad X'_4 = k_1 X_4.$$

Quand le point X coïncide avec le point B $(0,1,0,0)$, le point X' est le point B' $(a_{12}, k_1, 0, 0)$ différent des points A, B sur la droite AB. En mettant le cinquième point fondamental des coordonnées quaternaires dans le plan CDB', a_{12} devient égal à k_1 et les équations de la collinéation entre points et entre plans deviennent

(K) $$X'_1 = k_1(X_1 + X_2), \quad X'_2 = k_1 X_2, \quad X'_3 = k_1 X_3, \quad X'_4 = k_1 X_4$$

et

(K') $$\xi_1 = k_1 \xi'_1, \quad \xi_2 = k_1(\xi'_1 + \xi'_2) \quad \xi_3 = k_1 \xi'_3, \quad \xi_4 = k_1 \xi'_4.$$

Cette collinéation est une perspectivité de centre A et de plan β; les droites doubles sont les droites de la gerbe A et celles du système plan β.

3° Les équations (21) se réduisent à deux équations distinctes et il en est de même des équations (22) qui ont le même déterminant principal que les premières. Il y a une ponctuelle de points doubles et une feuillée de plans doubles; le support de la ponctuelle passe par le point A et celui de la feuillée est dans le plan β. Mais les deux supports sont des droites doubles; le support de la ponctuelle des points doubles est le support de deux feuillées projectives; celles-ci ont au moins un feuillet double; ce feuillet double est un plan double de la collinéation entre les deux espaces, on peut supposer qu'il coïncide avec le plan β. De même, le support de la feuillée des plans doubles est le support commun de deux ponctuelles projectives qui ont au moins un point double et, comme ce point est dans le plan β, on peut supposer qu'il coïncide avec le point A. De cette manière, les supports de la ponctuelle des points doubles et de la feuillée des plans doubles sont des droites passant par le point A dans le plan β. Deux hypothèses sont à envisager

1) Si les deux supports coïncident, on peut supposer qu'ils coïncident avec la droite AC, ce qui revient à faire

$$a_{13} = a_{43} = a_{42} = 0, \qquad a_{33} = a_{44} = k_1.$$

Les équations (21) et (22) deviennent

(23) $$a_{12} X_2 + a_{14} X_4 = 0, \qquad a_{32} X_2 + a_{34} X_4 = 0$$

et

(24) $$a_{12} \xi_1 + a_{32} \xi_3 = 0, \qquad a_{14} \xi_1 + a_{34} \xi_3 = 0.$$

On peut supposer que les équations (23) représentent les plans β et δ; cela donne

$$a_{12} \neq 0, \quad a_{14} = 0, \quad a_{32} = 0, \quad a_{34} \neq 0,$$

et on constate qu'en même temps les équations (24) représentent les points A, C.

Les équations de la collinéation entre les points X, X' deviennent

$$X'_1 = k_1 X_1 + a_{12} X_2, \quad X'_2 = k_1 X_2, \quad X'_3 = k_1 X_3 + a_{34} X_4, \quad X'_4 = k_1 X_4.$$

Aux points B $(0,1,0,0)$, D $(0,0,0,1)$ correspondent les points B' $(a_{12}, k_1, 0, 0)$, D' $(0, 0, a_{34}, k_1)$ des droites AB, CD. En mettant le cinquième point fondamental E des coordonnées quaternaires dans les plans CDB', ABD', a_{12} et a_{34} deviennent égaux à k_1 et les équations de la collinéation entre points et entre plans sont

(L) $$X'_1 = k_1(X_1 + X_2), \quad X'_2 = k_1 X_2, \quad X'_3 = k_1(X_3 + X_4), \quad X'_4 = k_1 X_4$$

et

(L') $$\xi_1 = k_1 \xi'_1, \quad \xi_2 = k_1(\xi'_1 + \xi'_2), \quad \xi_3 = k_1 \xi'_3, \quad \xi_4 = k_1(\xi'_3 + \xi'_4).$$

Les équations aux droites doubles sont

$$X_{24} = 0, \qquad X_{14} + X_{23} = 0.$$

Il y a une infinité de droites doubles; toutes ces droites doubles coupent la droite AC et le lieu de celles qui passent par le point P $(P_1, 0, P_3, 0)$ est le plan ϖ d'équation

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_4 \\ P_1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X_2 & X_3 \\ 0 & P_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ou} \quad P_3 X_2 - P_1 X_4 = 0.$$

Chaque point double P de la droite AC est donc le support d'un faisceau de droites doubles situées dans un plan double ϖ passant par la droite AC et la ponctuelle engendrée par le point P est projective à la feuillée engendrée par le plan ϖ.

2) Si le support de la ponctuelle des points doubles est différent de celui de la feuillée des plans doubles, on peut supposer que ces supports coïncident respectivement avec les droites AC, AD, ce qui permet de faire

$$a_{13} = 0, \quad a_{33} = k_1, \quad a_{32} = 0, \quad a_{34} = 0, \quad a_{44} = k_1.$$

Les équations (21), (22) deviennent

(25) $$a_{12} X_2 + a_{14} X_4 = 0, \qquad a_{42} X_2 = 0$$

et

(26) $$a_{12} \xi_1 + a_{42} \xi_4 = 0, \qquad a_{14} \xi_1 = 0.$$

On doit donc avoir

$$a_{42} \neq 0, \qquad a_{14} \neq 0,$$

et en supposant que la première des équations (25) représente le plan δ, on a

$$a_{12} = 0.$$

Les équations de la collinéation entre les points X, X' sont

$$X'_1 = k_1 X_1 + a_{14} X_4, \quad X'_2 = k_1 X_2, \quad X'_3 = k_1 X_3, \quad X'_4 = a_{42} X_2 + k_1 X_4.$$

Aux points $B(0,1,0,0)$, $D(0,0,0,1)$ correspondent les points $B'(0, k_1, 0, a_{42})$ $D'(a_{14}, 0, 0, k_1)$ des droites BD, AD. En mettant le cinquième point fondamental des coordonnées quaternaires dans les plans ACB', BCD', on a

$$a_{14} = a_{42} = k_1$$

et les équations entre points et entre plans deviennent

(M) $$X'_1 = k_1(X_1 + X_4), \quad X'_2 = k_1 X_2, \quad X'_3 = k_1 X_3, \quad X'_4 = k_1(X_2 + X_4)$$

et

(M') $$\xi_1 = k_1 \xi'_1, \quad \xi_2 = k_1(\xi'_2 + \xi'_4), \quad \xi_3 = k_1 \xi'_3, \quad \xi_4 = k_1(\xi'_1 + \xi'_4).$$

Les équations aux droites doubles sont

$$X_{23} = 0, \quad X_{42} = 0, \quad X_{34} = 0, \quad X_{12} = 0;$$

il y a donc une infinité de droites doubles qui sont les rayons du faisceau A dans le plan β.

4° Les équations (21) sont distinctes, ainsi que les équations (22); le point A et le plan β sont le seul point double et le seul plan double de la collinéation. Le plan β est le support de deux systèmes plans entre lesquels existe une collinéation dont les équations sont

$$X'_1 = k_1 X_1 + a_{13} X_3 + a_{14} X_4, \quad X'_3 = a_{33} X_3 + a_{34} X_4, \quad X'_4 = a_{43} X_3 + a_{44} X_4$$

et

$$x_1 = k_1 x'_1, \quad x_3 = a_{13} x'_1 + a_{33} x'_3 + a_{43} x'_4, \quad x_4 = a_{14} x'_1 + a_{34} x'_3 + a_{44} x'_4.$$

Les équations aux droites doubles de cette collinéation particulière sont

$$(k_1 - k) x_1 = 0, \quad a_{13} x_1 + (a_{33} - k) x_3 + a_{43} x_4 = 0, \quad a_{14} x_1 + a_{34} x_3 + (a_{44} - k) x_4 = 0,$$

en y remplaçant k par k_1, elles se réduisent aux deux équations

$$a_{13} x_1 + (a_{33} - k_1) x_3 + a_{43} x_4 = 0, \quad a_{14} x_1 + a_{34} x_3 + (a_{44} - k_1) x_4 = 0$$

dont les coefficients sont les mêmes que ceux des dernières équations du système (22). Ces deux équations sont donc distinctes l'une de l'autre, la collinéation considérée dans le plan β n'a qu'une droite double et cette droite est déterminée par les points de coordonnées quaternaires

$$a_{13}\,,0\,,a_{33}-k_1\,,a_{43} \qquad \text{et} \qquad a_{14}\,,0,\,a_{34}\,,a_{44}-k_1.$$

Mais k_1 étant une racine de l'équation (23), on a

$$(a_{33}-k_1):a_{43}=a_{34}:(a_{44}-k_1)$$

et la droite double trouvée passe par le point A dans le plan β. On peut supposer qu'elle coïncide avec la droite AC, ce qui donne

$$a_{43}=0, \qquad a_{44}=k_1, \qquad a_{33}=k_1, \qquad a_{34}\neq 0, \qquad a_{13}\neq 0$$

et comme le point A doit être le seul point double vérifiant les équations (21) ou le plan β, le seul plan double vérifiant les équations (22), on a en outre

$$a_{42}\neq 0 \quad \text{et} \quad a_{12}\neq 0$$

Les équations de la collinéation entre les points X, X' des espaces E, E' deviennent

(27) $$X'_1=k_1X_1+a_{12}X_2+a_{13}X_3+a_{14}X_4,\ X'_2=k_1X_2,\ X'_3=a_{32}X_2+k_1X_3+a_{34}X_4,\ X'_4=a_{42}X_2+k_1X_4.$$

Ayant pris à volonté le plan α, son équation dans l'espace E' est

$$X'_1=0,$$

le plan correspondant dans l'espace E a pour équation

$$k_1X_1+a_{12}X_2+a_{13}X_3+a_{14}X_4=0,$$

il ne passe ni par le point A, ni par le point C, et on peut supposer qu'il passe par les points B, D, ce qui achève de déterminer le plan γ, et par le point (1,1,-1,1); cela donne

$$a_{12}=a_{14}=0 \quad \text{et} \quad a_{13}=k_1.$$

En considérant le plan γ comme un plan de l'espace E', son équation est

$$X'_3=0,$$

le plan correspondant dans l'espace E a pour équation

$$a_{32}X_2+k_1X_3+a_{34}X_4=0,$$

il passe par le point A, mais il ne passe ni par le point C, ni par le point D, on peut supposer qu'il passe par le point B, ce qui achève de déterminer ce point et par le point (1,1,1,-1); cela donne

$$a_{32}=0 \quad \text{et} \quad a_{34}=k_1.$$

Enfin, le plan δ, considéré comme plan de l'espace E', a pour équation

$$X'_4=0;$$

le plan correspondant de l'espace E a pour équation

$$a_{42}X_2+k_1X_4=0$$

et on peut supposer qu'il passe par le point (1,1,1,-1), ce qui donne

$$a_{42}=k_1.$$

Les équations de la collinéation entre points et entre plans se réduisent alors à

(N) $$X'_1=k_1(X_1+X_3),\quad X'_2=k_1X_2,\quad X'_3=k_1(X_3+X_4),\quad X'_4=k_1(X_2+X_4)$$

et

(N') $$\xi_1=k_1\xi'_1,\quad \xi_2=k_1(\xi'_2+\xi'_4),\quad \xi_3=k_1(\xi'_1+\xi'_3),\quad \xi_4=k_1(\xi'_3+\xi'_4).$$

Les équations aux droites doubles sont

$$X_{23}=0,\qquad X_{14}+X_{34}=0,\qquad X_{12}+X_{34}=0,\qquad X_{42}=0;$$

Comme il faut qu'on ait

$$X_{12}X_{34}+X_{13}X_{42}+X_{14}X_{23}=0,$$

ces équations n'admettent que la solution

$$X_{12}=0, \quad X_{14}=0, \quad X_{34}=0, \quad X_{42}=0, \quad X_{23}=0$$

et la droite AC est la seule droite double de la collinéation

34. Conclusion. _ Lorsque deux formes fondamentales de troisième espèce colliniaires sont superposés, il y a quatorze cas à distinguer d'après le nombre et la position des éléments doubles; ces quatorze cas sont caractérisés par les quatorze systèmes d'équation de (A) et (A') à (N) et (N'), les valeurs de k affectées d'indices différents dans un même système d'équations ayant des valeurs différentes.

B. Collinéation involutive

35. 1° Définition. Lorsque les éléments homologues de deux espaces colliniaires superposés correspondent doublement ou sont permutables entre eux, on dit que la collinéation est involutive. On considère les deux espaces comme n'en faisant qu'un seul dit involutif ou en involution par collinéation, et les éléments appelés d'abord des éléments homologues prennent le nom d'éléments conjugués.

2° Propriétés immédiates. Il résulte des propriétés générales de la collinéation dans les formes fondamentales de troisième espèce que dans tout espace involutif par collinéation, 1) toute droite d qui joint deux points conjugués quelconques A, A' ou qui est l'intersection de deux plans conjugués quelconques α, α' est une droite double et réciproquement; 2) Les ponctuelles projectives engendrées par les points A, A' en se déplaçant sur la droite double d, sont en involution, ainsi que les feuillées projectives engendrées par les plans α, α' en tournant autour de la même droite; 3) les droites conjuguées et les plans conjugués qui passent par un même point double, engendrent une gerbe colliniaire involutive et si tous les éléments de cette gerbe ne sont pas des éléments doubles, la collinéation établie entre ses éléments conjugués est nécessairement une perspectivité harmonique; 4) les droites conjuguées et les points conjugués qui sont situés dans un plan double engendrent un système plan colliniaire involutif et si tous les éléments de ce système plan ne sont pas des éléments doubles, la collinéation établie entre ses éléments conjugués est nécessairement une perspectivité harmonique.

36. Recherche des collinéations involutives. 1° Perspectivité harmonique. Un premier cas de collinéation involutive est fourni par deux espaces perspectifs lorsque le centre de perspectivité est extérieur au plan de perspectivité et que la constante de perspectivité est égale à -1.

2° Involution gauche et espace gauche. Dans la perspectivité harmonique, deux points conjugués quelconques sont en ligne droite avec le centre de perspectivité. Il n'y a donc plus qu'à reconnaître s'il existe une collinéation involutive dans laquelle des points A et B, C et D forment deux couples de points conjugués, sans que les droites AB, CD se coupent ou soient situées dans le même plan. A cet effet, ayant pris le tétraèdre ABCD pour tétraèdre fondamental des coordonnées quaternaires dans deux espaces superposés, on considère entre ces espaces la collinéation dont les équations sont, pour $i = 1,2,3,4$,

(1) $$X'_i = a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + a_{i3}X_3 + a_{i4}X_4.$$

En exprimant que ces équations sont vérifiées par les couples de points

$$X \equiv A \text{ et } X' \equiv B, \quad X \equiv B \text{ et } X' \equiv A, \quad X \equiv C \text{ et } X' \equiv D, \quad X \equiv D \text{ et } X' \equiv C,$$

On trouve qu'il faut qu'on ait

$$a_{21} \neq 0 \text{ et } a_{11} = a_{31} = a_{41} = 0, \qquad a_{12} \neq 0 \text{ et } a_{22} = a_{32} = a_{42} = 0,$$
$$a_{43} \neq 0 \text{ et } a_{13} = a_{23} = a_{33} = 0, \qquad a_{34} \neq 0 \text{ et } a_{14} = a_{24} = a_{44} = 0.$$

Les équations de la collinéation se réduisent donc déjà à

(2) $$X'_1 = a_{12}X_2, \quad X'_2 = a_{21}X_1, \quad X'_3 = a_{34}X_4 \quad X'_4 = a_{43}X_3,$$

Il y aura involution, si ces équations sont équivalentes à

(3) $$X_1 = a_{12}X'_2, \quad X_2 = a_{21}X'_1, \quad X_3 = a_{34}X'_4 \quad X_4 = a_{43}X'_3.$$

et elles donnent

(4) $$X_1 = \frac{1}{a_{21}} X'_2, \qquad X_2 = \frac{1}{a_{12}} X'_1, \qquad X_3 = \frac{1}{a_{43}} X'_4, \qquad X_4 = \frac{1}{a_{34}} X'_3.$$

Donc, pour qu'il y ait involution, il est nécessaire et suffisant qu'il existe un nombre k différent de zéro et tel que

$$a_{12} = \frac{k}{a_{21}}, \qquad a_{21} = \frac{k}{a_{12}}, \qquad a_{34} = \frac{k}{a_{43}}, \qquad a_{43} = \frac{k}{a_{34}}$$

ou

(5) $$a_{12} a_{21} = a_{34} a_{43} = k.$$

On voit par là qu'il existe une infinité de collinéations répondant à la question; on obtient une quelconque d'entre elles en donnant aux lettres a, b des valeurs arbitraires non nulles dans les équations

(6) $$X'_1 = a X_2, \qquad X'_2 = b X_1, \qquad X'_3 = ab X_4, \qquad X'_4 = X_3.$$

Une pareille collinéation involutive s'appelle involution gauche et l'espace involutif correspondant s'appelle espace gauche.

En tenant compte de l'identité

$$\xi_X = \xi'_{X'},$$

on obtient les équations entre plans conjugués

(7) $$\xi'_1 = b \xi_2, \qquad \xi'_2 = a \xi_1, \qquad \xi'_3 = \xi_4, \qquad \xi'_4 = ab \xi_3.$$

Quant aux équations entre droites conjuguées, elles sont

(8) $$X'_{12} = -ab X_{12}, \quad X'_{13} = -a^2 b X_{42}, \quad X'_{14} = a X_{23}, \quad X'_{34} = -ab X_{34}, \quad X'_{42} = -b X_{13}, \quad X'_{23} = ab^2 X_{14},$$

ou

(9) $$\xi'_{12} = -ab \xi_{12}, \quad \xi'_{13} = -b \xi_{42}, \quad \xi'_{14} = ab^2 \xi_{23}, \quad \xi'_{34} = -ab \xi_{34}, \quad \xi'_{42} = -a^2 b \xi_{13}, \quad \xi'_{23} = a \xi_{14}$$

37. Théorèmes.

1° Pour que deux espaces collinéaires superposés soient en involution, il faut et il suffit que deux systèmes plans de supports différents s'y correspondent doublement point par point, droite par droite.

2° Pour que deux espaces collinéaires superposés soient en involution, il faut et il suffit que deux gerbes de supports différents s'y correspondent doublement plan par plan et droite par droite.

Il suffit de démontrer le théorème 1°. 1) Condition nécessaire. Cela résulte de la définition de la collinéation involutive dans les formes fondamentales de troisième espèce.

2) Condition suffisante. Soient α et α' deux plans différents servant de supports à des systèmes plans dont les points et les droites se correspondent doublement dans deux espaces collinéaires superposés. Les plans α, α' eux-mêmes se correspondent doublement, la droite $x \equiv x' \equiv \alpha\alpha'$, suivant laquelle ils se coupent, est une droite double et les deux ponctuelles de points correspondants dont cette droite double est le support, sont en involution.

Deux cas sont à distinguer. a.- La relation d'involution sur la droite $x \equiv x'$ se réduit à une relation d'identité, c'est-à-dire que tous les points de cette droite sont des points doubles des deux espaces collinéaires donnés, et, par suite, des points doubles des systèmes plans collinéaires considérés dans les plans α, α'. Ces systèmes plans collinéaires ayant une ponctuelle double sont perspectifs; les droites qui en joignent les points correspondants se coupent au centre de perspectivité P. Mais les points correspondants des systèmes plans α, α' se correspondent doublement dans les espaces collinéaires donnés, les droites qui les joignent sont donc des droites doubles de ces espaces, et ceux-ci, ayant ainsi une gerbe double sont déjà perspectifs. D'autre part, chacune des droites doubles considérées est le support de deux ponctuelles projectives dont les points homologues sont des points homologues des deux espaces collinéaires; deux de ces points, ceux situés dans les plans α, α', se correspondant doublement, les deux ponctuelles sont en involution. Les points doubles de

cette involution sont le centre de perspectivité P des deux espaces et un point du plan de perspectivité. Les points doubles d'une ponctuelle involutive formant un groupe harmonique avec deux points conjugués quelconques, la constante de perspectivité est égale à -1 et on se trouve ainsi dans le cas de la perspectivité harmonique.

b. La droite double $x \equiv x'$ n'est pas le support d'une ponctuelle double. Soient A, B deux points homologues distincts situés sur cette droite; C et D, E et F deux autres couples de points homologues quelconques pris en dehors de la même droite dans les plans α, α', avec la condition que ni trois des points A, B, C, E ni trois des points A, B, D, F ne soient en ligne droite. La collinéation établie entre les systèmes plans α, α' par celle donnée entre les espaces considérés est assurée par les quatre couples de points homologues A et B, B et A, C et D, E et F. Dès lors, si on démontre à l'aide de ces points que la collinéation donnée entre les deux espaces est involutive, le théorème sera démontré.

A cet effet, on observe qu'ayant pris le tétraèdre ABCD pour tétraèdre fondamental des coordonnées quaternaires, il résulte de calculs faits précédemment (n° 36, 2°) que toutes les collinéations entre deux espaces superposés, dans lesquelles les points A et B, C et D se correspondent doublement, sont définies par les équations

$$X'_1=a_{12}X_2,\qquad X'_2=a_{21}X_1,\qquad X'_3=a_{34}X_4,\qquad X'_4=a_{43}X_3.$$

Mais pour que les points $E(E_1,E_2,E_3,0)$, $F(F_1,F_2,0,F_4)$ se correspondent doublement, il faut et il suffit qu'on ait à la fois

$$E_1=a_{12}F_2,\quad E_2=a_{21}F_1,\quad E_3=a_{34}F_4\qquad \text{et}\qquad F_1=a_{12}E_2,\quad F_2=a_{21}F_1,\quad F_4=a_{43}F_3;$$

ou bien

$$a_{12}a_{21}=a_{34}a_{43}$$

et ainsi qu'on l'a vu au n° 36 (2°), il résulte de là que la collinéation donnée entre les deux espaces considérés est une involution gauche.

38. Propriétés de l'involution gauche. – 1° Recherche des éléments doubles. 1) L'involution gauche ne se réduisant pas à la transformation identique, tous les points d'un espace gauche ne sont pas des points doubles, tous les plans ne sont pas des plans doubles et toutes les droites ne sont pas des droites doubles. – Un point qui n'est pas un point double n'appartient qu'à une seule droite double, la droite qui le joint au point conjugué. – Un plan qui n'est pas un plan double ne contient qu'une seule droite double, la droite suivant laquelle il coupe le plan conjugué. – La droite joignant deux points doubles étant une droite double, les points doubles d'un espace gauche sont les points doubles des ponctuelles involutives non singulières dont les supports sont les droites doubles et dont les points conjugués sont des points conjugués de l'espace gauche; toute droite double contient donc au moins deux points doubles et elle n'en contient plus de deux que si tous ses points sont des points doubles. – Tout point double appartient à une infinité de droites doubles, les droites qui le joignent aux autres points doubles. – La droite d'intersection de deux plans doubles étant une droite double, les plans doubles d'un espace gauche sont les plans doubles des feuillets involutives non singulières dont les supports sont les droites doubles et dont les plans conjugués sont des plans conjugués de l'espace gauche; toute droite double appartient donc au moins à deux plans doubles, mais elle n'appartient à plus de deux que si tous les plans dans lesquels elle se trouve sont des plans doubles. – Tout plan double contient une infinité de droites doubles, les droites suivant lesquelles il est coupé par les autres plans doubles.

2) Soit ϖ un plan double de l'espace gauche E. L'involution gauche étant différente d'une perspectivité harmonique, tous les points du plan ϖ ne sont pas des points doubles de l'espace E et ce plan est le support d'un système plan involutif par collinéation dont les éléments conjugués sont des éléments conjugués dans l'espace E. Mais la seule collinéation involutive entre formes fondamentales de seconde espèce est la perspectivité harmonique; il en résulte que la collinéation involutive déterminée dans le plan ϖ par l'espace gauche E est une perspectivité harmonique dont le centre S et les points de l'axe s sont les points doubles de l'espace

gauche $\mathcal{E}$ dans le plan ϖ, de même que la droite s et les droites issues du point S sont les droites doubles de l'espace gauche $\mathcal{E}$ dans le plan ϖ.

3) Le point double S est le support d'une gerbe involutive par collinéation dont les éléments conjugués sont des éléments conjugués dans l'espace $\mathcal{E}$. Mais les droites menées par le point S dans le plan ϖ sont des droites doubles dans l'espace $\mathcal{E}$: elles sont donc aussi des droites doubles dans la gerbe S et le plan ϖ est le plan de perspectivité dans la perspectivité harmonique à laquelle se réduit la collinéation involutive déterminée dans la gerbe S. L'axe de perspectivité de cette perspectivité harmonique est une droite t passant par le point S, mais extérieure au plan ϖ. Les droites du faisceau S dans le plan ϖ et la droite t sont les droites doubles de l'espace gauche $\mathcal{E}$ dans la gerbe S, de même que le plan ϖ et les plans de la feuillée de support t sont les plans doubles de l'espace $\mathcal{E}$ dans la gerbe S.

4) Soient T un point quelconque de la droite s; ω le plan Tt. Le plan ω est un plan double sur lequel, comme sur le plan ϖ, l'espace gauche $\mathcal{E}$ détermine une perspectivité harmonique. Les points S, T étant les seuls points doubles de l'espace gauche $\mathcal{E}$ sur la droite ST et le plan ϖ étant le seul plan de perspectivité de la gerbe S, le centre et l'axe de la perspectivité harmonique dans le plan ω sont le point T et la droite t. Il en résulte que tous les points de la droite t sont des points doubles et que tous les plans passant par la droite s sont des plans doubles de l'espace gauche $\mathcal{E}$.

5) L'intersection de deux plans doubles étant une droite double, tout plan double qui ne passe pas par la droite t coupe le plan ϖ suivant la droite s; il en résulte que les feuillées ayant les droites gauches s et t pour supports sont formées par l'ensemble des plans doubles de l'espace gauche $\mathcal{E}$.

6) La droite joignant deux points doubles étant une droite double, tout point double qui n'est pas sur la droite s est projeté du point S suivant la droite t; les ponctuelles ayant pour supports les droites s et t sont formées par l'ensemble des points doubles de l'espace gauche $\mathcal{E}$.

7) Les droites doubles de l'espace gauche $\mathcal{E}$ sont les droites gauches s, t et toute droite qui coupe ces deux droites. La droite double d, passant par un point quelconque A, est l'intersection des plans As, At et le point conjugué du point A dans l'espace gauche $\mathcal{E}$ est le point conjugué harmonique A' du point A par rapport aux points ds, dt. La droite double d, contenue dans un plan quelconque α, joint les points αs, αt et le plan conjugué du plan α dans l'espace gauche $\mathcal{E}$ est le plan conjugué harmonique α' du plan α par rapport aux plans ds, dt. – On dit que l'ensemble des droites d ainsi déterminées est une congruence du premier ordre et de la première classe; du premier ordre, parce qu'il ne passe qu'une droite d par un point quelconque A; de la première classe, parcequ'il n'y a qu'une droite d dans un plan quelconque α. – Cette congruence s'appelle aussi une congruence linéaire, on dit qu'elle est associée à l'espace gauche $\mathcal{E}$ et on la représente par la notation $\mathcal{C}_1$; elle est l'intersection des complexes linéaires spéciaux ayant les droites s, t pour axes et formés respectivement des droites qui coupent l'une des deux droites.

8) L'involution gauche est déterminée dès qu'on connaît les droites s, t et ces deux droites s'appellent les directrices de l'involution gauche, de l'espace gauche $\mathcal{E}$ et de la congruence linéaire $\mathcal{C}_1$. – L'involution gauche, l'espace gauche $\mathcal{E}$ et la congruence linéaire $\mathcal{C}_1$ sont dits elliptiques ou hyperboliques selon que les droites s, t sont des droites imaginaires conjuguées ou des droites réelles

9) Théorème. *Un espace gauche se transforme en lui-même ou est anallagmatique dans toute involution gauche dont les directrices sont deux droites doubles ou deux droites conjuguées de cet espace gauche.*

a. – Soient x, y deux droites doubles gauches de l'espace gauche $\mathcal{E}$; A, A' deux points conjugués quelconques de cet espace gauche; a, a' les droites passant par les points A, A' et coupant les droites x, y aux points X et X', Y et Y'; A_1, A'_1 les conjugués harmoniques des points A, A' par rapport aux points X et Y, X' et Y'. Les points A_1, A'_1 sont les transformées des points A, A' dans l'involution gauche dont les droites x, y sont les directrices, et la question revient à démontrer qu'ils sont des points conjugués dans l'espace gauche $\mathcal{E}$. Or les droites a, a' sont des droites conjuguées et les points X et X', Y et Y' sont des points conjugués dans l'espace gauche $\mathcal{E}$.

Dès lors, il résulte des propriétés générales de la collinéation dans les formes fondamentales de troisième espèce, que le point conjugué du point A_1 dans l'espace gauche $\mathcal{E}$ est le point homologue de ce point dans la projectivité déterminée sur les droites a et a' par les trois couples de points homologues A et A', X et X', Y et Y'; c'est donc le point A'_1, puisqu'on a

$$(X, Y, A, A_1) = (X', Y', A', A'_1) = -1.$$

b.- La démonstration se fait de la même manière lorsque les droites x, y sont des droites conjuguées non concourantes de l'espace gauche $\mathcal{E}$.

10) Problème. Déterminer les éléments doubles de l'involution gauche définie par les équations

(1) $$X'_1 = a X_2, \qquad X'_2 = b X_1, \qquad X'_3 = ab X_4, \qquad X'_4 = X_3$$

dans des coordonnées quaternaires dont le tétraèdre fondamental $ABCD$ ou $\alpha\beta\gamma\delta$ a pour sommets deux couples A et B, C et D de points conjugués.

a.- Recherche des points doubles. – Ces points sont déterminés par les équations

(2) $$k X_1 - a X_2 = 0, \qquad k X_2 - b X_1 = 0, \qquad k X_3 - ab X_4 = 0, \qquad k X_4 - X_3 = 0,$$

dans lesquelles k doit être remplacé par les racines de l'équation

(3) $$(k^2 - ab)^2 = 0 \qquad \text{ou} \qquad (k - \sqrt{ab})^2 (k + \sqrt{ab})^2 = 0.$$

Cette équation admet les racines doubles

$$k_1 = \sqrt{ab}, \qquad k_2 = -\sqrt{ab}.$$

Pour $k_1 = \sqrt{ab}$, les équations (2) donnent une première ponctuelle de points doubles dont le support est la droite s d'équations

(4) $$\sqrt{b} X_1 - \sqrt{a} X_2 = 0, \qquad X_3 - \sqrt{ab} X_4 = 0.$$

Pour $k_2 = -\sqrt{ab}$, les équations (2) donnent une seconde ponctuelle de points doubles dont le support est la droite t d'équations

(5) $$\sqrt{b} X_1 + \sqrt{a} X_2 = 0, \qquad X_3 + \sqrt{ab} X_4 = 0$$

Les droites s et t coupent les droites AB, CD en des points différents dont les coordonnées sont

$$\sqrt{a}, \sqrt{b}, 0, 0 \qquad \text{et} \qquad 0, 0, \sqrt{ab}, 1$$

pour les points relatifs à la droite s,

$$\sqrt{a}, -\sqrt{b}, 0, 0 \qquad \text{et} \qquad 0, 0, \sqrt{ab}, -1$$

pour les points relatifs à la droite t.

Les droites s et t sont donc des droites gauches dont les équations en coordonnées de plans sont respectivement

(6) $$\sqrt{a}\, \xi_1 + \sqrt{b}\, \xi_2 = 0, \qquad \sqrt{ab}\, \xi_3 + \xi_4 = 0$$

et

(7) $$\sqrt{a}\, \xi_1 - \sqrt{b}\, \xi_2 = 0, \qquad \sqrt{ab}\, \xi_3 - \xi_4 = 0.$$

b.- Recherche des plans doubles. – En coordonnées de plans les équations de l'involution gauche (1) sont

(8) $$\xi'_1 = b\, \xi_2, \qquad \xi'_2 = a\, \xi_1, \qquad \xi'_3 = \xi_4, \qquad \xi'_4 = ab\, \xi_3.$$

Les équations aux plans doubles sont

(9) $$k \xi_1 - b \xi_2 = 0, \qquad k \xi_2 - a \xi_1 = 0, \qquad k \xi_3 - \xi_4 = 0, \qquad k \xi_4 - ab\, \xi_3 = 0,$$

dans lesquelles on doit faire encore $k = \sqrt{ab}$ ou $-\sqrt{ab}$.

Pour $k_1 = \sqrt{ab}$, on trouve une première feuillée de plans doubles ayant la droite t pour support, et pour

$k_2 = -\sqrt{ab}$, on trouve une seconde feuillée de plans doubles ayant la droite s pour support.

c.- Recherche des droites doubles.- Les équations de l'involution gauche entre droites conjuguées sont

(10) $X'_{12} = -abX_{12}$, $X'_{13} = -a^2bX_{42}$, $X'_{14} = aX_{23}$, $X'_{34} = -abX_{34}$, $X'_{42} = -bX_{13}$, $X'_{23} = ab^2X_{14}$.

Les équations aux droites doubles sont

(11) $(\lambda + ab)X_{12} = 0$, $\lambda X_{13} + a^2bX_{42} = 0$, $\lambda X_{14} - aX_{23} = 0$, $(\lambda + ab)X_{34} = 0$, $\lambda X_{42} + bX_{13} = 0$, $\lambda X_{23} - ab^2X_{14} = 0$,

dans laquelle λ doit être remplacé par les racines de l'équation

(12) $$(\lambda + ab)^4 (\lambda - ab)^2 = 0.$$

Pour $\lambda = ab$, on a les deux solutions

(13) $X_{12} = 0$, $X_{13} = -a\sqrt{b}$, $X_{14} = \mp\sqrt{a}$, $X_{34} = 0$, $X_{42} = \sqrt{b}$, $X_{23} = \mp b\sqrt{a}$,

qui correspondent aux droites s, t.

Pour $\lambda = -\sqrt{ab}$, on a toutes les droites pour lesquelles

(14) $$X_{13} - aX_{42} = 0 \quad \text{et} \quad bX_{14} + X_{23} = 0;$$

ces droites sont celles qui s'appuient à la fois sur les droites s et t. En effet, les coordonnées de la droite s forment la première des deux solutions (13); or on a, en vertu des équations (14)

(15) $$\Sigma S_{12}X_{34} = -\sqrt{b}\,(X_{13} - aX_{42}) + \sqrt{a}\,(X_{23} + bX_{14}) = 0$$

et pour la droite t,

(16) $$\Sigma T_{12}X_{34} = -\sqrt{b}\,(X_{13} - aX_{42}) - \sqrt{a}\,(X_{23} + bX_{14}) = 0.$$

Les équations (14) sont donc les équations de la congruence linéaire G_1 et les équations de cette congruence en coordonnées tangentielles sont

(17) $$\xi_{34} - a\xi_{13} = 0 \quad \text{et} \quad \xi_{14} + b\xi_{23} = 0.$$

Les équations (14) et (17) définissent donc la congruence linéaire G_1 comme formée des droites communes à deux complexes linéaires spéciaux ayant les droites s, t pour axes, et ces droites appartiennent à tous les complexes linéaires représentés par les équations équivalentes

(18) $$X_{13} - aX_{42} + \mu(X_{23} + bX_{14}) = 0 \quad \text{et} \quad \xi_{34} - a\xi_{13} + \mu(\xi_{14} + bX_{23}) = 0$$

dans lesquelles μ est un paramètre arbitraire. On dit que ces complexes linéaires forment un faisceau de complexes linéaires et qu'ils se coupent deux par deux suivant la congruence linéaire G_1; on dit aussi que ce faisceau a la congruence linéaire G_1 pour support.

2° De l'involution gauche lorsque l'une des directrices s ou t est une droite impropre.

Lorsque la droite t est rejetée à l'infini dans les plans parallèles au plan propre θ, 1) le plan de l'infini est un plan double et l'espace gauche E est formé par la superposition de deux espaces en affinité; 2) la congruence linéaire G_1 des droites doubles est composée des droites parallèles au plan θ qui coupent la droite s; 3) toute involution de points conjugués sur une droite double d se réduit à une symétrie dont le centre est le point ds où la droite double d coupe la droite s; 4) une translation de l'espace gauche E parallèlement à la droite s remplace deux points conjugués quelconques par deux autres points conjugués, et on dit qu'elle n'altère ni l'involution gauche, ni l'espace gauche E, ni la congruence linéaire G_1; 5) tout plan double parallèle au plan θ est le support de deux systèmes plans collinéaires dont les éléments homologues sont des éléments conjugués dans l'espace gauche E et la collinéation établie ainsi entre ces systèmes plans se réduit à une symétrie dont le centre est sur la droite s; 6) lorsque la droite s est perpendiculaire au plan θ, une rotation de l'espace gauche E, d'un angle quelconque autour de la droite s, remplace deux points conjugués quelconques par deux autres points conjugués, et on dit qu'une

pareille rotation n'altère ni l'involution gauche, ni l'espace gauche E, ni la congruence linéaire G_1; 7) quelle que soit la position de la droite s par rapport au plan θ, un plan quelconque mené par cette droite est le support de deux systèmes plans collinéaires dont les éléments homologues sont encore des éléments conjugués dans l'espace gauche E, mais, dans le cas actuel, la collinéation se réduit à une symétrie faite par des droites parallèles au plan θ et dont l'axe est la droite s, cette symétrie est une symétrie droite lorsque la droite s est perpendiculaire au plan θ.

5° De l'involution gauche lorsque les droites s et t sont des droites propres. – 1). Dans ce cas, le plan ϖ de l'infini n'est pas un plan double et le plan ϖ' qui lui est conjugué est un plan propre. Le plan ϖ' est le plan limite commun aux deux espaces collinéaires dont la superposition forme l'espace gauche E; on l'appelle le plan limite de cet espace gauche et de l'involution gauche. – 2) Le plan ϖ' est le lieu des points centraux des ponctuelles involutives déterminées par les points conjugués de l'espace gauche E sur les droites doubles, et, à cause de cela, on dit qu'il est le plan central de l'espace gauche E, de l'involution gauche et de la congruence linéaire G_1 des droites doubles. – 3) De la propriété précédente, il résulte que le plan ϖ' est le lieu des points milieux des segments rectilignes dont les extrémités sont sur les droites s et t, de sorte que ces deux droites sont parallèles au plan ϖ'. – 4) On peut également dire que les droites s et t sont parallèles au plan ϖ' parcequ'elles s'appuient sur la droite double ϖϖ' rejetée à l'infini dans le plan ϖ'. – 5) Les plans parallèles au plan ϖ' sont conjugués deux par deux dans l'espace gauche E; ils sont des feuillets conjugués d'une feuillée involutive ayant pour support la droite double ϖϖ' et pour feuillets doubles les plans σ, τ parallèles au plan ϖ' par les droites s, t. – 6) Le plan σ est un plan double de l'espace gauche E. Il est le support de deux systèmes plans involutifs par collinéation dont les éléments conjugués sont des éléments conjugués de l'espace gauche; mais cette collinéation involutive se réduit à une perspectivité harmonique dont l'axe est la droite s et dont le centre est à l'infini sur la droite t, c'est-à-dire, à une symétrie faite par rapport à la droite s par les droites parallèles à la droite t, symétrie qui est une symétrie droite lorsque les droites s et t sont rectangulaires. – 7) Une propriété analogue est applicable au plan τ. – 8) Deux plans conjugués quelconques, différents l'un de l'autre, sont les supports de deux systèmes plans collinéaires dont les éléments homologues sont des éléments conjugués dans l'espace gauche E; ces systèmes plans ont une droite double et deux points doubles, la droite double est la droite double de l'espace gauche E suivant laquelle se coupent leurs supports; les points doubles sont les points doubles de l'espace gauche E en lesquels la droite double ou les supports des systèmes plans rencontrent les droites s et t. Lorsque les plans conjugués sont des plans parallèles au plan ϖ', la droite double est la droite double ϖϖ' de l'espace gauche E dans le plan ϖ de l'infini et les systèmes plans sont en affinité. –

9) Soient z une droite double quelconque non parallèle au plan ϖ'; o et o', A et A' les points où cette droite coupe les plans ϖ et ϖ', α et α'; a et a' deux quelconques des droites conjuguées menées par les points A, A' dans les plans α, α'; B, B' deux points conjugués quelconques situés sur les droites a, a'. Il résulte de la propriété précédente que les ponctuelles engendrées par les points B, B' sur les droites a, a' sont semblables. Dès lors, les points A, A' étant des points homologues de ces ponctuelles, si les points B_1, B'_1 sont les points symétriques de deux points homologues quelconques B, B' des plans α, α' par rapport aux points A, A', ces points B_1, B'_1 sont aussi des points conjugués de l'espace gauche E. On voit par là que l'espace gauche E et la congruence linéaire G_1 sont symétriques parallèlement au plan ϖ' par rapport à toute droite double non parallèle à ce plan (voir ci-dessus, 1°, 9). – 10) Soient ζ, ζ' deux plans conjugués quelconques passant par la droite double z, mais différents l'un de l'autre; x, y les intersections de ces plans par le plan ϖ'. La droite conjuguée de la droite x ou ζϖ' est la droite x' ou ζ'ϖ, à l'infini dans le plan ζ', et la droite conjuguée de la droite y ou ζ'ϖ' est la droite y' ou ζϖ, à l'infini dans le plan ζ. – 11) Soient C, C' deux points conjugués quelconques situés sur les droites conjuguées x, x'. La droite b ou CC' est une droite double de l'espace gauche E et le point C est le point central de l'involution déterminée sur cette droite par des points conjugués de l'espace gauche E. Si D et D' sont deux de ces points, les points symétriques D_1, D'_1 par rapport au point C sont donc des points conjugués dans l'espace gauche E. Les ponctuelles engendrées par les points C, C' sur les droites x, x' sont projectives et la droite double b engendre un système réglé dont les droites x, x', s, t sont quatre directrices. – 12) Soient E, F deux points quelconques des droites x, x'. La droite e qui les joint est parallèle au plan ζ', mais elle n'est pas une droite double de l'espace gauche E. Le point conjugué du point E est un point E' différent du point F sur la droite x', et le point conjugué du point F est un point F' différent du point E sur la

la droite x. La droite conjuguée de la droite c est la droite c' ou $E'F'$ parallèle au plan ζ' et gauche à la droite c. Les points E, F' sont les points limites des ponctuelles projectives engendrées sur les droites c, c' par des points conjugués dans l'espace gauche $\mathcal{E}$. Dès lors, si K, K' sont deux de ces points, leurs symétriques K_1, K'_1 par rapport aux points E, F' sont encore des points conjugués dans l'espace gauche $\mathcal{E}$. — De cette propriété et de la précédente, il résulte que l'espace gauche $\mathcal{E}$ et la congruence linéaire $\mathcal{G}_1$ sont symétriques parallèlement au plan ζ' par rapport à la droite x et parallèlement au plan ζ par rapport à la droite y (voir ci-dessus, 1°, 9). — 13) En prenant le trièdre $O'xyz$ pour trièdre coordonné, les équations (6) trouvées au numéro 36 pour l'involution gauche deviennent (Voir aussi II, n° 33, 2°)

$$x'z = ay, \qquad y'z = bx, \qquad z'z = ab$$

et, sous cette forme, elles fournissent une justification immédiate des propriétés précédentes.

4° De l'involution gauche réelle dont le plan central est un plan propre.

1) Lorsque l'involution gauche est réelle, il existe une droite double réelle et perpendiculaire au plan central ϖ'; cette droite coupe les plans ϖ, ϖ' en des points conjugués O, O' dont le premier est le support de la gerbe des droites perpendiculaires au plan ϖ'. — 2) Il résulte de ce qu'on a démontré au 3° que l'axe z est un axe de symétrie droite de l'espace gauche $\mathcal{E}$ et de la congruence linéaire $\mathcal{G}_1$. Une rotation de 180° autour de l'axe z remplace deux points conjugués quelconques par deux autres points conjugués et on dit que cette rotation n'altère ni l'espace gauche $\mathcal{E}$, ni la congruence linéaire $\mathcal{G}_1$, ni l'involution gauche (voir 1°, 9). — 3) Les plans conjugués passant par l'axe z étant en involution, il y en a au moins deux ζ, ζ' qui sont perpendiculaires. Il résulte encore de ce qu'on a démontré au 3° que chacune des droites x, y suivant lesquelles ces plans coupent le plan ϖ' est un axe de symétrie de l'espace gauche $\mathcal{E}$ et de la congruence linéaire $\mathcal{G}_1$. Des rotations de 180° autour de ces deux droites remplacent deux points conjugués quelconques par deux autres points conjugués; on dit que ces rotations n'altèrent ni l'espace gauche $\mathcal{E}$, ni la congruence $\mathcal{G}_1$, ni l'involution gauche. — 4) Lorsque les plans conjugués passant par l'axe z sont constamment perpendiculaires, on dit que l'involution gauche est rectangulaire. Dans ce cas, toute droite menée par le point O' dans le plan ϖ' est un axe de symétrie de l'espace gauche $\mathcal{E}$ et de la congruence linéaire $\mathcal{G}_1$. — Soient A, A' les points où la droite z est rencontrée par deux plans conjugués différents α, α' parallèles au plan ϖ'; B et B', C et C' deux couples de points conjugués situés dans les plans α, α'. Deux plans conjugués quelconques passant par l'axe z étant rectangulaires, les plans doubles menés par cette droite sont des plans isotropes; les droites isotropes issues de deux points conjugués quelconques dans les plans α, α' sont des éléments homologues de l'affinité établie sur ces plans par l'involution gauche considérée. Il en résulte que cette affinité conserve les angles et qu'ainsi elle se réduit à une similitude. Les triangles ABC, $A'B'C'$ sont donc des triangles semblables et si $AB = AC$, on a aussi $A'B' = A'C'$. En faisant tourner les points conjugués B, B' de l'angle BAC autour de la droite z, ils sont donc remplacés par d'autres points conjugués C, C'; on voit ainsi que dans le cas de l'involution gauche rectangulaire, une rotation d'angle quelconque autour de l'axe z n'altère ni l'involution gauche, ni l'espace gauche $\mathcal{E}$, ni la congruence linéaire $\mathcal{G}_1$.

N.B. — Toutes les positions qu'occupe la droite BB' en tournant autour de la droite z sont des droites doubles et elles forment l'ensemble des génératrices rectilignes d'un même mode d'un hyperboloïde de révolution à une nappe.

5° Propriétés des droites doubles.

— 1) Théorème.

Une droite qui n'est pas une droite double d'un espace gauche $\mathcal{E}$, est rencontrée par une infinité de droites doubles formant deux faisceaux du premier ordre ou un système réglé; ou bien: — Celles des droites de la congruence linéaire $\mathcal{G}_1$ associée à un espace gauche $\mathcal{E}$ qui rencontrent une droite quelconque extérieure à la congruence linéaire $\mathcal{G}_1$ engendrent deux faisceaux du premier ordre ou un système réglé.

Soient a une droite extérieure à la congruence linéaire $\mathcal{G}_1$; a' la droite conjuguée de la droite a dans l'espace gauche $\mathcal{E}$; X un point quelconque de la droite a; X' le point conjugué du point X dans l'espace gauche $\mathcal{E}$. Le point X' est sur la droite a' et la droite x ou XX' est une des droites doubles dont on cherche le lieu. — Lorsque le point X décrit la droite a, le point X' décrit la droite a' et les ponctuelles engendrées par les deux points sont projectives. Deux cas sont à considérer, selon que les droites a, a' se coupent ou ne se coupent pas, où, un point commun à ces droites et tout plan contenant les deux droites devant être un point double et un plan double de l'espace gauche $\mathcal{E}$,

selon que la droite a coupe ou ne coupe pas l'une des directrices s, t de la congruence linéaire $\mathcal{G}_1$.

a.- Quand la droite a ne rencontre ni l'une ni l'autre des directrices s, t, les droites a, a' sont gauches et la droite x engendre un système réglé. Comme la droite x est une droite double de l'espace gauche E, elle coupe les droites s, t et celles-ci sont ainsi que les droites a, a', des directrices du système réglé.

b.- Lorsque la droite a coupe l'une des droites s, t, la droite s, par exemple, en un point A, la droite a' passe par ce point qui est à la fois un point double de l'espace gauche E et un point double des ponctuelles perspectives a(X), a'(X'). Le plan ξ ou aa' des droites a, a' est un plan double de l'espace gauche E et il doit passer par une des droites s ou t; s'il passait par la droite t, la droite a couperait les deux droites s, t et serait une droite double de l'espace gauche E, ce qui est contraire à l'hypothèse. Le plan ξ passe donc par la droite s; il coupe la droite t en un point Y et ce point double est nécessairement le centre de perspectivité des ponctuelles a (X), a' (X') ou le point de concours des droites doubles x correspondant aux positions du point X différentes du point A sur la droite a. Lorsque le point X coïncide avec le point A, il se confond avec le point X' et la droite x devient une quelconque des droites doubles passant par le point A, c'est-à-dire, une quelconque des droites passant par le point A dans le plan At. Les deux faisceaux répondant à la question sont donc le faisceau de support Y dans le plan aa' et celui de support A dans le plan At.

N.B.- Dans le cas d'une involution gauche réelle dont le plan central est un plan propre, si la droite réelle a est dans le plan central et n'est parallèle ni à la droite s ni à la droite t, le système réglé est formé des génératrices rectilignes d'un même mode d'un paraboloïde hyperbolique; ce paraboloïde est équilatère lorsque la droite a coïncide avec l'un ou l'autre des axes de symétrie x, y de l'espace gauche contenus dans le plan central.

2) Théorème. *Trois droites deux à deux gauches d'une congruence linéaire, ou, ce qui revient au même, trois droites doubles, deux à deux gauches, d'un espace gauche sont trois génératrices rectilignes d'un même mode d'un système réglé dont toutes les autres génératrices rectilignes sont des droites doubles de l'espace gauche considéré; le système réglé complémentaire est formé de droites conjuguées deux à deux dans cet espace et, par suite, en involution sur ce système réglé.*

Soient d_1, d_2, d_3 les trois droites doubles considérées dans l'espace gauche E; Σ le système réglé dont elles sont les directrices, a une génératrice rectiligne quelconque de ce système réglé; A_1, A_2, A_3 les points où la droite a coupe les droites d_1, d_2, d_3; A'_1, A'_2, A'_3 les points conjugués de ces trois points dans l'espace gauche E.- Les points A'_1, A'_2, A'_3 sont situés respectivement sur les droites d_1, d_2, d_3 et ils sont trois points de la droite a' conjuguée à la droite a dans l'espace gauche E. La droite a' coupe donc les droites d_1, d_2, d_3; elle est une génératrice rectiligne du système réglé Σ et celui-ci est déjà le second des systèmes réglés qu'il fallait trouver.

Quant au premier système réglé cherché, il résulte du théorème précédent qu'il est le système réglé Σ' formé des droites doubles qui coupent la droite a.

N.B.- Les directrices s, t de la congruence linéaire $\mathcal{G}_1$ associée à l'espace gauche E sont des directrices du système réglé Σ' et des génératrices rectilignes du système réglé Σ sur lequel elles sont les éléments doubles de l'involution déterminée par les droites conjuguées a, a'.

3) Théorème.

Quand les génératrices rectilignes d'un système réglé Σ sont en involution et que cette involution n'est pas une involution parabolique, les génératrices rectilignes qui sont conjuguées dans cette involution sont des droites conjuguées d'un espace gauche E qu'elles déterminent; le système réglé complémentaire Σ' est formé de droites doubles de l'espace gauche E.

a.- Lemme.

Quand deux systèmes réglés sont projectifs, on peut établir entre les espaces dans lesquels ils se trouvent une projectivité dans laquelle ils se correspondent et dans laquelle trois directrices arbitraires du premier système réglé correspondent à trois directrices arbitraires du second système.

Soient Σ (a, b, c, d, ...), Σ' (a', b', c', d' ....) les systèmes réglés projectifs donnés dans les espaces E, E'; x, y, z trois directrices arbitraires du premier, x', y', z' trois directrices arbitraires du second. On va démontrer qu'on

obtient une projectivité répondant à la question si on établit entre les deux espaces $\varepsilon, \varepsilon'$ une collinéation faisant correspondre les cinq points ax, ay, bx, by, cz de l'espace ε aux cinq points $a'x', a'y', b'x', b'y', c'z'$ de l'espace ε'. En effet, il résulte immédiatement de la manière dont la collinéation est établie que les droites a, b, x, y de l'espace ε sont les droites homologues des droites a', b', x', y' de l'espace ε'. D'autre part, à la droite z qui dans l'espace ε passe par le point cz et coupe les droites a, b, doit correspondre dans l'espace ε' une droite qui passe par le point $c'z'$ et coupe les droite a', b'; les droites z, z' sont donc des droites homologues et il en est de même des droites c, c'. Les droites x, y, z étant les droites homologues des droites x', y', z', les droites de l'espace ε qui coupent les droites x, y, z sont les droites homologues des droites de l'espace ε' qui coupent les droites x', y', z'; la collinéation considérée établit donc une projectivité entre les systèmes réglés Σ, Σ'. Mais cette projectivité est la projectivité donnée, attendu que dans les deux projectivités les trois génératrices rectilignes a, b, c du système réglé Σ correspondent aux mêmes génératrices rectilignes a', b', c' du système réglé Σ'. La collinéation qu'on a établie entre les espaces $\varepsilon, \varepsilon'$ répond donc à la question et on aurait obtenu une réciprocité au lieu d'une collinéation si, aux cinq points ax, ay, bx, by, cz de l'espace ε, on avait fait correspondre les cinq plans $a'x', a'y', b'x', b'y', c'z'$ de l'espace ε'.–

b.– Soient a et a', b et b', c et c',...... les couples de génératrices rectilignes conjuguées d'un système réglé involutif Σ et x, y, z trois directrices de ce système réglé. En vertu du lemme qu'on vient de démontrer, on peut établir, entre deux espaces superposés, une collinéation telle que les droites x, y, z soient des droites doubles et les systèmes réglés $aa'bb'cc'$......, $a'ab'bc'c$...... des figures correspondantes. Cette collinéation est involutive parce que les systèmes plans $ax, a'x$ se correspondent doublement; en effet, les points ax, ay, az correspondant doublement aux points $a'x, a'y, a'z$, les ponctuelles homologues ayant pour supports les droites a, a' se correspondent doublement; il en est de même des ponctuelles homologues ayant la droite x pour support commun; les droites homologues des systèmes plans $ax, a'x$ se correspondent doublement et il en est de même des points homologues des deux systèmes plans.–

La collinéation établie doit être une perspectivité harmonique ou une involution gauche. Mais elle n'est pas une perspectivité harmonique, car il existe des droites conjuguées telles que a et a' qui ne sont pas dans un même plan; elle est donc une involution gauche.– Dans cette involution gauche, le système réglé Σ remplit les conditions du théorème, ses génératrices rectilignes étant conjuguées deux par deux. Quant au système réglé complémentaire Σ', il suffit d'appliquer le théorème précédent aux droites x, y, z pour constater qu'il répond à la question.

Les génératrices rectilignes doubles du système réglé involutif Σ sont les directrices de la congruence linéaire G_1 des droites doubles de l'involution gauche trouvée; celle-ci est donc la seule pouvant répondre à la question et la considération de ces génératrices rectilignes doubles aurait pu conduire à une autre démonstration du théorème.

6° Quadriques anallagmatiques dans un espace gauche.– 1) Définition. Une quadrique est dite anallagmatique dans l'espace gauche ε lorsque ses points sont conjugués deux par deux dans cet espace gauche et qu'ainsi la quadrique se correspond à elle-même dans l'involution gauche appliquée à l'espace gauche ε. Telle est une quadrique formée de deux systèmes réglés dont les génératrices rectilignes d'un mode sont des droites doubles, celles de l'autre mode étant des droites conjuguées deux par deux.

2) Théorème.

Pour qu'une quadrique soit anallagmatique dans un espace gauche, il faut et il suffit qu'elle admette les directrices de la congruence linéaire associée à l'espace gauche pour génératrices rectilignes ou comme droites polaires. –

Soient s, t les directrices de la congruence linéaire G_1 associée à l'espace gauche ε. Lorsque la quadrique Q admet ces droites comme génératrices rectilignes, elle est une des quadriques déjà signalées dans la définition; il n'y a donc qu'à s'occuper du cas où la quadrique Q considérée n'admet pas les droites s, t pour directrices. Soit A un point quelconque de cette quadrique; d la droite double de l'espace gauche ε menée par le point A; B, C les points où la droite d coupe les droites s, t, D le conjugué harmonique du point A par rapport aux

points B, C. Le point D est également le point conjugué du point A dans l'espace gauche ε. Pour que la quadrique Q soit anallagmatique dans cet espace gauche, il faut et il suffit que le point D soit sur la quadrique lorsque le point A se déplace d'une manière quelconque sur cette quadrique ; or, à cause de la manière dont on a construit le point D, il faut et il suffit que les droites s, t soient des droites polaires pour la quadrique.

3) Remarques. - a. - Si les droites s, t sont des droites polaires pour la quadrique Q, les génératrices rectilignes de chacun des systèmes réglés Σ, Σ' formant la quadrique sont conjuguées deux par deux dans l'espace gauche ε. Chacun des systèmes réglés Σ, Σ' est en involution et les droites doubles d_1 et d_2, d'_1 et d'_2 de ces systèmes réglés sont les seules droites doubles de l'espace gauche ε qui puissent être des génératrices rectilignes de la quadrique Q ; ces droites doubles sont donc les deux couples de côtés opposés d'un quadrilatère gauche dont les sommets opposés sont les points d'intersection S_1 et S_2, T_1 et T_2 de la quadrique Q par les droites s, t.

b. - La quadrique Q est déterminée dès qu'on donne les droites d_1, d_2, d'_1, d'_2 (ou les points S_1, S_2, T_1, T_2) et une génératrice rectiligne quelconque a, celle-ci coupant les droites d_1 et d_2 ou les droites d'_1 et d'_2.

c. - Elle est encore déterminée, si on donne une génératrice quelconque a de l'un des deux systèmes réglés Σ, Σ' et deux génératrices rectilignes quelconques b, c de l'autre système réglé, pourvu que les droites b, c ne soient pas conjuguées dans l'espace gauche ε et qu'elles coupent la droite a et la droite conjuguée a' de la droite a dans l'espace gauche ε.

4) Théorème. *Deux systèmes réglés complémentaires dont chacun est en involution déterminent une involution gauche dans laquelle ils sont formés de droites conjuguées et dans laquelle la quadrique qui est leur support est une quadrique anallagmatique.*

Soient a_1 et a_2, b_1 et b_2, c_1 et c_2, ... les couples de génératrices rectilignes en involution du système réglé Σ, a'_1 et a'_2, b'_1 et b'_2, c'_1 et c'_2.......... les couples de génératrices rectilignes en involution du système réglé Σ', Q la quadrique servant de support à ces deux systèmes réglés. En vertu du lemme démontré ci-dessus (5°, 3'), il est possible d'établir entre deux espaces superposés une collinéation dans laquelle les droites $a_1, a_2, b_1, a'_1, a'_2, b'_1$ soient les droites homologues des droites $a_2, a_1, b_2, a'_2, a'_1, b'_2$. Dans cette collinéation, le système réglé a_1, a_2, b_1 étant projectif au système réglé a_2, a_1, b_2 et le système réglé a'_1, a'_2, b'_1 projectif au système réglé a'_2, a'_1, b'_2, on y retrouve les involutions données sur les systèmes réglés Σ, Σ'. De plus, le système plan a_1, a'_1 correspondant doublement au système plan a_2, a'_2, parce qu'il en est ainsi des ponctuelles ayant pour supports les droites a_1 et a_2, a'_1 et a'_2, et les droites homologues a_1, a_2 étant gauches, la collinéation considérée est une involution gauche. Cette involution gauche répond à la question, puisque la quadrique Q y est anallagmatique. Mais elle est la seule pouvant répondre la question ; en effet, pour qu'une involution gauche convienne, elle doit associer le système plan a_1 a'_1 au système plan a_2 a'_2 comme le fait l'involution gauche déjà trouvée et on sait qu'une involution gauche est déterminée par cette condition.

5) Remarques. - a. - Lorsque la quadrique Q a des génératrices rectilignes réelles, l'involution gauche trouvée est hyperbolique, si les involutions données sur les systèmes réglés Σ, Σ' sont toutes deux elliptiques ou hyperboliques ; l'involution gauche est elliptique quand les involutions données sur les deux systèmes réglés sont de noms contraires. - En effet, si les involutions données sur les systèmes réglés Σ, Σ' sont hyperboliques, les droites doubles d_1 et d_2, d'_1 et d'_2 de ces involutions sont réelles ; il en est de même des points S_1, S_2, T_1, T_2 (3, a) et des droites s, t. Si les involutions données sur les systèmes réglés Σ, Σ' sont elliptiques, les droites doubles d_1 et d_2 sont imaginaires conjuguées, ainsi que les droites doubles d'_1, d'_2 ; il en est de même des points S_1 et S_2, T_1 et T_2 ; les droites s et t sont donc réelles. Si l'involution donnée sur le système réglé Σ est hyperbolique tandis que celle donnée sur le système réglé Σ' est elliptique, les droites doubles d_1, d_2 sont réelles et les droites doubles d'_1, d'_2 sont imaginaires conjuguées ; les points doubles de l'involution gauche situés sur chacune des droites doubles d_1, d_2 sont des points imaginaires conjugués et les droites s et t sont des droites imaginaires conjuguées gauches.

b. - On arrive aux mêmes conclusions de la manière suivante applicable aux trois cas et dans laquelle il n'est fait usage que d'éléments réels. Soient a la droite joignant les points A_1 ou $a_1 a'_1$, A_2 ou $a_2 a'_2$;

α un plan quelconque passant par la droite a ; B_1, B_2, C'_1, C'_2 les points où le plan α rencontre les droites b_1, b_2, c'_1, c'_2 ; γ la conique passant par les points $A_1, A_2, B_1, B_2, C'_1, C'_2$ obtenue en coupant la quadrique Q par le plan α, P et P', X et X', Y et Y' les points de rencontre de la droite a et des droites $B_1 B_2$ et $C'_1 C'_2$, $B_1 C'_1$ et $B_2 C'_2$, $B_1 C'_2$ et $B_2 C'_1$. Il résulte du théorème de Desargues que les points A_1 et A_2, P et P', X et X', Y et Y' sont en involution sur la droite a. Mais les points A_1 et A_2 sont des points conjugués dans l'involution gauche déterminée par les systèmes réglés involutifs Σ, Σ'; il en est de même des points X et X', Y et Y' où la droite double a coupe les plans conjugués $b_1 c'_1$ et $b_2 c'_2$, $b_1 c'_2$ et $b_2 c'_1$. Les points P, P' sont donc également des points conjugués dans l'involution gauche et il suffit de donner ces deux points avec les points A_1, A_2 pour que l'involution des points conjugués de l'involution gauche sur la droite a soit déterminée. La droite a étant une droite double réelle de l'involution gauche, celle-ci sera elliptique ou hyperbolique selon que l'involution obtenue sur la droite a aura des points doubles imaginaires ou réels, c'est-à-dire, selon que les segments rectilignes A_1A_2, PP' empiéteront ou n'empiéteront pas l'un sur l'autre. Or les points P, P' sont les pôles des ponctuelles involutives du second ordre suivant lesquelles la conique γ coupe les systèmes réglés involutifs donnés Σ et Σ'; chacun de ces points est intérieur ou extérieur à la conique γ selon qu'il est le pôle d'une involution elliptique ou hyperbolique. Les segments rectilignes $A_1 A_2$, PP' n'empiéteront donc l'un sur l'autre et l'involution gauche ne sera elliptique que si les involutions données sur les systèmes réglés Σ, Σ' sont d'espèces différentes; l'involution gauche sera hyperbolique, si les involutions données sur les systèmes réglés Σ, Σ' sont toutes deux elliptiques ou toutes deux hyperboliques.

e.- Les quadriques réelles qui sont anallagmatiques dans une involution gauche elliptique : sont des paraboloïdes hyperboliques et des hyperboloïdes à une nappe.

Soient A et A', B et B' deux couples de points conjugués réels situés sur une quadrique anallagmatique réelle Q; C, C' les points conjugués où la droite double a ou AA' coupe les plans conjugués β, β' tangents à la quadrique Q aux points B, B'. Si la quadrique Q était un ellipsoïde, un hyperboloïde à deux nappes ou un paraboloïde elliptique, les segments rectilignes AA', CC' n'empiétraient pas l'un sur l'autre; l'involution des points conjugués de l'involution gauche sur la droite a serait hyperbolique et il en serait de même de l'involution gauche, ce qui est contraire à l'hypothèse.

c. Réciprocité quelconque.

39. Soient E, E' deux espaces à trois dimensions entre lesquels on établit une réciprocité dont les équations sont $(i = 1,2,3,4)$

$$(1) \qquad \xi'_i = a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + a_{i3}X_3 + a_{i4}X_4 \qquad \text{ou} \qquad DX_1 = \alpha_{1i}\xi'_1 + \alpha_{2i}\xi'_2 + \alpha_{3i}\xi'_3 + \alpha_{4i}\xi'_4 \qquad (2)$$

ou

$$(3) \qquad \xi_i = a_{1i}X'_1 + a_{2i}X'_2 + a_{3i}X'_3 + a_{4i}X'_4 \qquad \text{ou} \qquad DX'_i = \alpha_{i1}\xi_1 + \alpha_{i2}\xi_2 + \alpha_{i3}\xi_3 + \alpha_{i4}\xi_4; \qquad (4)$$

dans ces équations, on suppose

$$(5) \qquad D = |a_{11}\ a_{22}\ a_{33}\ a_{44}| \neq 0$$

et α_{ij} est le mineur de l'élément a_{ij} dans le déterminant D.

40. Problème. *Déterminer les plans de chaque espace qui contiennent les points homologues de l'autre espace et les points de chaque espace qui sont dans les plans homologues de l'autre espace.*

En exprimant que les plans ξ, ξ' contiennent respectivement les points X', X, on obtient les équations de condition

$$\Sigma a_{ij}X_iX_j = 0, \qquad \Sigma a_{ij}X'_iX'_j = 0, \qquad \Sigma \alpha_{ij}\xi_i\xi_j = 0, \qquad \Sigma \alpha_{ij}\xi'_i\xi'_j = 0.$$

Le lieu des points considérés est donc une même quadrique du second ordre pour les deux espaces et celui des plans considérés est une même quadrique de la seconde classe. Chacune de ces quadriques est la transformée de l'autre par la réciprocité donnée quel que soit le sens dans lequel on applique cette réciprocité, de E à E' ou de E' à E. Leurs équations développées en coordonnées courantes X_i et ξ_i sont

$$(6)\qquad a_{11}X_1^2+a_{22}X_2^2+\cdots\cdots+(a_{12}+a_{21})X_1X_2+\cdots\cdots\cdots=0$$

et

$$(7)\qquad \alpha_{11}\xi_1^2+\alpha_{22}\xi_2^2+\cdots\cdots+(\alpha_{12}+\alpha_{21})\xi_1\xi_2+\cdots\cdots\cdots=0.$$

Différents cas sont à distinguer selon que les équations (6) et (7) se réduisent à des identités, représentant deux plans confondus et deux points confondus, deux plans distincts et deux points distincts, un cône du second ordre non dégénéré et une conique de seconde classe non dégénérée, ou des quadriques non dégénérées du second ordre et de la seconde classe

41. **Premier cas: Les équations (6) et (7) se réduisent à des identités.** — Ce cas se produit quand on a

$$a_{ii}=a_{ij}+a_{ji}=0.$$

Le déterminant D est alors un déterminant symétrique gauche. Les équations (3) sont équivalentes aux équations (1) et les équations (4) aux équations (2). Chaque point ne correspond qu'à un seul plan et il est dans ce plan. On dit que deux éléments homologues se correspondent doublement et la réciprocité est dite involutive. On considère les espaces $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ comme formant un seul espace auquel on donne le nom d'espace focal et dont on étudiera les propriétés dans la théorie des réciprocités involutives (litt. D).

42. **Second cas: Les équations (6) et (7) représentent deux plans confondus et deux points confondus.** On peut supposer que les plans représentés par l'équation (6) coïncident avec la face BCD ou α du tétraèdre fondamental ABCD ou $\alpha\beta\gamma\delta$ des coordonnées quaternaires; cela donne

$$a_{11}\neq 0,\qquad a_{22}=a_{33}=a_{44}=a_{ij}+a_{ji}=0.$$

Lorsque le plan ξ' coïncide avec le plan α, le point X devient le point de coordonnées

$$\alpha_{11}=0,\qquad \alpha_{12},\qquad \alpha_{13},\qquad \alpha_{14}$$

et on peut supposer que ce point coïncide avec le point B (0,1,0,0); on a donc

$$\alpha_{12}\neq 0,\quad \alpha_{13}=0,\quad \alpha_{14}=0,\qquad a_{12}\neq 0,\quad a_{23}=0,\quad a_{24}=0,\quad a_{34}\neq 0.$$

Lorsque le point X coïncide avec le point C (0,0,1,0), le plan ξ' devient le plan de coordonnées

$$a_{13},\qquad 0,\qquad 0,\qquad -a_{34};$$

ce plan passe par les points B C et non par le point D; on peut supposer qu'il passe par le point A, ce qui donne

$$a_{13}=0.$$

Lorsque le point X est le point D (0,0,0,1), le plan ξ' a pour coordonnées

$$a_{14},\qquad 0,\qquad a_{34},\qquad 0;$$

ce plan passe par les points B, D et non par le point C; on peut supposer qu'il passe par le point A, ce qui donne

$$a_{14}=0.$$

De cette manière, les équations de la réciprocité se réduisent déjà à

$$\xi_1'=a_{11}X_1+a_{12}X_2,\qquad \xi_2'=-a_{12}X_1,\qquad \xi_3'=a_{34}X_4,\qquad \xi_4'=-a_{34}X_3$$

ou

$$\xi_1=a_{11}X_1'-a_{12}X_2',\qquad \xi_2=a_{12}X_1',\qquad \xi_3=-a_{34}X_4',\qquad \xi_4'=a_{34}X_3'.$$

Lorsque le point X coïncide avec le point A (1,0,0,0), le plan ξ' devient le point de coordonnées

$$a_{11},\qquad -a_{12},\qquad 0,\qquad 0$$

qui passe par les points C, D et ne contient ni le point A, ni le point B; on peut supposer que ce plan passe par le cinquième point fondamental E des coordonnées quaternaires, de cette manière

$$a_{11}=a_{12}=1.$$

Lorsque le point X' coïncide avec le point de coordonnées 1, 1, 0, 1 le plan ξ devient le plan de coordonnées

$$0, \quad 1, \quad -a_{34}, \quad 0;$$

ce plan passe par la droite AD, mais il ne contient ni le point B ni le point C ; on peut donc supposer qu'il passe également par le point E, ce qui donne

$$a_{34} = 1.$$

Dans ces conditions, les équations de la réciprocité se réduisent à

(A) $\qquad \xi'_1 = X_1 + X_2, \qquad \xi'_2 = -X_1 \qquad \xi'_3 = X_4, \qquad \xi'_4 = -X_3$

ou

(A') $\qquad \xi_1 = X'_1 - X'_2, \qquad \xi_2 = X_1, \qquad \xi_3 = -X'_4, \qquad \xi_4 = X'_3$

ou

(A$_1$) $\qquad X'_1 = \xi_2, \qquad X'_2 = -\xi_1 + \xi_2, \qquad X'_3 = \xi_4, \qquad X'_4 = -\xi_3$

ou

(A'$_1$) $\qquad X_1 = -\xi'_2, \qquad X_2 = \xi'_1 + \xi'_2, \qquad X_3 = -\xi'_4, \qquad X_4 = \xi'_3.$

Les équations (6) et (7) deviennent

$$X_1^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad \xi_2^2 = 0.$$

Les points du système plan α ou BCD correspondent doublement aux plans de la gerbe B ou $\alpha\gamma\delta$. – Les points B et $X \equiv X'$ sont séparés harmoniquement l'un de l'autre par les plans ξ', ξ et ces plans se coupent dans le plan α ; les plans α et $\xi \equiv \xi'$ sont séparés harmoniquement l'un de l'autre par les points X', X et ces points sont en ligne droite avec le point B.

Remarque. – Le carré de la réciprocité (A) est la collinéation définie par les équations

(a) $\qquad X'_1 = X_1, \qquad X'_2 = 2X_1 + X_2, \qquad X'_3 = X_3, \qquad X'_4 = X_4$

ou

(a') $\qquad \xi'_1 = \xi_1 - 2\xi_2, \qquad \xi'_2 = \xi_2, \qquad \xi'_3 = \xi_3, \qquad \xi'_4 = \xi_4.$

Cette collinéation est une perspectivité dont le centre et le plan sont le point B et le plan α.

43. Troisième cas : Les équations (6) et (7) représentent deux plans distincts et deux points distincts. En prenant les plans représentés par l'équation (6) sur les faces α ou BCD, β ou ACD du tétraèdre fondamental, l'équation (6) se réduit à

$$X_1 X_2 = 0,$$

et le déterminant D est formé des éléments

$$0, a_{12}, a_{13}, a_{14}; \quad a_{21}, 0, a_{23}, a_{24}; \quad -a_{13}, -a_{23}, 0, a_{34}; \quad -a_{14}, -a_{24}, -a_{34}, 0,$$

avec la condition qu'on ait

$$a_{12} + a_{21} \neq 0.$$

Au système plan α correspondent deux gerbes par les équations

$$\xi'_1 = a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + a_{14}X_4, \; \xi'_2 = a_{23}X_3 + a_{24}X_4, \; \xi'_3 = -a_{23}X_2 + a_{34}X_4, \; \xi'_4 = -a_{24}X_2 - a_{34}X_3$$

et

$$\xi_1 = a_{21}X'_2 - a_{13}X'_3 - a_{14}X'_4, \; \xi_2 = -a_{23}X'_3 - a_{24}X'_4, \; \xi_3 = a_{23}X'_2 - a_{34}X'_4, \; \xi_4 = a_{24}X'_2 + a_{34}X'_3.$$

Les deux gerbes ont pour support commun le point du plan α dont les coordonnées sont

$$0, \quad a_{34}, \quad -a_{24}, \quad a_{23}.$$

Au système plan β correspondent deux gerbes par les équations

$$\xi'_1 = a_{13}X_3 + a_{14}X_4, \; \xi'_2 = a_{21}X_1 + a_{23}X_3 + a_{24}X_4, \; \xi'_3 = -a_{13}X_1 + a_{34}X_4, \; \xi'_4 = -a_{14}X_1 - a_{34}X_3$$

et

$$\xi_1 = -a_{13}X'_3 - a_{14}X'_4, \; \xi_2 = a_{12}X'_1 - a_{23}X'_3 - a_{24}X'_4, \; \xi_3 = a_{13}X'_1 - a_{34}X'_4, \; \xi_4 = a_{14}X'_1 + a_{34}X'_3.$$

Les deux gerbes ont pour support commun le point du plan β dont les coordonnées sont

$$a_{34}, \quad 0, \quad -a_{14}, \quad a_{13}.$$

Deux hypothèses sont à considérer : 1° $a_{34}=0$. Les points correspondant aux plans α, β sont situés sur la droite $\alpha\beta$. Les points étant nécessairement des points différents l'un de l'autre, on peut supposer qu'ils coïncident respectivement avec les sommets C, D du tétraèdre fondamental, ce qui donne

$$a_{24}\neq 0, \qquad a_{23}=0, \qquad a_{14}=0, \qquad a_{13}\neq 0.$$

Les équations (1) de la réciprocité se réduisent déjà à

$$\xi'_1 = a_{12}X_2 + a_{13}X_3, \qquad \xi'_2 = a_{21}X_1 + a_{24}X_4, \qquad \xi'_3 = -a_{13}X_1, \qquad \xi'_4 = -a_{24}X_2$$

avec les conditions

$$a_{12}+a_{21}\neq 0, \qquad a_{13}\neq 0, \qquad a_{24}\neq 0.$$

Lorsque le point X coïncide avec le point A (1, 0, 0, 0), le plan ξ' devient le plan de coordonnées

$$0, \quad a_{21}, \quad -a_{13}, \quad 0\,;$$

ce plan passe par la droite AD et non par le point C ; on peut supposer qu'il passe par le point B, ce qui donne

$$a_{21}=0 \quad \text{et} \quad a_{12}\neq 0.$$

Lorsque le point X coïncide avec le point B (0, 1, 0, 0), le plan ξ' devient le plan de coordonnées

$$a_{12}, \quad 0, \quad 0, \quad -a_{24}\,;$$

Le plan passe par la droite BC, mais il ne contient ni le point A, ni le point D ; on peut supposer qu'il passe par le point E (1, 1, 1, 1), ce qui donne

$$a_{12}=a_{24}=1.$$

Lorsque le point X devient le point de coordonnées 0, 0, 1, 1, le plan ξ' devient le plan de coordonnées

$$a_{13}, \quad 1, \quad 0, \quad 0\,;$$

ce plan passe par la droite CD et on peut supposer qu'il passe par le point (1, −1, 0, 0), ce qui achève de déterminer le point E et donne

$$a_{13}=1.$$

Dans ces conditions, les équations de la réciprocité se réduisent à

(B) $$\xi'_1 = X_2+X_3, \qquad \xi'_2 = X_4, \qquad \xi'_3 = -X_1, \qquad \xi'_4 = -X_2$$

ou

(B') $$\xi_1 = -X'_3, \qquad \xi_2 = X'_1 - X'_4, \qquad \xi_3 = X'_1, \qquad \xi_4 = X'_2$$

ou

(B_1) $$X'_1 = \xi_3, \qquad X'_2 = \xi_4, \qquad X'_3 = -\xi_1, \qquad X'_4 = -\xi_2+\xi_3$$

ou

(B'_1) $$X_1 = -\xi'_3, \qquad X_2 = -\xi'_4, \qquad X_3 = \xi'_1+\xi'_4, \qquad X_4 = \xi'_2.$$

Les équations (6) et (7) deviennent

$$X_1X_2 = 0 \qquad \text{et} \qquad \xi_3\xi_4 = 0.$$

Les plans qui passent par l'un ou l'autre des points C, D sont les seuls qui passent par les points auxquels ils correspondent.

Remarque. – Le carré de la réciprocité (B) est la collinéation d'équations

(b) $$X'_1 = -X_1, \qquad X'_2 = -X_2, \qquad X'_3 = -X_2 - X_3, \qquad X'_4 = -X_1 - X_4$$

et

(b') $$\xi'_1 = -\xi_1+\xi_4, \quad \xi'_2 = -\xi_2+\xi_3, \quad \xi'_3 = -\xi_3, \quad \xi'_4 = -\xi_4.$$

Les points doubles et les plans doubles de cette collinéation sont les points et les plans de la ponctuelle et de la feuillée

ayant pour support commun la droite CD ou $\alpha\beta$. Dans la réciprocité (B), ces deux formes correspondent doublement l'une à l'autre.

2° $a_{34} \neq 0$. Les points qui correspondent aux plans α, β ne sont pas situés sur la droite $\alpha\beta$ et on peut supposer qu'ils coïncident respectivement avec les points B $(0,1,0,0)$ et A $(1,0,0,0)$, ce qui donne

$$a_{24}=0, \qquad a_{23}=0, \qquad a_{14}=0, \qquad a_{13}=0.$$

Comme on peut faire

$$a_{34}=1,$$

les équations (1) de la réciprocité deviennent

$$\xi'_1=a_{12}X_2, \qquad \xi'_2=a_{21}X_1, \qquad \xi'_3=X_4, \qquad \xi'_4=-X_3,$$

avec les conditions

$$a_{12}\neq 0, \qquad a_{21}\neq 0, \qquad a_{12}+a_{21}\neq 0.$$

Lorsque le point X devient le point de coordonnées $0,1,1,0$, le plan ξ' devient le plan de coordonnées

$$a_{12}, \qquad 0, \qquad 0, \qquad -1,$$

et on peut supposer qu'il passe par le point E, $(1,1,1,1)$, ce qui donne

$$a_{12}=1.$$

Lorsque le point X devient le point de coordonnées $0,0,1,1$, le plan ξ' devient le plan de coordonnées

$$0, \qquad 0, \qquad 1, \qquad -1,$$

ce qui achève de déterminer le point E.

Il y a donc deux cas à distinguer. — 1) $a_{21}=1$. Les équations de la colliniation se réduisent à

(C) $$\xi'_1=X_2, \qquad \xi'_2=X_1, \qquad \xi'_3=X_4, \qquad \xi'_4=-X_3$$
ou
(C') $$\xi_1=X'_2, \qquad \xi_2=X'_1, \qquad \xi_3=-X'_4, \qquad \xi_4=X'_3$$
ou
(C_1) $$X'_1=\xi_2, \qquad X'_2=\xi_1, \qquad X'_3=\xi_4, \qquad X'_4=-\xi_3$$
ou
(C'_1) $$X_1=\xi'_2, \qquad X_2=\xi'_1, \qquad X_3=-\xi'_4, \qquad X_4=\xi'_3.$$

Les équations (6) et (7) se réduisent à

$$X_1X_2=0 \qquad \text{et} \qquad \xi_1\xi_2=0.$$

Les plans passant par l'un ou l'autre des points A ou B sont les seuls qui contiennent les points auxquels ils correspondent. Si le point X coïncide avec le point X' sur la droite CD, les plans ξ', ξ sont confondus en un seul qui passe par la droite AB et par le point $X \equiv X'$. Si le point X coïncide avec le point X' sur la droite AB, les plans ξ', ξ sont confondus en un seul qui passe par la droite CD et par le conjugué harmonique du point $X \equiv X'$ par rapport aux points A, B.

Remarque. — Le carré de la réciprocité (C) est la colliniation d'équations

(c) $$X'_1=X_1, \qquad X'_2=X_2, \qquad X'_3=-X_3, \qquad X'_4=-X_4$$
et
(c') $$\xi'_1=\xi_1, \qquad \xi'_2=\xi_2, \qquad \xi'_3=-\xi_3, \qquad \xi'_4=-\xi_4.$$

Cette colliniation est l'involution gauche ayant les droites AB, CD pour supports.

2) $a_{21}\neq \pm 1$. Les équations de la réciprocité sont

(D) $$\xi'_1=X_2 \qquad \xi'_2=a_{21}X_1 \qquad \xi'_3=X_4, \qquad \xi'_4=-X_3$$
ou
(D') $$\xi_1=a_{21}X'_2 \qquad \xi_2=X'_1, \qquad \xi_3=-X'_4, \qquad \xi_4=X'_3$$

ou

(D₁) $X'_1 = \xi_2, \quad X'_2 = \frac{1}{a_{21}}\xi_1, \quad X'_3 = \xi_4, \quad X'_4 = \xi_3$

ou

(D'₁) $X_1 = \frac{1}{a_{21}}\xi'_2 \quad X_2 = \xi'_1, \quad X_3 = -\xi'_4, \quad X_4 = \xi'_3$

Les équations (6) et (7) deviennent

$$X_1 X_2 = 0 \qquad \text{et} \qquad \xi_1\xi_2 = 0.$$

Les plans passant par l'un ou l'autre des points A, B sont encore les seuls qui contiennent les points auxquels ils correspondent. La ponctuelle de support CD est encore doublement perspective à la feuillée AB; mais les plans homologues d'un même point de la droite AB sont des plans différents passant par la droite CD.

Remarque. Le carré de la réciprocité (D) est la collinéation dont les équations sont

(d) $X'_1 = a_{21}X_1, \quad X'_2 = \frac{1}{a_{21}}X_2, \quad X'_3 = -X_3, \quad X'_4 = -X_4$

ou

(d') $\xi'_1 = \frac{1}{a_{21}}\xi_1, \quad \xi'_2 = a_{21}\xi_2, \quad \xi'_3 = -\xi_3, \quad \xi'_4 = -\xi_4.$

Les points doubles de cette collinéation sont les points A, B et les points de la droite $\alpha\beta$; les plans doubles sont les plans α, β et les plans passant par la droite AB.

44. Quatrième cas: Les équations (6) et (7) représentent un cône du second ordre non dégénéré et une conique de la seconde classe non dégénérée. On peut choisir les éléments fondamentaux des coordonnées quaternaires pour que le cône Γ représenté par l'équation (6) soit circonscrit au tièdre ABCD, ce qui donne

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{44} = a_{12} + a_{21} = a_{13} + a_{31} = a_{14} + a_{41} = 0,$$

$$a_{34} + a_{43} \neq 0, \qquad a_{42} + a_{24} \neq 0, \qquad a_{23} + a_{32} \neq 0.$$

et l'équation du cône Γ s'écrit

$$(a_{34} + a_{43})X_3X_4 + (a_{42} + a_{24})X_4X_2 + (a_{23} + a_{32})X_2X_3 = 0$$

Le déterminant D des équations de la réciprocité est formé des éléments

$$0, a_{12}, a_{13}, a_{14}; -a_{12}, 0, a_{23}, a_{24}; -a_{13}, a_{32}, 0, a_{34}; -a_{14}, a_{42}, a_{43}, 0.$$

Au point A (1, 0, 0, 0) correspond doublement le plan ϖ d'équation

$$a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + a_{14}X_4 = 0.$$

Deux hypothèses sont à considérer. 1° Le plan ϖ est tangent au cône Γ. Les droites AB, AC, AD étant trois génératrices rectilignes quelconques du cône Γ, on peut supposer le plan ϖ tangent au cône suivant la droite AB et ainsi l'équation précédente du plan ϖ doit être équivalente à

$$(a_{23} + a_{32})X_3 + (a_{42} + a_{24})X_4 = 0,$$

on doit donc avoir

$$a_{12} = 0, \quad a_{13} : a_{14} = (a_{23} + a_{32}) : (a_{42} + a_{24}), \quad a_{13} \neq 0, \quad a_{14} \neq 0.$$

Lorsque le point X coïncide avec le point B(0, 1, 0, 0) pris arbitrairement sur la droite AB, le plan ξ' devient le plan de coordonnées $0, 0, a_{32}, a_{42}$. Ce plan passe par les points A, B et, comme il doit être différent du plan ϖ, on peut supposer qu'il passe par la droite AC, ce qui donne

$$a_{32} = 0, \qquad a_{42} \neq 0, \qquad a_{23} \neq 0.$$

Lorsque le point X' coïncide avec le point B(0, 1, 0, 0), le plan ξ devient le plan de coordonnées $0, 0, a_{23}, a_{24}$; ce plan passe par les points A, B et non par le point C; comme il doit être différent du plan ϖ, on peut supposer

qu'il passe par la droite AD, ce qui donne

$$a_{24}=0.$$

Lorsque le point X coïncide avec le point C $(0,0,1,0)$ puis arbitrairement sur la droite AC, le plan ξ' devient le plan de coordonnées $a_{13}, a_{23}, 0, a_{43}$ qui passe par le point C, mais ne contient ni le point A ni le point B. On peut supposer qu'il passe par le point D, ce qui achève de déterminer ce point et donne

$$a_{43}=0, \qquad a_{34}\neq 0$$

Si on suppose en outre que le même plan passe par le point E $(1,1,1,1)$, on doit faire

$$a_{13}+a_{23}=0 \quad \text{ou} \quad a_{23}=-a_{13}.$$

En ce moment, les équations du cône Γ et du plan ϖ sont

$$a_{34}X_3X_4+a_{42}X_4X_2-a_{13}X_2X_3=0, \qquad a_{13}X_3+a_{14}X_4=0$$

et on a

$$a_{13}:a_{14}=-a_{13}:a_{42} \quad \text{ou} \quad a_{42}=-a_{14}.$$

En mettant la droite AE sur l'axe d'homologie du trièdre ABCD et du trièdre des plans tangents au cône Γ suivant les génératrices rectilignes AB, AC, AD, ce qui achève de déterminer le point E, on doit faire

$$a_{34}=a_{42}=-a_{13}=1.$$

De cette manière, les équations de la réciprocité deviennent

(E) $\qquad \xi'_1=-X_3-X_4, \qquad \xi'_2=X_3, \qquad \xi'_3=X_1+X_4, \qquad \xi'_4=X_1+X_2$

ou

(E') $\qquad \xi_1=X'_3+X'_4, \qquad \xi_2=X'_4, \qquad \xi_3=-X'_1+X'_2, \qquad \xi_4=-X'_1+X'_3$

ou

(E_1) $\qquad X'_1=\xi_1-\xi_2-\xi_4, \qquad X'_2=\xi_1-\xi_2+\xi_3-\xi_4, \qquad X'_3=\xi_1-\xi_2, \qquad X'_4=\xi_2$

ou

(E'_1) $\qquad X_1=\xi'_1+\xi'_2+\xi'_3, \qquad X_2=-\xi'_1-\xi'_2-\xi'_3+\xi'_4, \qquad X_3=\xi'_2 \qquad X_4=-\xi'_1-\xi'_2.$

L'équation (ξ) devient

$$\xi_1^2-\xi_2^2+\xi_1\xi_3-\xi_1\xi_4=0$$

et peut se mettre sous les deux formes

$$\xi_1(\xi_1+\xi_3-\xi_4)-\xi_2^2=0, \qquad (2\xi_1+\xi_3-\xi_4)^2-(\xi_3-\xi_4)^2-4\xi_2^2=0.$$

Elle représente une conique (γ) dont un triangle polaire a pour sommets les points d'équations

$$\xi_2=0, \qquad \xi_3-\xi_4=0, \qquad 2\xi_1+\xi_3-\xi_4=0$$

et de coordonnées

$$0,1,0,0, \qquad 0,0,1,-1, \qquad 2,0,1,-1;$$

ces trois points sont le point B, le point F où la droite CD coupe le plan ϖ et un point G de l'intersection AF du plan ϖ par le plan ACD. La conique (γ) est donc située dans le plan ϖ et les points de contact des tangentes issues du point B sont les points d'équations

$$\xi_1=0 \qquad \text{et} \qquad \xi_1+\xi_3-\xi_4=0$$

ou de coordonnées

$$1,0,0,0 \qquad \text{et} \qquad 1,0,1,-1;$$

le premier de ces points est le point A, le second est le point H où la droite AF coupe le plan BDE. Le point G est le conjugué harmonique du point F par rapport aux deux points A, H.

Quand un des points X, X' glisse sur une génératrice rectiligne du cône Γ, le plan homologue ξ' ou ξ tourne autour d'une tangente de la conique (γ).

ϖ

Remarque. Le carré de la réciprocité (E) est la collinéation d'équations

(e) $X'_1 = -X_1 - X_2 - 2X_3 - X_4,\quad X'_2 = -X_2 - 2X_3,\quad X'_3 = -2X_3 - X_4,\quad X'_4 = X_3$

ou

(e') $\xi'_1 = \xi_1,\quad \xi'_2 = \xi_1 - \xi_2,\quad \xi'_3 = \xi_1 - \xi_4,\quad \xi'_4 = 2\xi_1 - 2\xi_2 + \xi_3 - 2\xi_4.$

L'équation en k pour cette collinéation a une racine quadruple $k = -1$ à laquelle correspondent le seul point double A et le seul plan double ϖ.

2° Le plan ϖ n'est pas tangent au cône Γ. On peut supposer que ce plan coupe le cône Γ suivant les arêtes AB, AC du tétraèdre ABCD, ce qui donne

$$a_{12} = 0,\qquad a_{13} = 0,\qquad a_{14} \neq 0 \quad \text{ou} \quad a_{14} = 1.$$

Quand le point X glisse sur la droite AB, le plan ξ' tourne autour de la même droite et les deux formes engendrées sont projectives; il y a donc une position du point X différente du point A pour laquelle le plan ξ' est tangent au cône Γ. Si cette position du point X coïncide avec le point B(0, 1, 0, 0), le plan ξ' a pour équation

$$a_{32}X_3 + a_{42}X_4 = 0 \quad \text{aussi bien que} \quad (a_{23} + a_{32})X_3 + (a_{42} + a_{24})X_4 = 0;$$

on a donc

$$a_{23} : a_{32} = a_{24} : a_{42}.$$

En prenant le point C d'une manière analogue sur la droite AC, on a

$$a_{23} : a_{32} = a_{43} : a_{34}$$

et il en résulte qu'on peut faire

$$a_{23} = \lambda a_{32},\qquad a_{24} = \lambda a_{42}\qquad a_{43} = \lambda a_{34}.$$

L'équation du cône Γ devient

$$a_{34}X_3X_4 + a_{42}X_4X_2 + a_{32}X_3X_2 = 0.$$

Quelle que soit la manière de prendre le point D sur le cône, on peut supposer le cinquième point fondamental E des coordonnées quaternaires tel que la droite AE soit l'axe d'homologie du trièdre ABCD et du trièdre des plans tangents au cône suivant les droites AB, AC, AD; cela donne

$$a_{34} = a_{42} = a_{32}$$

et les coefficients des équations de la réciprocité sont les éléments du tableau

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda a_{32} & \lambda a_{32} \\ 0 & a_{32} & 0 & a_{32} \\ -1 & a_{32} & \lambda a_{32} & 0 \end{matrix}$$

Lorsque le point X coïncide avec le point D(0, 0, 0, 1), le plan ξ' devient le plan de coordonnées

$$1 \quad \lambda a_{32} \quad a_{32} \quad 0;$$

ce plan passera par le point E, ce qui achèvera de déterminer ce point, si on fait

$$1 + (\lambda + 1)a_{32} = 0.$$

En posant

$$\lambda a_{32} = -a,$$

on a

$$a_{32} = a - 1,\qquad a \neq 1\qquad a \neq 0,$$

et en multipliant par -1 les coefficients des équations de la réciprocité, ces équations deviennent

(F) $\xi'_1 = -X_4,\quad \xi'_2 = a(X_3 + X_4),\quad \xi'_3 = (1-a)(X_2 + X_4),\quad \xi'_4 = X_1 + (1-a)X_2 + aX_4,$

ou

(F') $\quad \xi_1 = X'_4 \quad \xi_2 = (1-a)(X'_3+X'_4), \ \xi_3 = a(X'_2+X'_4), \ \xi_4 = -X'_1 + aX'_2 + (1-a)X'_3,$

ou

$(F_1) \quad X'_1 = -\xi_1+\xi_2+\xi_3-\xi_4, \quad X'_2 = -\xi_1 + \frac{1}{a}\xi_2, \quad X'_3 = -\xi_1 + \frac{1}{1-a}\xi_2, \quad X'_4 = \xi_1,$

ou

$(F'_1) \quad X_1 = -\xi'_1-\xi'_2-\xi'_3+\xi'_4, \quad X_2 = \xi'_1 + \frac{1}{1-a}\xi'_3, \quad X_3 = \xi'_1 + \frac{1}{a}\xi'_2, \quad X_4 = -\xi'_1$

L'équation (γ) se réduit à

$$a(1-a)\,\xi_1^2 - \xi_2\xi_3 = 0$$

et représente une conique γ tangente aux droites AB, AC aux points B, C.
Quand l'un des points X, X' glisse sur une génératrice rectiligne du cône Γ, le plan homologue ξ' ou ξ tourne autour d'une tangente à la conique γ.
Lorsque les points X, X' se confondent en un seul point $(0, X_2, X_3, 0)$ de la droite BC, les équations des plans homologues ξ', ξ, en coordonnées courantes Y_i, sont

$$aX_3(Y_2+Y_4)+(1-a)X_2(Y_3+Y_4)=0 \qquad (1-a)X_3(Y_2+Y_4)+aX_2(Y_3+Y_4)=0\,;$$

ces plans passent par la polaire p du plan ϖ ou ABC pour le cône Γ; ils sont confondus quelle que soit la valeur de a, si le point $X \equiv X'$ coïncide avec le point B ou avec le point C; mais lorsque le point $X \equiv X'$ est différent des points B, C, ils ne sont confondus que si

$$a:(1-a) = (1-a):a \quad \text{ou} \quad a = \frac{1}{2}.$$

Pour cette valeur de a, les équations de la réciprocité sont

(G) $\quad \xi'_1 = -X_4, \quad \xi'_2 = \frac{1}{2}(X_3+X_4), \ \xi'_3 = \frac{1}{2}(X_2+X_4), \quad \xi'_4 = X_1 + \frac{1}{2}(X_2+X_3),$

ou

(G') $\quad \xi_1 = X'_4, \quad \xi_2 = \frac{1}{2}(X'_3+X'_4), \ \xi_3 = \frac{1}{2}(X'_2+X'_4), \quad \xi_4 = -X'_1 + \frac{1}{2}(X'_2+X'_3),$

ou

$(G_1) \quad X'_1 = -\xi_1+\xi_2+\xi_3-\xi_4, \quad X'_2 = -\xi_1 + 2\xi_3, \quad X'_3 = -\xi_1 + 2\xi_2, \quad X'_4 = \xi_1$

ou

$(G'_1) \quad X_1 = -\xi'_1-\xi'_2-\xi'_3+\xi'_4 \quad X_2 = \xi'_1 + 2\xi'_3, \quad X_3 = \xi'_1 + 2\xi'_2, \quad X_4 = -\xi'_1.$

Remarque. Les carrés des réciprocités (F), (G) sont les collinéations dont les équations sont

(f) $\quad X'_1 = -X_1 + 2X_4, \quad X'_2 = \frac{1-a}{a}X_2 + \frac{1}{a}X_4, \quad X'_3 = \frac{a}{1-a}X_3 + \frac{1}{1-a}X_4, \quad X'_4 = -X_4,$

ou

(f') $\quad \xi'_1 = -\xi_1, \quad \xi'_2 = \frac{a}{1-a}\xi_2, \quad \xi'_3 = \frac{1-a}{a}\xi_3, \quad \xi'_4 = -2\xi_1 + \frac{1}{1-a}\xi_2 + \frac{1}{a}\xi_3 - \xi_4,$

et

(g) $\quad X'_1 = -X_1 + 2X_4, \quad X'_2 = X_2 + 2X_4, \quad X'_3 = X_3 + 2X_4, \quad X'_4 = -X_4,$

ou

(g') $\quad \xi'_1 = -\xi_1, \quad \xi'_2 = \xi_2, \quad \xi'_3 = \xi_3, \quad \xi'_4 = -2\xi_1 + 2\xi_2 + 2\xi_3 - \xi_4.$

Les équations en k de ces collinéations admettent les racines

$$k_1 = k_2 = -1,\ k_3 = \frac{a}{1-a},\ k_4 = \frac{1-a}{a} \quad \text{et} \quad k_1 = k_2 = -1,\ k_3 = k_4 = 1.$$

Dans le premier cas, a est différent de $\frac{1}{2}$, les points doubles sont les points A, B, C les plans doubles sont le plan ϖ et les plans tangents au cône Γ le long des droites AB, AC.
Dans le second cas, a est égal à $\frac{1}{2}$, les points doubles sont le point A et les points de la droite BC, les plans doubles sont le plan ϖ et les plans passant par la droite p.

45. Cinquième cas : L'équation (6) représente une quadrique proprement dite Q.–

1° Dans ce cas, l'équation (7) représente également une quadrique proprement dite Q', qui est la forme corrélative de la quadrique Q dans la réciprocité donnée.

2° Théorème. Lorsque l'équation (6) représente une quadrique proprement dite Q, pour que les plans correspondant à un même point de cette quadrique dans les deux espaces soient confondus, il faut et il suffit que l'un deux soit tangent à la quadrique au point considéré.

On prend le tétraèdre fondamental ABCD des coordonnées quaternaires pour que le point A soit le point dont il s'agit et pour que les droites AB, AC, DB, DC soient des génératrices rectilignes de la quadrique Q. L'équation de celle-ci se réduit à

$$(a_{14}+a_{41})X_1X_4+(a_{23}+a_{32})X_2X_3=0;$$

on a

$$a_{14}+a_{41}\neq 0, \qquad a_{23}+a_{32}\neq 0,$$

et les équations de la réciprocité deviennent donc

$$\xi'_1=a_{12}X_2+a_{13}X_3+a_{14}X_4,\quad \xi'_2=-a_{12}X_1+a_{23}X_3+a_{24}X_4,\quad \xi'_3=-a_{13}X_1+a_{32}X_2+a_{34}X_4,\quad \xi'_4=a_{41}X_1-a_{24}X_2-a_{34}X_3$$

ou

$$\xi_1=-a_{12}X'_2-a_{13}X'_3+a_{41}X'_4,\quad \xi_2=a_{12}X'_1+a_{32}X'_3-a_{24}X'_4,\quad \xi_3=a_{13}X'_1+a_{23}X'_2-a_{34}X'_4,\quad \xi_4=a_{14}X'_1+a_{24}X'_2+a_{34}X'_3$$

Les coordonnées des plans correspondant au point A (1, 0, 0, 0) dans les deux espaces sont

$$0,\ -a_{12},\ -a_{13},\ a_{41} \quad \text{et} \quad 0,\ a_{12},\ a_{13},\ a_{14}$$

Comme on ne peut avoir en même temps

$$a_{41}=0 \qquad \text{et} \qquad a_{14}=0,$$

ces deux plans ne peuvent coïncider que si on a

$$a_{12}=a_{13}=0, \qquad a_{41}\neq 0 \qquad a_{14}\neq 0,$$

et alors leurs coordonnées sont celles 0, 0, 0, 1 du plan ABC tangent à la quadrique Q au point A, ce qui démontre le théorème.

3° Théorème. Quant les conditions du théorème précédent sont remplies, la quadrique Q' est tangente à la quadrique Q au point A et les génératrices rectilignes passant par ce point sont les mêmes pour les deux quadriques.

En effet, quand les conditions du théorème précédent sont remplies, les équations de la réciprocité sont

$$\xi'_1=a_{14}X_4,\quad \xi'_2=a_{23}X_3+a_{24}X_4,\quad \xi'_3=a_{32}X_2+a_{34}X_4,\quad \xi'_4=a_{41}X_1-a_{24}X_2-a_{34}X_3$$

et on a

$$a_{14}+a_{41}\neq 0 \qquad a_{23}+a_{32}\neq 0, \qquad a_{14}a_{41}a_{23}a_{32}\neq 0.$$

on en tire

$$X_1=-\frac{a_{24}a_{34}}{a_{14}a_{41}}\left(\frac{1}{a_{23}}+\frac{1}{a_{32}}\right)\xi'_1+\frac{a_{34}}{a_{23}a_{31}}\xi'_2+\frac{a_{24}}{a_{32}a_{41}}\xi'_3+\frac{1}{a_{41}}\xi'_4,$$

$$X_2=-\frac{a_{34}}{a_{14}a_{32}}\xi'_1+\frac{1}{a_{32}}\xi'_3, \qquad X_3=-\frac{a_{24}}{a_{14}a_{23}}\xi'_1+\frac{1}{a_{23}}\xi'_2, \quad X_4=\frac{1}{a_{14}}\xi'_1.$$

L'équation de la quadrique Q' est de la forme

$$A_{11}\xi_1^2+2A_{12}\xi_1\xi_2+2A_{13}\xi_1\xi_3+2A_{14}\xi_1\xi_4+2A_{23}\xi_2\xi_3=0,$$

dans laquelle

$$2A_{14}=\frac{1}{a_{14}}+\frac{1}{a_{41}}\neq 0 \qquad \text{et} \qquad 2A_{23}=\frac{1}{a_{23}}+\frac{1}{a_{32}}\neq 0.$$

Cette équation est vérifiée par les coordonnées

$$0,\ 0,\ \xi_3,\ \xi_4 \qquad \text{et} \qquad 0,\ \xi_2,\ 0,\ \xi_4$$

des plans passant par l'une ou l'autre des droites AB, AC. Ces droites sont donc des génératrices rectilignes de la quadrique Q' et le plan ABC est tangent au point A à cette quadrique comme à la quadrique Q.

4°. Théorème. *Parmi les points communs aux quadriques Q, Q', il y en a au moins un auquel les théorèmes précédents sont applicables.*

Soient P un point commun aux quadriques Q, Q'; d', g' les génératrices rectilignes passant par le point P sur la quadrique Q'; ϖ' le plan de l'espace E' correspondant au point P de l'espace E dans la réciprocité donnée. Le point P' étant sur la quadrique Q, le plan ϖ' passe par ce point et est tangent à la quadrique Q'. Mais les plans qui passent par le point P et sont tangents à la quadrique Q' doivent contenir l'une ou l'autre des droites d', g'; on peut donc supposer que le plan ϖ' passe par la droite d'. — Un plan quelconque ω' mené par la droite d' est tangent à la quadrique Q' en un point O_1 de cette droite. En considérant le plan ω' comme appartenant à l'espace E', il doit passer par le point O auquel il correspond dans l'espace E et ce point doit être situé sur la génératrice rectiligne d de la quadrique Q qui correspond dans l'espace E à la droite d' de l'espace E'. Le plan ϖ' étant une position du plan ω', le point P est une position du point O, la droite d passe par le point P et elle coïncide donc avec la droite d', autrement le point O serait confondu avec le point P pour toutes les positions du plan ω' mené par la droite d', ce qui est contraire aux propriétés de la réciprocité. Mais lorsque le plan ω' tourne autour de la droite d' ≡ d, la feuillée qu'il engendre est projective aux ponctuelles décrites par les points O, O_1 sur la même droite; ces deux ponctuelles sont donc projectives; elles ont au moins un point double et ainsi, sur la génératrice rectiligne d' ≡ d commune aux quadriques Q, Q', il y a au moins un point tel qu'en le considérant comme un point de l'espace E, il correspond dans l'espace E' au plan tangent de la quadrique Q' dont il est le point de contact; on peut supposer que ce point est le point P et qu'ainsi le plan ϖ' est tangent à la quadrique Q' au point P. — Mais si le plan ϖ' est tangent à la quadrique Q au point P, il se confond avec le plan d'g'; il passe donc par la droite g' et, en raisonnant sur cette droite comme sur la droite d', on trouvera que la droite g' coïncide avec la seconde génératrice rectiligne g menée par le point P sur la quadrique Q. Le plan ϖ' contenant les génératrices rectilignes d, g de la quadrique Q est tangent à cette quadrique au point P et ce point répond à la question.

5° Conclusion. La recherche des réciprocités dans lesquelles l'équation (6) représente une quadrique proprement dite se ramène à la discussion des équations écrites dans la démonstration des théorèmes 2° et 3°. Pour établir ces équations on a pris le tétraèdre fondamental des coordonnées quaternaires de telle manière que, les arêtes AB, AC étant des génératrices rectilignes communes aux deux quadriques Q, Q', le plan ABC correspond au point A dans les deux espaces et qu'en outre les arêtes DB, DC sont des génératrices rectilignes de la quadrique Q. — Lorsque le point X ≡ X' décrit la droite AB, les plans ξ', ξ tournent autour de cette droite et engendrent des feuillées projectives dont chaque feuillet double est tangent aux deux quadriques au point correspondant X ≡ X'; le nombre de ces feuillets doubles est ∞, 2 ou 1. Le même raisonnement est applicable à la droite AC; il y a donc six hypothèses à envisager, selon que les nombres des feuillets doubles dans les deux feuillées sont

$$\infty \text{ et } \infty, \quad \infty \text{ et } 2, \quad \infty \text{ et } 1, \quad 2 \text{ et } 2, \quad 2 \text{ et } 1, \quad 1 \text{ et } 1$$

or les équations de la réciprocité sont (voir 3°)

$$\xi'_1 = a_{14}X_4, \quad \xi'_2 = a_{23}X_3 + a_{24}X_4, \quad \xi'_3 = a_{32}X_2 + a_{34}X_4, \quad \xi'_4 = a_{41}X_1 - a_{24}X_2 - a_{34}X_3,$$

l'équation de la quadrique Q est

$$(a_{14} + a_{41})X_1X_4 + (a_{23} + a_{32})X_2X_3 = 0$$

et on doit supposer

$$a_{14} + a_{41} \neq 0, \qquad a_{23} + a_{32} \neq 0, \qquad a_{14}\, a_{41}\, a_{23}\, a_{32} \neq 0.$$

Les coordonnées des plans ξ', ξ qui correspondent au point

$$X \equiv X'(X_1, X_2, 0, 0)$$

de la droite AB sont respectivement

$$0, 0, a_{32} X_2, a_{41} X_1 - a_{24} X_2 \qquad \text{et} \qquad 0, 0, a_{23} X_2, a_{14} X_1 + a_{24} X_2.$$

Les feuillets doubles des feuillées engendrées par ces deux plans correspondent aux positions du point $X \equiv X'$ pour lesquelles

$$X_2 \left\{ \begin{vmatrix} a_{32} & a_{41} \\ a_{23} & a_{14} \end{vmatrix} X_1 + a_{24}(a_{23} + a_{32}) X_2 \right\} = 0.$$

Cette équation du second degré se décompose en deux équations du premier degré dont la première

$$X_2 = 0$$

correspond au point A et au plan ABC. Le nombre des feuillets doubles est donc ∞, 2 ou 1, selon qu'on a

$$a_{14} : a_{41} = a_{23} : a_{32} \text{ et } a_{24} \neq 0, \qquad a_{14} : a_{41} \neq a_{23} : a_{32} \text{ et } a_{24} \text{ quelconque}, \; a_{14} : a_{41} = a_{23} : a_{32} \text{ et } a_{24} \neq 0.$$

Quand il y a deux feuillets doubles, on peut supposer que le second correspond au point B et cela donne

$$a_{24} = 0.$$

Les coordonnées des plans ξ', ξ qui correspondent au point

$$X \equiv X'(X_1, 0, X_3, 0)$$

de la droite AC sont respectivement

$$0, a_{23} X_3, 0, a_{41} X_1 - a_{34} X_3 \qquad \text{et} \qquad 0, a_{32} X_2, 0, a_{14} X_1 + a_{34} X_3.$$

Les feuillets doubles des feuillées engendrées par ces deux plans correspondent aux positions du point $X \equiv X'$ pour lesquelles on a

$$X_3 \left\{ \begin{vmatrix} a_{23} & a_{41} \\ a_{32} & a_{14} \end{vmatrix} X_1 + a_{34}(a_{14} + a_{41}) X_3 \right\} = 0.$$

La solution

$$X_3 = 0$$

fournie par le premier facteur du premier membre de cette équation correspond encore au point A et au plan ABC. Le nombre des feuillets doubles est ∞, 2 ou 1, selon qu'on a

$$a_{14} : a_{41} = a_{32} : a_{23} \text{ et } a_{34} = 0, \qquad a_{14} : a_{41} \neq a_{32} : a_{23} \text{ et } a_{34} \text{ quelconque}, \; a_{14} : a_{41} = a_{32} : a_{23} \text{ et } a_{34} \neq 0.$$

Lorsqu'il y a deux feuillets doubles, on peut supposer que le second correspond au point C, ce qui donne

$$a_{34} = 0.$$

Les six hypothèses à considérer sont donc

$a_{14} : a_{41} = a_{23} : a_{32}$	et	$a_{24} = 0$	avec	$a_{14} : a_{41} = a_{32} : a_{23}$	et	$a_{34} = 0$,
$a_{14} : a_{41} = a_{23} : a_{32}$	et	$a_{24} = 0$	avec	$a_{14} : a_{41} \neq a_{32} : a_{23}$	et	$a_{34} = 0$,
$a_{14} : a_{41} = a_{23} : a_{32}$	et	$a_{24} = 0$	avec	$a_{14} : a_{41} = a_{32} : a_{23}$	et	$a_{34} \neq 0$,
$a_{14} : a_{41} \neq a_{23} : a_{32}$	et	$a_{24} = 0$	avec	$a_{14} : a_{41} \neq a_{32} : a_{23}$	et	$a_{34} = 0$,
$a_{14} : a_{41} \neq a_{23} : a_{32}$	et	$a_{24} = 0$	avec	$a_{14} : a_{41} = a_{32} : a_{23}$	et	$a_{34} \neq 0$,
$a_{14} : a_{41} = a_{23} : a_{32}$	et	$a_{24} = 0$	avec	$a_{14} : a_{41} = a_{32} : a_{23}$	et	$a_{34} \neq 0$.

6. Première hypothèse, $a_{14} : a_{41} = a_{23} : a_{32}$ et $a_{24} = 0$ avec $a_{14} : a_{41} = a_{32} : a_{23}$ et $a_{34} = 0$. On ne peut avoir à la fois

$$a_{14} : a_{41} = a_{23} : a_{32} \qquad \text{et} \qquad a_{14} : a_{41} = a_{32} : a_{23}$$

que si

$$a_{14}^2 = a_{41}^2 \quad \text{ou} \quad a_{14} = \pm a_{41}.$$

Mais on sait que

$$a_{14} + a_{41} \neq 0 ;$$

on a donc

$$a_{14} = a_{41} \quad \text{d'où aussi} \quad a_{23} = a_{32}$$

D'autre part, l'équation de la quadrique Q devient

$$a_{14} X_1 X_4 + a_{23} X_2 X_3 = 0.$$

On peut prendre le cinquième point fondamental E des coordonnées quaternaires pour que cette quadrique passe par le point de coordonnées 1, 1, 1, -1, ce qui permet de faire

$$a_{14} = a_{23} = a_{41} = a_{32} = 1.$$

Les équations de la réciprocité se réduisent à

(H) $\quad \xi'_1 = X_4, \quad \xi'_2 = X_3, \quad \xi'_3 = X_2, \quad \xi'_4 = X_1,$

ou

(H') $\quad \xi_1 = X'_4, \quad \xi_2 = X'_3, \quad \xi_3 = X'_2, \quad \xi_4 = X'_1,$

ou

(H_1) $\quad X_1 = \xi'_4, \quad X_2 = \xi'_3, \quad X_3 = \xi'_2, \quad X_4 = \xi'_1,$

ou

(H'_1) $\quad X'_1 = \xi_4, \quad X'_2 = \xi_3, \quad X'_3 = \xi_2, \quad X'_4 = \xi_1.$

Les équations des quadriques Q, Q' deviennent

$$X_1 X_4 + X_2 X_3 = 0 \quad \text{et} \quad \xi_1 \xi_4 + \xi_2 \xi_3 = 0.$$

Les deux quadriques sont confondues ; les plans ξ', ξ qui correspondent à un même point $X \equiv X'$, coïncident avec le plan polaire du point pour la quadrique $Q \equiv Q'$; en particulier, les plans qui correspondent à un même point de cette quadrique se confondent avec le plan tangent au point considéré ; la réciprocité prend le nom de polarité, la polarité ayant la quadrique $Q \equiv Q'$ pour quadrique directrice.

Remarque. – Le carré de la réciprocité (H) est la transformation identique.

7° Seconde hypothèse ; $a_{14} : a_{41} = a_{23} : a_{32}$ et $a_{24} = 0$ avec $a_{14} : a_{41} \neq a_{32} : a_{23}$ et $a_{34} = 0$.

On peut poser

$$a_{14} : a_{41} = a_{23} : a_{32} = k \neq \pm 1 \quad \text{ou} \quad a_{14} = k a_{41},\ a_{23} = k a_{32} \quad \text{avec } k \neq \pm 1.$$

L'équation de la quadrique Q devient

$$a_{41} X_1 X_4 + a_{32} X_2 X_3 = 0$$

et en prenant le cinquième point fondamental E des coordonnées quaternaires pour que cette quadrique passe par le point de coordonnées 1, 1, 1, -1, on peut faire

$$a_{14} = k, \quad a_{23} = k, \quad a_{32} = 1, \quad a_{41} = 1, \quad k \neq \pm 1.$$

Les équations de la réciprocité se réduisent à

(I) $\quad \xi'_1 = k X_4, \quad \xi'_2 = k X_3, \quad \xi'_3 = X_2, \quad \xi'_4 = X_1,$

ou

(I') $\quad \xi_1 = X'_4, \quad \xi_2 = X'_3, \quad \xi_3 = k X'_2, \quad \xi_4 = k X'_1,$

ou

(I_1) $\quad X'_1 = \frac{1}{k} \xi_4, \quad X'_2 = \frac{1}{k} \xi_3, \quad X'_3 = \xi_2, \quad X'_4 = \xi_1.$

ou

(I'_1) $\quad X_1 = \xi'_4, \quad X_2 = \xi'_3, \quad X_3 = \frac{1}{k} \xi'_2, \quad X_4 = \frac{1}{k} \xi'_1.$

Les équations des quadriques Q, Q' deviennent

$$X_1X_4 + X_2X_3 = 0 \qquad \text{et} \qquad \xi_1\xi_4 + \xi_2\xi_3 = 0\,;$$

la quadrique Q' coïncide avec la quadrique Q, mais les seuls points dont les plans homologues se confondent sont ceux des droites AB, CD.

Remarque. Le carré de la réciprocité (I) est la collinéation

(i) $$X'_1 = \frac{1}{k}X_1, \qquad X'_2 = \frac{1}{k}X_2, \qquad X'_3 = kX_3, \qquad X'_4 = kX_4,$$

ou

(i') $$\xi'_1 = k\xi_1, \qquad \xi'_2 = k\xi_2, \qquad \xi'_3 = \frac{1}{k}\xi_3, \qquad \xi'_4 = \frac{1}{k}\xi_4.$$

Les points doubles de cette collinéation sont les points des droites AB, CD ; les plans doubles sont ceux qui passent par l'une ou l'autre de ces deux droites, les droites doubles sont les droites AB, CD elles-mêmes et celles qui coupent ces deux droites.

8° **Troisième hypothèse**, $a_{14} : a_{41} = a_{23} : a_{32}$ et $a_{24} = 0$ avec $a_{14} : a_{41} = a_{32} : a_{23}$ et $a_{34} \neq 0$.
On peut faire

$$a_{14} = a_{41} = a_{23} = a_{32} = 1 \qquad \text{et} \qquad a_{34} = a \neq 0.$$

Les équations de la réciprocité deviennent

(J) $$\xi'_1 = X_4, \qquad \xi'_2 = X_3, \qquad \xi'_3 = X_2 + aX_4, \qquad \xi'_4 = X_1 - aX_3,$$

ou

(J') $$\xi_1 = X'_4, \qquad \xi_2 = X'_3, \qquad \xi_3 = X'_2 - aX'_4, \qquad \xi_4 = X'_1 + aX'_3,$$

ou

(J₁) $$X'_1 = -a\xi_2 + \xi_4, \qquad X'_2 = a\xi_1 + \xi_3, \qquad X'_3 = \xi_2, \qquad X'_4 = \xi_1,$$

ou

(J'₁) $$X_1 = a\xi'_2 + \xi'_4, \qquad X_2 = -a\xi'_1 + \xi'_3, \qquad X_3 = \xi'_2, \qquad X_4 = \xi'_1.$$

Les équations des quadriques Q, Q' sont

$$X_1X_4 + X_2X_3 = 0 \qquad \text{et} \qquad \xi_1\xi_4 + \xi_2\xi_3 = 0\,;$$

la quadrique Q' coïncide avec la quadrique Q, mais les points de la droite AB sont les seuls dont les plans homologues se confondent.

Remarque. Le carré de la réciprocité (J) est la collinéation

(j) $$X'_1 = X_1 - 2aX_3, \qquad X'_2 = X_2 + 2aX_4, \qquad X'_3 = X_3, \qquad X'_4 = X_4,$$

ou

(j') $$\xi'_1 = \xi_1, \qquad \xi'_2 = \xi_2, \qquad \xi'_3 = 2a\xi_1 + \xi_3, \qquad \xi'_4 = -2a\xi_2 + \xi_4.$$

9° **Quatrième hypothèse**, $a_{14} : a_{41} \neq a_{23} : a_{32}$ et $a_{24} = 0$ avec $a_{14} : a_{41} \neq a_{32} : a_{23}$ et $a_{34} = 0$.
Les équations de la réciprocité entre le point X et le plan ξ' sont

$$\xi'_1 = a_{14}X_4, \qquad \xi'_2 = a_{23}X_3, \qquad \xi'_3 = a_{32}X_2, \qquad \xi'_4 = a_{41}X_1,$$

ou

$$X_1 = \frac{1}{a_{41}}\xi'_4, \qquad X_2 = \frac{1}{a_{32}}\xi'_3, \qquad X_3 = \frac{1}{a_{23}}\xi'_2, \qquad X_4 = \frac{1}{a_{14}}\xi'_1.$$

Les équations des quadriques Q, Q' sont

$$(a_{14} + a_{41})X_1X_4 + (a_{23} + a_{32})X_2X_3 = 0 \qquad \text{et} \qquad a_{23}a_{32}(a_{14} + a_{41})\xi_1\xi_4 + a_{14}a_{41}(a_{23} + a_{32})\xi_2\xi_3 = 0.$$

Comme l'équation tangentielle de la quadrique Q est

$$(a_{23} + a_{32})\xi_1\xi_4 + (a_{14} + a_{41})\xi_2\xi_3 = 0,$$

les quadriques Q, Q' ne seraient confondues que si on avait

$$a_{14}a_{41}(a_{23}+a_{32})^2=a_{23}a_{32}(a_{14}+a_{41})^2 \quad \text{ou} \quad (a_{14}a_{23}-a_{41}a_{23})(a_{14}a_{32}-a_{41}a_{23})=0,$$

ce qui est contraire aux hypothèses. Les quadriques Q, Q' sont donc distinctes l'une de l'autre, mais elles ont en commun les quatre quatre génératrices rectilignes AB, AC, DB, DC. En prenant le cinquième point fondamental des coordonnées quaternaires pour que la quadrique Q passe par le point de coordonnées 1, 1, 1, − 1, on peut faire

$$a_{14}+a_{41}=a_{23}+a_{32}=1,$$

puis poser

$$a_{14}=a_1, \quad a_{23}=a_2, \quad a_{41}=1-a_1 \quad a_{32}=1-a_2$$

et il faut qu'on ait

$$a_1\neq a_2 \quad \text{et} \quad a_1\neq 1-a_2.$$

Les équations de la réciprocité deviennent

(K) $$\xi'_1=a_1X_4, \quad \xi'_2=a_2X_2, \quad \xi'_3=(1-a_2)X_2, \quad \xi'_4=(1-a_1)X_1,$$

ou

(K') $$\xi_1=(1-a_1)X'_4, \quad \xi_2=(1-a_2)X'_3, \quad \xi_3=a_2X'_2, \quad \xi_4=a_1X'_1,$$

ou

(K_1) $$X'_1=\frac{1}{a_1}\xi_4, \quad X'_2=\frac{1}{a_2}\xi_3, \quad X'_3=\frac{1}{1-a_2}\xi_2, \quad X'_4=\frac{1}{1-a_1}\xi_1,$$

ou

(K'_1) $$X_1=\frac{1}{1-a_1}\xi'_4 \quad X_2=\frac{1}{1-a_2}\xi'_3, \quad X_3=\frac{1}{a_2}\xi'_2, \quad X_4=\frac{1}{a_1}\xi'_1.$$

Les seuls points dont les plans correspondants peuvent être confondus sont ceux des droites AD et BC. Or les plans qui correspondent au point $X\equiv X'\,(X_1,0,0,X_4)$ de la droite AD ont pour coordonnées

$$a_1X_4,\ 0,\ 0\ (1-a_1)X_1 \quad \text{et} \quad (1-a_1)X_4,\ 0,\ 0,\ a_1X_1;$$

ces plans ne seront confondus, quels que soient X_1 et X_4, que si on a

$$a_1^2=(1-a_1)^2 \quad \text{ou} \quad a_1=\frac{1}{2}.$$

De même, les plans correspondant au point $X\equiv X'\,(0,X_2,X_3,0)$ de la droite BC ne seront confondus, quels que soient X_2 et X_3, que si on a

$$a_2^2=(1-a_2)^2 \quad \text{ou} \quad a_2=\frac{1}{2}.$$

Comme a_1 doit être différent de a_2, il n'y a que deux suppositions à envisager.

1) $a_1\neq\frac{1}{2}$ et $a_2\neq\frac{1}{2}$. Dans ce cas, les points A, B, C, D sont les seuls points dont les points homologues correspondants soient confondus. Les équations de la réciprocité sont les équations (K) dans lesquelles les coefficients

$$a_1, \quad a_2, \quad 1-a_1, \quad 1-a_2$$

sont inégaux deux à deux.

Remarque. Le carré de cette réciprocité est la collinéation d'équations

(k) $$X'_1=\frac{1-a_1}{a_1}X_1, \quad X'_2=\frac{1-a_2}{a_2}X_2, \quad X'_3=\frac{a_2}{1-a_2}X_3, \quad X'_4=\frac{a_1}{1-a_1}X_4,$$

ou

(k') $$\xi'_1=\frac{a_1}{1-a_1}\xi_1, \quad \xi'_2=\frac{a_2}{1-a_2}\xi_2, \quad \xi'_3=\frac{1-a_2}{a_2}\xi_3, \quad \xi'_4=\frac{1-a_1}{a_1}\xi_4.$$

Les racines de l'équation en k de cette collinéation sont

$$k_1=\frac{1-a_1}{a_1}, \quad k_2=\frac{1-a_2}{a_2}, \quad k_3=\frac{a_2}{1-a_2}, \quad k_4=\frac{a_1}{1-a_1};$$

elles sont inégales deux à deux; les points doubles, les plans doubles et les droites doubles sont les sommets, les faces et les arêtes du tétraèdre ABCD.

2) $a_1=\frac{1}{2}$ et $a_2\neq\frac{1}{2}$ (ou $a_1\neq\frac{1}{2}$ et $a_2=\frac{1}{2}$). Les équations de la réciprocité deviennent

(L) $\xi'_1 = \frac{1}{2}X_4, \quad \xi'_2 = a_2 X_3, \quad \xi'_3 = (1-a_2)X_2, \quad \xi'_4 = \frac{1}{2}X_1,$

ou

(L') $\xi_1 = \frac{1}{2}X'_4, \quad \xi_2 = (1-a)X'_3, \quad \xi_3 = a_2 X'_2, \quad \xi_4 = \frac{1}{2}X'_1$

ou

(L_1) $X'_1 = 2\xi_4, \quad X'_2 = \frac{1}{a_2}\xi_3, \quad X'_3 = \frac{1}{1-a_2}\xi_2, \quad X'_4 = 2\xi_1,$

ou

(L'_1) $X_1 = 2\xi'_4, \quad X_2 = \frac{1}{1-a_2}\xi'_3, \quad X_3 = \frac{1}{a_2}\xi'_2 \quad X_4 = 2\xi'_1.$

Les plans correspondant à un point $X\equiv X'$ pris arbitrairement sur la droite AD se confondent avec le plan passant par la droite BC et le conjugué harmonique du point $X\equiv X'$ par rapport aux points A et D. Les plans qui correspondent au point B ou au point C se confondent avec le plan BAD ou avec le plan CAD. Lorsque le point $X\equiv X'$ est différent des points B, C et qu'il est sur la droite BC, les plans qui lui correspondent sont des plans différents l'un de l'autre passant par la droite AD.

Remarque. Le carré de la réciprocité (L) est la collinéation d'équations

(l) $X'_1 = X_1, \quad X'_2 = \frac{1-a_2}{a_2}X_2, \quad X'_3 = \frac{a_2}{1-a_2}X_3, \quad X'_4 = X_4,$

ou

(l') $\xi'_1 = \xi_1 \quad \xi'_2 = \frac{a_2}{1-a_2}\xi_2, \quad \xi'_3 = \frac{1-a_2}{a_2}\xi_3, \quad \xi'_4 = \xi_4.$

L'équation en k de cette collinéation a deux racines simples et une racine double

$$k_1 = \frac{a_2}{1-a_2}, \qquad k_2 = \frac{1-a_2}{a_2}, \qquad k_3 = k_4 = 1;$$

les points doubles sont le point B, le point C et les points de la droite AD, les plans doubles sont le plan BAD, le plan CAD et les plans passant par la droite BC, les droites doubles sont la droite AD, la droite BC, les droites passant par le point B dans le plan BAD et les droites passant par le point C dans le plan CAD.

10° Cinquième hypothèse, $a_{14} : a_{41} \neq a_{23} : a_{32}$ et $a_{24} = 0$ avec $a_{14} : a_{41} = a_{32} : a_{23}$ et $a_{34} \neq 0$.

On peut poser

$$a_{14} : a_{41} = a_{32} : a_{23} = k \neq \pm 1 \quad \text{ou} \quad a_{14} = k\,a_{41}, \; a_{32} = k\,a_{23} \text{ avec } k \neq \pm 1.$$

L'équation de la quadrique l devient

$$a_{41}X_1X_4 + a_{23}X_2X_3 = 0$$

et en prenant le cinquième point fondamental E des coordonnées quaternaires pour que cette quadrique passe par le point de coordonnées $1, 1, 1, -1$, on peut faire

$$a_{14} = k, \quad a_{23} = 1, \quad a_{32} = k, \quad a_{41} = 1, \quad k \neq \pm 1.$$

Les équations de la réciprocité deviennent

(M) $\xi'_1 = kX_4, \quad \xi'_2 = X_3, \quad \xi'_3 = kX_2 + a_{34}X_4, \quad \xi'_4 = X_1 - a_{34}X_3,$

ou

(M') $\xi_1 = X'_4, \quad \xi_2 = kX'_3, \quad \xi_3 = X'_2 - a_{34}X'_4, \quad \xi_4 = kX'_1 + a_{34}X'_3$

ou

(M_1) $X'_1 = -\frac{a_{34}}{k^2}\xi_2 + \frac{1}{k}\xi_4, \quad X'_2 = a_{34}\xi_1 + \xi_3, \quad X'_3 = \frac{1}{k}\xi_2, \quad X'_4 = \xi_1,$

ou

(M'_1) $X_1 = a_{34}\xi'_2 + \xi'_4, \quad X_2 = -\frac{a_{34}}{k^2}\xi'_1 + \frac{1}{k}\xi'_2, \quad X_3 = \xi'_2, \quad X_4 = \frac{1}{k}\xi'_1.$

Les équations des quadriques l, l' deviennent

$$X_1X_4 + X_2X_3 = 0 \quad \text{et} \quad \xi_1\xi_4 + \xi_2\xi_3 + a_{34}\left(1 - \frac{1}{k}\right)\xi_1\xi_2 = 0.$$

L'équation ponctuelle de la quadrique Q' est

$$X_1X_4+X_2X_3-a_{34}\left(1-\frac{1}{k}\right)X_3X_4=0.$$

Les quadriques Q, Q' ont en commun les génératrices rectilignes AB, AC, BD; mais elles sont tangentes l'une à l'autre en chaque point de la génératrice rectiligne AB.

Remarque. Le carré de la réciprocité (M) est la collinéation d'équations

(m) $$X'_1=\frac{1}{k}X_1-\frac{a_{34}}{k^2}(k+1)X_3,\quad X'_2=kX_2+a_{34}(k+1)X_4,\quad X'_3=\frac{1}{k}X_3,\quad X'_4=kX_4,$$

ou

(m') $$\xi'_1=k\xi_1,\quad \xi'_2=\frac{1}{k}\xi_2,\quad \xi'_3=a_{34}(k+1)\xi_1+k\xi_3,\quad \xi'_4=-\frac{a_{34}}{k^2}(k+1)\xi_2+\frac{1}{k}\xi_4.$$

Les points doubles de cette collinéation sont les points A, B; les plans doubles sont les plans ABC, ABD; les droites doubles sont les droites CA, AB, BD.

11° Sixième hypothèse, $a_{14}:a_{41}=a_{23}:a_{32}$ et $a_{24}\neq 0$ avec $a_{14}:a_{41}=a_{32}:a_{23}$ et $a_{34}\neq 0$.

On peut faire

$$a_{14}=a_{41}=a_{23}=a_{32}=1.$$

Les équations de la réciprocité deviennent

(N) $$\xi'_1=X_4,\quad \xi'_2=X_3+a_{24}X_4,\quad \xi'_3=X_2+a_{34}X_4,\quad \xi'_4=X_1-a_{24}X_2-a_{34}X_3,$$

ou

(N') $$\xi_1=X'_4,\quad \xi_2=X'_3-a_{24}X'_4,\quad \xi_3=X'_2-a_{34}X'_4,\quad \xi_4=X'_1+a_{24}X'_2+a_{34}X'_3,$$

ou

(N₁) $$X'_1=-2a_{24}a_{34}\xi_1-a_{34}\xi_2-a_{24}\xi_3+\xi_4,\quad X'_2=a_{24}\xi_1+\xi_3,\quad X'_3=a_{24}\xi_1+\xi_2,\quad X'_4=\xi_1,$$

ou

(N'₁) $$X_1=-2a_{24}a_{34}\xi'_1+a_{34}\xi'_2+a_{24}\xi'_3+\xi'_4,\quad X_2=-a_{34}\xi'_1+\xi'_3,\ X_3=-a_{24}\xi'_1+\xi'_2,\ X_4=\xi'_1.$$

Lorsque les points X, X' sont confondus en un même point de la droite d d'équations

$$X_4=0,\qquad a_{24}X_2+a_{34}X_3=0,$$

les plans ξ', ξ qui leur correspondent sont confondus en un seul passant par la droite d' d'équations

$$X_4=0,\qquad a_{24}X_2-a_{34}X_3=0;$$

les droites d, d' passent par le point A dans le plan ABC et forment un groupe harmonique avec les droites AB, AC.

Les équations des quadriques Q, Q' sont

$$X_1X_4+X_2X_3=0\qquad \text{et}\qquad a_{24}a_{34}\xi_1^2-\xi_1\xi_4-\xi_2\xi_3=0.$$

L'équation ponctuelle de la quadrique Q' est

$$a_{24}a_{34}X_4^2+X_1X_4+X_2X_3=0.$$

Les quadriques Q, Q' ont en commun les génératrices rectilignes AB, AC, mais elles sont tangentes l'une à l'autre en chaque point de ces deux droites.

Remarque. Le carré de la réciprocité (N) est la collinéation d'équations

(n) $$X'_1=X_1-2a_{24}X_2-2a_{34}X_3-4a_{24}a_{34}X_4,\quad X'_2=X_2+2a_{34}X_4,\ X'_3=X_3+2a_{24}X_4,\quad X'_4=X_4,$$

ou

(n') $$\xi'_1=\xi_1,\quad \xi'_2=2a_{24}\xi_1+\xi_2,\quad \xi'_3=2a_{34}\xi_1+\xi_3,\quad \xi'_4=-4a_{24}a_{34}\xi_1-2a_{34}\xi_2-2a_{24}\xi_3+\xi_4.$$

Les points doubles de cette collinéation sont les points situés sur la droite d et les plans doubles sont les plans passant par la droite d'.

46. Conclusion. Lorsque deux formes fondamentales de troisième espèce réciproques sont superposées,

il y a quinze cas à considérer d'après la nature et les positions relatives des lieux représentés par les équations (6) et (7) du n°40. Ces quinze cas sont le cas du n°41 et les quatorze cas correspondant aux équations (A) à (N).

D. Réciprocité involutive.

47. **Définition.** Deux espaces réciproques superposés sont dits en involution quand les éléments homologues se correspondent doublement. On considère les deux espaces comme n'en faisant qu'un seul dit involutif ou en involution par réciprocité et les éléments homologues prennent le nom d'éléments conjugués.

48. **Recherche des réciprocités involutives.** Deux espaces superposés étant rapportés aux mêmes coordonnées quaternaires, on considère la réciprocité définie par les équations ($i=1,2,3,4$),

(1) $\xi'_i = a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + a_{i3}X_3 + a_{i4}X_4$ ou $DX_i = \alpha_{1i}\xi'_1 + \alpha_{2i}\xi'_2 + \alpha_{3i}\xi'_3 + \alpha_{4i}\xi'_4$ (2)

ou

(3) $\xi_i = a_{1i}X'_1 + a_{2i}X'_2 + a_{3i}X'_3 + a_{4i}X'_4$ ou $DX'_i = \alpha_{i1}\xi_1 + \alpha_{i2}\xi_2 + \alpha_{i3}\xi_3 + \alpha_{i4}\xi_4$ (4).

Dans ces équations, on a

(5) $$D = |a_{11}\ \ a_{22}\ \ a_{33}\ \ a_{44}| \neq 0$$

et α_{ij} est le mineur de a_{ij} dans D.

Le point X correspondra doublement au plan ξ, s'il existe un nombre k, différent de zéro, tel qu'on ait ($i=1,2,3,4$)

(6) $$(a_{i1} - k\,a_{1i})X_1 + (a_{i2} - k\,a_{2i})X_2 + (a_{i3} - k\,a_{3i})X_3 + (a_{i4} - k\,a_{4i})X_4 = 0.$$

Donc, pour qu'il y ait involution, il est nécessaire et suffisant que l'on puisse donner à k une valeur différente de zéro et telle que les quatre équations (6) soient vérifiées quelles que soient les valeurs de X_1, X_2, X_3, X_4, ou telle que tous les coefficients de ces quatre équations soient nuls.

Si on suppose a_{11} ou a_{22} ou a_{33} ou $a_{44} \neq 0$, les conditions

$$a_{11} - k a_{11} = 0, \qquad a_{22} - k a_{22} = 0, \qquad a_{33} - k a_{33} = 0, \qquad a_{44} - k a_{44} = 0$$

donnent pour k la seule valeur

$$k = 1;$$

en portant cette valeur dans les autres équations

$$a_{ij} - k\,a_{ij} = 0,$$

on trouve que

$$a_{ij} = a_{ji};$$

le déterminant D est symétrique et la réciprocité est une polarité.

Si les éléments principaux $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}$ du déterminant D sont nuls, il faut bien que les autres éléments ne soient pas tous nuls; si $a_{ij} \neq 0$, il résulte des conditions

$$a_{ij} - k\,a_{ji} = 0, \qquad a_{ji} - k\,a_{ij} = 0$$

qu'on doit avoir

$$a_{ji} \neq 0 \text{ et } k^2 = 1 \text{ ou } k = \pm 1.$$

Pour $k=1$, on a encore

$$a_{ij} = a_{ji}$$

et la réciprocité est une polarité.

Pour $k=-1$, on a

$$a_{ij} = -a_{ji},$$

le déterminant D est un déterminant symétrique gauche et la réciprocité est celle qu'on a rencontrée au n°41.

On voit ainsi qu'une réciprocité donnée entre deux espaces superposés ne peut être involutive que si le dé=

terminant est un déterminant symétrique ou un déterminant symétrique gauche. Dans le premier cas, l'espace involutif formé par la réunion des deux espaces réciproques prend le nom d'espace polaire et, dans le second cas on dit que l'espace involutif est un espace focal.

a. Espace polaire. _ 49. Lorsque la réciprocité involutive est une polarité, chaque point s'appelle le pôle du plan conjugué, chaque plan s'appelle le plan polaire du point conjugué, deux droites conjuguées s'appellent des droites polaires et on dit que la quadrique Q d'équation

$$\Sigma a_{ij} X_i X_j = 0$$

est la quadrique directrice de la polarité. Le centre, les plans diamétraux, les diamètres, les plans principaux et les axes de cette quadrique sont le centre, les plans diamétraux, les diamètres, les plans principaux et les axes de l'espace polaire. Celui-ci est dit sphérique lorsque la quadrique Q est une sphère. Les points de la quadrique Q sont les seuls qui soient dans leurs plans polaires.

50. 1° Théorème. *Une réciprocité établie entre deux espaces superposés est une polarité dès que les sommets d'un tétraèdre du support commun sont, dans l'un des deux espaces, les points homologues des faces opposées considérées comme appartenant à l'autre espace.*

Si le tétraèdre considéré est adopté comme tétraèdre fondamental des coordonnées quaternaires dans les deux espaces, les équations de la réciprocité doivent être vérifiées par

$$X_1=1, \quad X_2=0, \quad X_3=0, \quad X_4=0 \quad \text{avec} \quad \xi'_1=1, \quad \xi'_2=0, \quad \xi'_3=0, \quad \xi'_4=0,$$

$$X_1=0, \quad X_2=1, \quad X_3=0, \quad X_4=0 \quad \text{avec} \quad \xi'_1=0, \quad \xi'_2=1, \quad \xi'_3=0, \quad \xi'_4=0,$$

$$X_1=0, \quad X_2=0, \quad X_3=1, \quad X_4=0 \quad \text{avec} \quad \xi'_1=0 \quad \xi'_2=0, \quad \xi'_3=1, \quad \xi'_4=0,$$

$$X_1=0 \quad X_2=0, \quad X_3=0, \quad X_4=1 \quad \text{avec} \quad \xi'_1=0 \quad \xi'_2=0, \quad \xi'_3=0, \quad \xi'_4=1.$$

On doit donc faire $a_{ij}=0$ pour $i \neq j$, le déterminant D est symétrique et la réciprocité est une polarité.

2° Définition. Dans un espace polaire, un tétraèdre dont chaque sommet est le pôle de la face opposée prend le nom de tétraèdre polaire.

3° Théorème. *Une polarité ou un espace polaire sont déterminés dès qu'on donne un tétraèdre polaire, un point extérieur aux faces de ce tétraèdre et le plan polaire de ce point, ce plan ne passant par aucun des sommets du tétraèdre.*

Soient $ABCD \equiv \alpha\beta\gamma\delta$, P, ϖ un tétraèdre, un point et un plan d'un même espace ε. Si le point P n'appartient à aucun des plans $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et si le plan ϖ ne passe par aucun des points A, B, C, D l'espace ε est le support commun de deux espaces entre lesquels il existe une réciprocité déterminée par les cinq couples d'éléments homologues A et α, B et β, C et γ, D et δ, P et ϖ. Les points A, B, C, D et les plans $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ étant les sommets et les faces opposées d'un tétraèdre, il résulte du théorème précédent que cette réciprocité est une polarité.

4° 1) Théorème. *Les côtés et les faces d'un pentagone dont quatre sommets quelconques ne sont pas dans un même plan sont coupés par un plan quelconque en dix couples d'éléments conjugués d'un système involutif par réciprocité.*

Soient ABCDP un pentagone dont quatre sommets quelconques ne sont pas dans un même plan; ϖ un plan quelconque. Le tétraèdre ABCD peut être considéré comme un trièdre polaire d'un espace polaire complètement déterminé par la condition que le plan ϖ soit le plan polaire du point P. Le plan ϖ coupe la quadrique directrice de cet espace polaire suivant une conique par rapport à laquelle chaque point tel que (A, B, ϖ) est le pôle d'une droite telle que (PCD, ϖ), de même que chaque point tel que (PA, ϖ) est le pôle d'une droite telle que (BCD, ϖ), ce qui démontre le théorème.

2) Remarque. Chacune des dix droites suivant lesquelles le plan ϖ coupe les dix faces du pentagone gauche contient trois des dix points d'intersection du plan ϖ par les côtés du pentagone, et, par chacun des dix points d'intersection passent trois des dix droites d'intersection.

Deux trièdre tel que ABCD et PBCD coupent le plan ϖ suivant deux triangles homologiques ayant la droite (BCD, ϖ) pour axe d'homologie et le point (AP, ϖ) pour centre d'homologie. Ces triangles homologiques permettent de retrouver le pentagone gauche et l'espace polaire dès qu'on s'est donné les points A, P. Donc, deux triangles homologiques placés dans le même plan déterminent sur ce plan une polarité dans laquelle le centre d'homologie des triangles est le pôle de l'axe d'homologie.

N.B. Les autres propriétés de l'espace polaire sont étudiées dans la théorie des propriétés polaires des quadriques.

b. Espace focal. 51. 1°. Dans un espace focal ε, chaque point s'appelle le foyer du plan conjugué et chaque plan s'appelle le plan focal du point conjugué.

2° Dans ce cas, le déterminant des coefficients de la réciprocité involutive est un déterminant symétique gauche et ces équations s'écrivent

$$(1)\quad \begin{aligned} \xi_1 &= 0.X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + a_{14}X_4, \\ \xi_2 &= -a_{12}X_1 + 0.X_2 + a_{23}X_3 + a_{24}X_4, \\ \xi_3 &= -a_{13}X_1 - a_{23}X_2 + 0.X_3 + a_{34}X_4, \\ \xi_4 &= -a_{14}X_1 - a_{24}X_2 - a_{34}X_3 + 0.X_4, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} DX_1 &= 0.\xi_1 - \alpha_{12}\xi_2 - \alpha_{13}\xi_3 - \alpha_{14}\xi_4, \\ DX_2 &= -\alpha_{12}\xi_1 + 0.\xi_2 - \alpha_{23}\xi_3 - \alpha_{24}\xi_4, \\ DX_3 &= -\alpha_{13}\xi_1 + \alpha_{23}\xi_2 + 0.\xi_3 - \alpha_{34}\xi_4, \\ DX_4 &= -\alpha_{14}\xi_1 + \alpha_{24}\xi_2 + \alpha_{34}\xi_3 + 0.\xi_4. \end{aligned} \quad (2)$$

Dans ces équations, le déterminant $\Delta = |\alpha_{ij}|$ est le déterminant adjoint du déterminant $D = |a_{ij}|$ et il résulte des propriétés des déterminants symétriques gauches qu'on a, en écrivant a_{42} pour $-a_{24}$,

$$(3)\qquad D = (a_{12}a_{34} + a_{13}a_{42} + a_{14}a_{23})^2$$

et

$$(4)\qquad a_{12} : a_{13} : a_{14} : a_{34} : a_{42} : a_{23} = \alpha_{34} : \alpha_{42} : \alpha_{23} : \alpha_{12} : \alpha_{13} : \alpha_{14}.$$

3° La condition

$$(5)\qquad D \neq 0 \quad \text{ou} \quad a_{12}a_{34} + a_{13}a_{42} + a_{14}a_{23} \neq 0, \quad \alpha_{12}\alpha_{34} + \alpha_{13}\alpha_{42} + \alpha_{14}\alpha_{23} \neq 0$$

exprime que ni les nombres a_{ij} ni les nombres α_{ij} ne sont ni les coordonnées ponctuelles ni les coordonnées tangentielles d'une droite.

4° Des équations (1) et (2), il résulte qu'on identiquement.

$$(6)\qquad \xi_1X_1 + \xi_2X_2 + \xi_3X_3 + \xi_4X_4 = 0;$$

donc, dans un espace focal ε, chaque plan contient son foyer et chaque point est dans son plan focal. On retrouve ainsi la propriété déjà énoncée au n° 41.

5° Si ξ et η sont les plans focaux des points X, Y dans l'espace focal ε, il résulte des équations (1) et (2) qu'on a identiquement

$$(7)\qquad \xi_1Y_1 + \xi_2Y_2 + \xi_3Y_3 + \xi_4Y_4 = -(\eta_1X_1 + \eta_2X_2 + \eta_3X_3 + \eta_4X_4).$$

On voit par là, et c'est aussi une conséquence des propriétés générales de la réciprocité dans les formes de troisième espèce, que la condition necessaire et suffisante pour que le plan focal ξ du point X passe par le point Y est que le plan focal η du point Y passe par le point X.

6° Quand cette condition est remplie, les droites conjuguées XY, $\xi\eta$ coïncident et elles forment par leur réunion une droite double de l'espace focal ε. Tout point X appartient à une infinité de droites doubles qui sont les droites d'un faisceau dont le plan est le plan focal ξ du point X dans l'espace focal ε.

N.B. – Les droites doubles s'appellent aussi les directrices de l'espace focal.

7°. Si le point Y n'est pas dans le plan ξ, le point X n'est pas dans le plan η, les droites conjuguées XY, $\xi\eta$ sont distinctes, elles n'ont aucun point commun et elles ne sont pas dans un même plan.

8°. Lorsque le point X décrit la droite XY, le plan ξ tourne autour de la droite $\xi\eta$ et il résulte des propriétés générales de la réciprocité que la ponctuelle et la feuillée engendrées par le point X et le plan ξ sont

projectives. Mais, dans le cas actuel, le plan ξ passant constamment par le point X, si les droites conjuguées XY, $\xi\eta$ sont distinctes, la ponctuelle et la feuillée sont distinctes. De plus, si un plan ζ passe par les points XY, son foyer Z devant se trouver à la fois dans les plans ξ et η, la feuillée engendrée par le plan ζ en tournant autour de la droite XY est perspective à la ponctuelle décrite par le foyer Z de ce plan sur la droite $\xi\eta$.

9° De la propriété énoncée au 5°, on déduit : Les plans focaux des sommets d'un tétraèdre dans un espace focal ε sont les faces d'un second tétraèdre à la fois circonscrit et inscrit au premier (Tétraèdres de Möbius).

52. 1° Théorème. Les droites doubles d'un espace focal sont les droites d'un complexe linéaire, et réciproquement.

1) En effet, pour que la droite $XY \equiv \xi\eta$ soit une droite double de l'espace focal ε caractérisé par les équations (1) ou (2) du numéro précédent, il est nécessaire et suffisant qu'on ait identiquement

$$(8) \qquad \xi_1 Y_1 + \xi_2 Y_2 + \xi_3 Y_3 + \xi_4 Y_4 = 0$$

ou, à cause des équations (1),

$$(9) \qquad a_{12} X_{12} + a_{13} X_{13} + a_{14} X_{14} + a_{34} X_{34} + a_{42} X_{42} + a_{23} X_{23} = 0$$

ou, à cause des équations (2),

$$(10) \qquad \alpha_{12}\xi_{12} + \alpha_{13}\xi_{13} + \alpha_{14}\xi_{14} + \alpha_{34}\xi_{34} + \alpha_{42}\xi_{42} + \alpha_{23}\xi_{23} = 0$$

On déduit de là la première partie du théorème, puisque les nombres X_{ij} ou ξ_{ij} sont les coordonnées ponctuelles ou tangentielles de la droite $XY \equiv \xi\eta$. Les équations (9) et (10) représentent le même complexe linéaire à cause de la condition (4) et des relations

$$(11) \qquad X_{12} : X_{13} : X_{14} : X_{34} : X_{42} : X_{23} = \xi_{34} : \xi_{42} : \xi_{23} : \xi_{12} : \xi_{13} : \xi_{14}$$

existant entre les deux systèmes de coordonnées d'une droite ; et le complexe linéaire n'est pas un complexe linéaire spécial à cause de la condition (5).

2) La seconde partie du théorème résulte de ce que les coeffnts a_{ij} des équations (1) sont déterminés dès qu'on se donne l'équation (9) d'un complexe linéaire.

2° Définition. Un espace focal et le complexe linéaire de ses droites doubles sont dits associés l'un à l'autre ; des droites conjuguées dans l'espace focal sont dites conjuguées par rapport au complexe linéaire ; le plan focal d'un point et le foyer d'un plan dans l'espace focal sont le plan focal du point et le foyer du plan pour le complexe linéaire. L'équation (9) est en coordonnées courantes Y_i l'équation du plan focal ξ du point X ; l'équation (10) est en coordonnées courantes η_i l'équation du foyer X du plan ξ.

Les propriétés du complexe linéaire déjà signalées dans la première partie du cours vont se retrouver dans ce qui suit comme des conséquences des propriétés de la réciprocité appliquées au cas particulier d'un espace focal.

3° Théorème. Quand deux droites sont conjuguées par rapport à un complexe linéaire, toute droite qui les coupe est une droite du complexe linéaire ; ou bien, toute droite qui coupe deux droites conjuguées distinctes d'un espace focal est une droite double de cet espace focal.

Soient a, a' deux droites conjuguées par rapport au complexe linéaire Γ ou deux droites conjuguées distinctes d'un espace focal ε ; x une droite qui coupe les droites a, a' aux points X, X'. Le point X étant sur la droite a et celle-ci étant conjuguée à la droite a', le plan focal ξ du point X est le plan Xa'. Le plan ξ contient donc le point X' et la droite XX' ou x passant par le point X dans le plan ξ est une droite double de l'espace focal ε ou une droite du complexe linéaire Γ.

4° **Théorème.** *Toute droite d'un complexe linéaire ou toute droite double d'un espace focal qui coupe une droite quelconque, coupe aussi la droite conjuguée de cette droite pour le complexe linéaire et pour l'espace focal.*
En effet, si la droite x du complexe linéaire Γ (3°) coupe la droite a au point X, elle est située dans le plan focal ξ de ce point; mais le plan ξ passe par la droite a'; la droite x coupe donc cette droite.
5° **Théorème.** *Si toutes les droites qui coupent deux droites gauches sont des droites d'un complexe linéaire Γ ou des droites doubles d'un espace focal ε, les deux droites gauches sont deux droites conjuguées par rapport au complexe linéaire Γ et dans l'espace focal ε.*
Soient a, a' les droites gauches considérées; X un point quelconque de la droite a; ξ le plan Xa'. Toutes les droites menées par le point X dans le plan ξ coupent les droites a, a'; elles sont donc des droites du complexe linéaire Γ et le point X est le foyer du plan ξ. La droite a est donc le lieu des foyers des plans passant par la droite a' il en résulte qu'elle est conjuguée à la droite a' dans le complexe linéaire Γ et dans l'espace focal ε.
6° **Théorème.** *Si tous les rayons d'un faisceau ne sont pas des droites du complexe linéaire Γ ou des droites doubles de l'espace focal ε, un seul de ses rayons est une telle droite. Les droites conjuguées des rayons du faisceau par rapport au complexe linéaire Γ ou dans l'espace focal ε sont les rayons d'un second faisceau projectif au premier, les deux faisceaux ont des supports différents, ils ne sont pas dans un même plan et ils ont un rayon double qui est une droite du complexe linéaire Γ ou une droite double de l'espace focal ε.*
Soient $a, b, c, \ldots\ldots$ les rayons d'un faisceau ayant pour support le point P dans le plan ϖ'. Les droites n'étant pas toutes des droites du complexe linéaire Γ, le point P n'est pas le foyer du plan ϖ'. Le seul rayon du faisceau P qui soit une droite du complexe linéaire Γ est l'intersection p du plan ϖ' par le plan focal ϖ du point P. Le foyer P' du plan ϖ' est sur la droite p et les droites conjuguées $a', b', c', \ldots\ldots$ des droites $a, b, c \ldots\ldots$ par rapport au complexe linéaire Γ sont les rayons du faisceau ayant le point P' pour support dans le plan ϖ. Les deux faisceaux $P(a, b, c, \ldots\ldots)$, $P'(a', b', c', \ldots\ldots)$ sont projectifs parce qu'ils correspondent l'un à l'autre dans les deux espaces projectifs superposés formant l'espace focal ε. Le rayon commun p est un rayon double parce qu'il est conjugué à lui-même dans cet espace focal. Les deux faisceaux remplissent donc toutes les conditions du théorème.
7° **Théorème de Sylvester.** *Etant donnés deux faisceaux projectifs de supports différents, non situés dans le même plan et ayant un rayon double, les droites qui coupent les rayons homologues différents du rayon double sont avec celui-ci des droites d'un complexe linéaire ou des droites doubles d'un espace focal.*
Soient ϖ' et ϖ, P et P' les plans et les supports des deux faisceaux projectifs donnés; p ou PP' ou $\varpi\varpi'$ le rayon double de ces faisceaux; a et a', b et b', x et x' des rayons homologues quelconques; y une droite qui coupe les droites x et x'. Ayant rapporté la figure à des coordonnées quaternaires arbitraires, on adopte dans les faisceaux des coordonnées binaires dont les éléments fondamentaux sont les droites p, a, b et p, a', b'. Si X'_1 et X'_2 sont les coordonnées binaires communes aux droites x, x', les coordonnées de ces droites sont

(12) $$X_{ij} = X'_1 P_{ij} + X'_2 A_{ij} \quad \text{et} \quad X'_{ij} = X'_1 P_{ij} + X'_2 A'_{ij}.$$

La droite y coupant les droites x, x' on a

(13) $$X'_1 (P_{12} Y_{34} + \ldots\ldots) + X'_2 (A_{12} Y_{34} + \ldots\ldots) = 0$$
et
(14) $$X'_1 (P_{12} Y_{34} + \ldots\ldots) + X'_2 (A'_{12} Y_{34} + \ldots\ldots) = 0.$$
Il en résulte qu'on a aussi
(15) $$(A_{12} - A'_{12}) Y_{34} + \ldots\ldots\ldots\ldots = 0.$$

Mais les droites a, a' n'étant pas dans un même plan, on a

(16) $$A_{12}A_{34} + \cdots\cdots = 0, \quad A'_{12}A'_{34} + \cdots\cdots = 0, \quad A_{12}A'_{34} + \cdots\cdots \neq 0$$

on a donc

(17) $$(A_{12} - A'_{12})(A_{34} - A'_{34}) + \cdots\cdots \neq 0$$

et l'équation (15) est l'équation du complexe linéaire non spécial répondant à la question.
La droite p appartient à ce complexe linéaire, car cette droite coupant les droites a, a', on a

(18) $$A_{12}P_{34} + \cdots\cdots = 0, \quad A'_{12}P_{34} + \cdots\cdots = 0 \text{ d'où } (A_{12} - A'_{12})P_{34} + \cdots\cdots = 0.$$

N.B. – Deux rayons homologues quelconques des faisceaux donnés sont des droites conjuguées par rapport au complexe linéaire (8°). Ces deux faisceaux sont donc pareils à ceux du 6°.

8° Théorème. *Quand trois droites d'un complexe linéaire Γ ou trois droites doubles d'un espace focal Ε sont gauches deux par deux, il n'est pas possible que trois génératrices du système réglé dont elles sont des directrices soient des droites du complexe linéaire Γ ou des droites doubles de l'espace focal Ε.*

Soient a, b, c les trois droites considérées; x, y, z trois génératrices rectilignes du système réglé Σ dont elles sont des directrices; A, B et C, A', B' et C', A'', B'' et C'' les points où les droites x, y, z coupent respectivement les droites a, b, c. Si les droites x, y, z étaient comme les droites a, b, c des droites du complexe linéaire Γ, les plans ax, by seraient les plans focaux des points A, B' et les droites AB', A'B seraient des droites conjuguées. Il en serait de même des droites B'C'' et B''C', AC'' et A''C. Les droites AB', B'C'', C''A' étant dans un même plan, les droites A'B, B''C', A''C seraient aussi dans ce même plan ainsi que les droites A'A'' ou a, BB'' ou b, CC' ou c, ce qui est contraire à l'hypothèse, ces trois dernières droites étant gauches deux à deux.

9° Corollaire. *Trois droites d'un complexe linéaire Γ ou trois droites doubles d'un espace focal Ε qui sont gauches deux à deux, déterminent deux systèmes réglés complémentaires Σ, Σ' dont elles sont respectivement des directrices et des génératrices rectilignes; les génératrices rectilignes du système réglé Σ sont conjuguées deux par deux par rapport au complexe linéaire Σ ou dans l'espace focal Ε; ces couples de génératrices rectilignes du système réglé Σ sont en involution et les éléments doubles sont des droites du complexe linéaire Γ ou des droites doubles de l'espace focal Ε; un plan quelconque coupe le système réglé Σ suivant une ponctuelle involutive du second degré dont le pôle est le foyer de ce plan par rapport au complexe linéaire ou à l'espace focal.*

10° Remarque. Le système réglé Σ et avec lui le système réglé Σ' sont aussi déterminés par deux couples de droites conjuguées gauches deux à deux.

11° Théorème. *Quand un système réglé Σ n'est pas formé de droites du complexe linéaire Γ ou de droites doubles de l'espace focal Ε, deux de ses génératrices rectilignes sont des droites du complexe linéaire Γ ou des directrices de l'espace focal Ε.*

Lorsque toutes les directrices du système réglé Σ sont des droites du complexe linéaire Γ, le théorème est une conséquence de la propriété énoncée au 9°. Si l'une d des directrices n'appartient pas au complexe linéaire Γ, la droite conjuguée d' n'est pas une directrice du système réglé Σ, sans quoi toutes les génératrices rectilignes de ce système réglé seraient des droites du complexe linéaire Γ. Les droites répondant à la question sont les génératrices rectilignes du système réglé Σ qui passent par les points distincts ou confondus où la droite d' coupe la quadrique support du système réglé.

53. 1° Théorème. *Un complexe linéaire Γ et l'espace focal Ε qui lui est associé se transforment en eux-même par toute involution gauche dont les directrices sont deux droites gauches du complexe linéaire ou deux droites doubles gauches de l'espace focal.*

Soient x et y les deux droites gauches du complexe linéaire Γ; z une autre droite quelconque de ce complexe linéaire; z_1 la droite conjuguée de la droite z dans l'involution gauche ayant les droites x, y pour directrices. Il faut démontrer que la droite z_1 appartient au complexe linéaire Γ. Différents cas sont à distinguer.

1) Si la droite z coupe les droites x, y, la propriété résulte de ce qu'elle coïncide avec la droite z_1.

2) Si la droite z ne coupe que l'une des droites x ou y, par exemple la droite x au point X, et si Y est le point où le plan xz coupe la droite y, la droite conjuguée z_1 de la droite z dans l'involution gauche passe par le point X, elle est dans le plan xz et les quatre droites XY, x, z, z_1 forment un groupe harmonique. Mais le point X est le foyer du plan xz dans le complexe linéaire Γ; la droite z_1 est donc une droite de ce complexe linéaire.

3) Si la droite z ne coupe ni la droite x ni la droite y, la droite z_1 est une génératrice rectiligne d'un système réglé dont les droites x, y, z sont trois génératrices rectilignes. Les dernières droites appartenant au complexe linéaire Γ, il en est de même de la droite z_1 (52, 9°).

2° Théorème. *Un complexe linéaire Γ et l'espace focal associé ε se transforment en eux-mêmes dans toute involution gauche dont les directrices sont conjuguées dans le complexe linéaire et dans l'espace focal.*

Soient a, a' deux droites conjuguées dans le complexe linéaire Γ; x une droite quelconque du complexe linéaire; x_1 la droite conjuguée de la droite x dans l'involution gauche ayant les droites a, a' pour directrices. Il faut démontrer que la droite x_1 appartient au complexe linéaire Γ. La droite x ne pouvant s'appuyer sur une des droites a, a' sans s'appuyer aussi sur l'autre, deux cas sont à distinguer.

1) Si la droite x coupe les droites a, a', la droite x_1 coïncide avec elle.

2) Si la droite x ne coupe pas les droites a, a', les droites a, a', x, x_1 forment un groupe harmonique de quatre génératrices d'un système réglé dont le système réglé complémentaire n'a pour génératrices rectilignes que des droites du complexe linéaire Γ. Dès lors, il résulte de la propriété du 9° du n° 52 que la droite x_1 est, comme la droite x, une droite du complexe linéaire Γ.

3° Théorème. *Un complexe linéaire Γ et l'espace focal associé ε se transforment en eux-mêmes par toute polarité ayant pour quadrique directrice une quadrique Q dont toutes les génératrices rectilignes d'un même mode sont des droites du complexe linéaire.*

Soient x une droite quelconque du complexe linéaire Γ et x_1 la droite polaire de la droite x pour la quadrique Q.

1) Si la droite x est une génératrice rectiligne de la quadrique Q, la droite x_1 coïncide avec elle et le théorème est démontré.

2) Si la droite x est tangente à la quadrique Q au point A, il en est de même de la droite x_1 et les deux droites forment un groupe harmonique avec les génératrices rectilignes d, g passant par le point A sur la quadrique Q dans le plan tangent correspondant α. La droite x et l'une des droites d, g appartenant au complexe linéaire Γ, le point A est le pôle du plan α pour le complexe linéaire Γ et la droite x_1 est une droite du complexe linéaire.

3) Lorsque la droite x coupe la quadrique Q en des points distincts A, A' le théorème devient une conséquence de la propriété énoncée au 9° du n° 52. En effet il résulte de cette propriété que le second mode de génératrices rectilignes de la quadrique Q est formé de droites conjuguées deux par deux par rapport au complexe linéaire Γ. La droite x étant une droite de ce complexe linéaire, les génératrices rectilignes a, a' de ce second mode qui passent par les points A, A' sont deux pareilles droites conjuguées. Mais la droite x_1 est l'intersection des plans tangents α, α' à la quadrique Q aux points A, A'; ces plans contenant les droites a, a', la droite x_1 coupe ces deux droites et appartient donc au complexe linéaire Γ.

54. 1° **Théorème.** *Les cinq côtés consécutifs d'un pentagone dont quatre sommets quelconques ne sont pas dans un même plan, sont cinq droites d'un complexe linéaire qu'ils déterminent, ou bien, tout pentagone simple dont quatre sommets quelconques ne sont pas dans un même plan détermine un espace focal dans lequel chaque sommet du pentagone est le foyer du plan des côtés issus de ce sommet.*

Soient A, B, C, D, E les sommets consécutifs d'un pentagone donné. Ayant rapporté la figure aux coordonnées quaternaires dont ces cinq points sont les points fondamentaux, les coordonnées des côtés consécutifs du pentagone sont

$$AB(1,0,0,0,0,0),\ BC(0,0,0,0,0,1),\ CD(0,0,0,1,0,0),\ DE(0,0,-1,-1,1,0),\ EA(-1,-1,-1,0,0,0).$$

En exprimant que chacune de ces cinq droites vérifie l'équation générale des complexes linéaires

$$a_{12}X_{12}+a_{13}X_{13}+a_{14}X_{14}+a_{34}X_{34}+a_{42}X_{42}+a_{23}X_{23}=0,$$

on trouve

$$a_{12}=0,\quad a_{23}=0,\quad a_{34}=0,\qquad -a_{14}-a_{34}+a_{42}=0,\quad -a_{12}-a_{13}-a_{14}=0,$$

d'où

$$a_{12}=0,\quad a_{23}=0,\quad a_{34}=0,\quad a_{14}=a_{42}=-a_{13}=\lambda\neq 0.$$

Les côtés consécutifs du pentagone donné sont donc des droites du seul complexe linéaire

$$-X_{13}+X_{14}+X_{42}=0$$

et ce complexe linéaire n'est pas un complexe linéaire spécial puisque

$$a_{12}a_{34}+a_{13}a_{42}+a_{14}a_{23}=-\lambda^2\neq 0$$

2° **Corollaire 1.** *Un complexe linéaire est déterminé dès qu'on donne une de ces droites et deux droites conjuguées ne coupant pas cette droite ; ou bien, un espace focal est déterminé par deux droites conjuguées et une droite double qui ne les coupe pas.*

Soient a, b, b' la droite et les droites conjuguées données, A et C deux points pris arbitrairement sur la droite b, E, D les points où les plans Ab', Cb' coupent la droite a; F, G les points où les droites AE, CD coupent la droite b'; B un point quelconque différent des points F, G de la droite b'. Les droites a, AE, CD, AB, BC sont des droites de tout complexe linéaire répondant à la question. Il résulte donc du théorème précédent appliqué au pentagone ABCDE qu'il n'y a qu'un seul complexe linéaire répondant à la question

3° **Corollaire 2.** *Un complexe linéaire et l'espace focal qui lui est associé sont déterminés dès qu'on donne deux droites conjuguées distinctes, un point et son plan focal, pourvu que le plan contienne la droite passant par le point et s'appuyant sur les deux droites.*

4° **Théorème.** *Cinq droites deux à deux gauches déterminent généralement un complexe linéaire auquel elles appartiennent ou un espace focal dont elles sont cinq droites doubles.*

Soient a, b, c, d, e cinq droites données deux à deux gauches et Σ le système réglé dont les droites a, b, c sont trois génératrices rectilignes. Si la droite d coupe le système réglé Σ en des points distincts, les directrices du système réglé Σ menées par ces points et la droite e sont respectivement deux droites conjuguées par rapport à un complexe linéaire et une droite de celui-ci qu'elles déterminent en général et qui est le seul répondant à la question.

2) **Remarques.** a. Les génératrices rectilignes des systèmes réglés Σ(a, b, c), Σ'(c, d, e) sont des droites de tout complexe linéaire répondant à la question. Soient u une droite quelconque qui coupe ces systèmes réglés en des points distincts X et Y, X' et Y'; x et y, x' et y' les génératrices rectilignes

passant par ces points sur les deux systèmes réglés. Si la droite u se déplace en s'appuyant constamment sur les droites x, y, x', elle engendre un troisième système réglé Σ'' et si la droite y' qui coupe déjà ce système réglé au point Y', le coupe en un second point Y'₁, celui-ci sera sur une position u₁ de la droite u rencontrant à la fois les quatre droites x, y, x', y'. Les droites u, u'₁ seront des droites conjuguées par rapport au complexe linéaire cherché qui sera déterminé par la condition que l'une de ses droites soit l'une quelconque des cinq droites données ou une quelconque des génératrices rectilignes des systèmes réglés Σ, Σ'.

b. – Le théorème est en défaut lorsque trois des cinq droites données appartiennent à un même faisceau, lorsque quatre des cinq droites sont des génératrices rectilignes d'un même système réglé et lorsque les cinq droites coupent deux mêmes droites.

c. – Par le calcul, pour que cinq droites donnés déterminent un complexe linéaire, il faut que les déterminants du cinquième ordre formés avec les coordonnées des cinq droites ne soient pas tous nuls et pour que le complexe linéaire trouvé ne soit pas spécial, il faut en outre que la somme des produits de ces six déterminants pris deux à deux dans un certain ordre ne soit pas nulle.

5° Corollaire. *Un complexe linéaire et l'espace focal qui lui est associé sont déterminés par la condition que deux couples de génératrices rectilignes données d'un système réglé soient deux couples de droites conjuguées.*

Soient x et x', y et y' les deux couples de génératrices rectilignes données du système réglé Σ; a, b, c trois directrices quelconques de ce système réglé; d une droite quelconque qui coupe les droites x et x', mais ne coupe ni la droite y ni la droite y'; e une droite quelconque qui coupe les droites y, y', mais ne coupe ni x ni x'. Le seul complexe linéaire répondant à la question est celui déterminé par les cinq droites a, b, c, d, e.

55. Plans diamétraux et diamètres d'un complexe linéaire et de l'espace focal qui lui est associé.

1° Définitions. 1). Les plans diamétraux sont les plans focaux des points du plan de l'infini.

2) Les diamètres sont les droites conjuguées des droites du plan de l'infini.

2° Théorèmes. 1) *Les diamètres et les plans diamétraux sont les droites et les plans de la gerbe ayant pour support le foyer du plan de l'infini.*

2) *Tout plan diamétral contient un faisceau de droites du complexe linéaire parallèles entre elles; le support de ce faisceau est le foyer du plan diamétral considéré.* Il en résulte qu'un complexe linéaire n'est pas altéré par une translation parallèle à la direction de ses diamètres.

3) *Tout plan parallèle à deux droites conjuguées est un plan diamétral.*

4) *Les foyers des plans parallèles à un plan donné sont sur le diamètre conjugué à la droite de l'infini de ce plan*; ce diamètre est appelé le diamètre conjugué et, plus simplement, le diamètre des plans dont il contient les foyers et on l'appelle l'axe du complexe linéaire et de l'espace focal quand il est perpendiculaire à ses plans conjugués.

5) *Toute droite perpendiculaire et sécante à l'axe appartient au complexe linéaire, et toute droite du complexe linéaire perpendiculaire à l'axe coupe celui-ci.*

6) *La perpendiculaire commune à deux droites conjuguées est perpendiculaire et sécante à l'axe; de plus, si les éléments considérés sont réels, deux droites conjuguées quelconques et l'axe sont les directrices d'un paraboloïde hyperbolique équilatère dont les génératrices rectilignes sont des droites du complexe linéaire.*

7) *Un complexe linéaire est déterminé par son axe z et une t de ses droites qui ne coupe pas cet axe.* Le plan focal α d'un point A de la droite t contient cette droite et la perpendiculaire a abaissée du point A sur l'axe z. Le foyer B d'un plan quelconque β mené par le point A est sur la droite αβ et sur la perpendiculaire à l'axe z dans le plan β par le point βz.

8) Les plans focaux de deux points équidistants de l'axe dans un plan perpendiculaire font des angles égaux avec l'axe. Soient α le plan perpendiculaire à l'axe z au point A ou le plan focal du point A; AB = AC des segments rectilignes arbitraires de même longueur issus du point A dans le plan α; D le point à l'infini de la droite BC ≡ d; E le milieu du segment rectiligne BC; d' la droite conjuguée à la droite d. La droite d' passe par le point A et les plans d'B, d'C, d'D, d'E sont les plans focaux des points B, C, D, E. Le point D étant à l'infini, le plan d'D est un plan diamétral et, passant par le point A, il se confond avec le plan d'z, qui est donc parallèle à la droite d et perpendiculaire à la droite AE ainsi qu'au plan d'E. Les points B, C, D, E formant un groupe harmonique, il en est de même des plans d'B, d'C, d'D, d'E. Dès lors, les plans perpendiculaires d'D, d'E sont les plans bissecteurs des dièdres formés par les plans d'B, d'C, et l'axe z, qui est dans le plan d'D, est également incliné sur les plans d'B, d'C.

9) Corollaire. Quand un point décrit une circonférence dont le centre est sur l'axe et dont le plan est perpendiculaire à l'axe, le plan focal de ce point enveloppe un cône de révolution autour de l'axe ayant pour sommet le centre de la circonférence; il résulte de là et d'une propriété antérieure (2) qu'un complexe linéaire et l'espace focal associé ne sont pas altérés par un déplacement hélicoïdal suivant leur axe.

10) La distance d'un point à l'axe d'un complexe linéaire est inversement proportionnelle à la tangente de l'angle que l'axe fait avec le plan focal de ce point. Soient α le plan perpendiculaire à l'axe z en un point quelconque A ou le plan focal de ce point; a une droite quelconque menée par le point A dans le plan α; β le plan focal du point B de la droite a (ce plan contient donc la droite a); AC un segment rectiligne de longueur égale à l'unité porté sur l'axe z; a' la perpendiculaire au plan az au point C, B' le point βa'; r la distance AB; θ la valeur de l'angle CAB' de l'axe z et du plan β. – Lorsque le point B décrit la droite a, le plan β tourne autour de la même droite, le point B' se déplace sur la droite a' et les trois formes engendrées sont projectives. Quand le point B est à l'infini sur la droite a ou au point A, le plan β est confondu avec le plan az ou avec le plan α, le point B' est confondu avec le point C ou avec le point à l'infini de la droite a'; les points A, C sont donc les points limites des ponctuelles projectives a(B), a'(B'); on a donc

$$AB.\,AB' = C^{te} \quad \text{ou} \quad r\ \text{tang.}\,\alpha = C^{te},$$

et la propriété résulte de ce que, en vertu du théorème précédent, la valeur de la constante ne dépend ni de la direction de la droite a dans le plan α, ni de la position du point A sur l'axe z.

11) Corollaire. a. Les distances de deux droites conjuguées à l'axe sont proportionnelles aux tangentes que ces droites font avec l'axe.

b. – La distance d'une droite du complexe linéaire à l'axe est inversement proportionnelle à la tangente de l'angle de la droite avec l'axe.

Les droites du complexe linéaire situées à la même distance de l'axe sont donc tangentes à des hélices circulaires de même pas et une quelconque de ces hélices détermine le complexe linéaire.

56. Produits de deux polarités placées dans le même espace ε. – 1° Lorsque les polarités ont la même quadrique directrice, leur produit est la transformation identique et il n'y a pas lieu de s'en occuper. Lorsque les quadriques directrices sont des quadriques différentes Q, Q', le produit des deux polarités est une collinéation entre deux espaces superposés et cette collinéation est nécessairement une des collinéations différentes de la transformation identique, trouvées précédemment (n°s 22 à 34). Treize cas sont donc à considérer.

2° Premier cas: Les points doubles et les plans doubles correspondants de la collinéation sont les sommets et les faces d'un tétraèdre ABCD ou $\alpha\beta\gamma\delta$; les droites doubles sont les arêtes du tétraèdre.

Les points A, B, C, D sont les seuls points de l'espace ε, ayant les mêmes plans polaires par rapport aux

deux quadriques Q, Q'; ces plans sont les faces opposées $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ du tétraèdre $ABCD$; ce tétraèdre est le seul tétraèdre polaire commun aux quadriques Q, Q'; les arêtes opposées AB et CD ou $\gamma\delta$ et $\alpha\beta$, AC et BD ou $\beta\delta$ et $\alpha\gamma$, AD et BC ou $\beta\gamma$ et $\alpha\delta$ sont les seuls couples de droites formés de droites polaires pour les deux quadriques. En prenant le tétraèdre $ABCD$ ou $\alpha\beta\gamma\delta$ comme tétraèdre fondamental des coordonnées quaternaires, les équations ponctuelles et tangentielles des quadriques Q, Q' sont

(1) $$a_{11}X_1^2+a_{22}X_2^2+a_{33}X_3^2+a_{44}X_4^2=0, \qquad a'_{11}X_1^2+a'_{22}X_2^2+a'_{33}X_3^2+a'_{44}X_4^2=0$$

et

(2) $$\frac{1}{a_{11}}\xi_1^2+\frac{1}{a_{22}}\xi_2^2+\frac{1}{a_{33}}\xi_3^2+\frac{1}{a_{44}}\xi_4^2=0, \qquad \frac{1}{a'_{11}}\xi_1^2+\frac{1}{a'_{22}}\xi_2^2+\frac{1}{a'_{33}}\xi_3^2+\frac{1}{a'_{44}}\xi_4^2=0,$$

avec

(3). $$a_{11}\neq 0, \qquad a_{22}\neq 0, \qquad a_{33}\neq 0, \qquad a_{44}\neq 0,$$

les deux quadriques étant des quadriques proprement dites.

Les équations entre les points homologues X, X' dans la colliniation qui est le produit des deux polarités, sont

(4) $$a'_{11}X'_1=a_{11}X_1, \qquad a'_{22}X'_2=a_{22}X_2 \qquad a'_{33}X'_3=a_{33}X_3, \qquad a'_{44}X'_4=a_{44}X_4$$

et les équations aux points doubles sont

(5) $$(a_{11}-k\,a'_{11})X_1=0, \quad (a_{22}-k\,a'_{22})X_2=0, \quad (a_{33}-k\,a'_{33})X_3=0, \quad (a_{44}-k\,a'_{44})X_4=0$$

dans laquelle k doit être remplacé par les racines de l'équation

(6) $$(a_{11}-k\,a'_{11})(a_{22}-k\,a'_{22})(a_{33}-k\,a'_{33})(a_{44}-k\,a'_{44})=0.$$

Cette équation en k devant avoir quatre racines simples, il faut qu'on ait les six conditions

(7) $$a_{11}:a'_{11}\neq a_{22}:a'_{22}, \qquad a_{11}:a'_{11}\neq a_{33}:a'_{33}, \qquad \cdots\cdots\cdots, \qquad a_{33}:a'_{33}\neq a_{44}:a'_{44}.$$

Les équations

(8) $$(a_{11}-k\,a'_{11})X_1^2+(a_{22}-k\,a'_{22})X_2^2+(a_{33}-k\,a'_{33})X_3^2+(a_{44}-k\,a'_{44})X_4^2=0$$

et

(9) $$\left(\frac{k}{a_{11}}-\frac{1}{a'_{11}}\right)\xi_1^2+\left(\frac{k}{a_{22}}-\frac{1}{a'_{22}}\right)\xi_2^2+\left(\frac{k}{a_{33}}-\frac{1}{a'_{33}}\right)\xi_3^2+\left(\frac{k}{a_{44}}-\frac{1}{a'_{44}}\right)\xi_4^2=0,$$

dans lesquelles k est un paramètre arbitraire, représentent, la première, une infinité de quadriques passant par l'intersection des quadriques Q, Q', la seconde, une infinité de quadriques inscrites à la surface développable circonscrite aux deux quadriques.

On dit que les quadriques représentées par l'équation (8) forment un faisceau ponctuel de quadriques et que celles représentées par l'équation (9) forment un faisceau tangentiel. En annulant les discriminants des deux équations, on obtient des équations en k équivalentes à l'équation (6). Chacun des deux faisceaux de quadriques contient donc quatre quadriques qui ne sont pas des quadriques proprement dites et qu'on appelle les quadriques dégénérées des deux faisceaux.

Les équations des quadriques dégénérées qui correspondent à la première valeur de k,

(10) $$k=\frac{a_{11}}{a'_{11}}$$

sont respectivement

(11) $$\left(\frac{a_{22}}{a_{11}}-\frac{a'_{22}}{a'_{11}}\right)X_2^2+\left(\frac{a_{33}}{a_{11}}-\frac{a'_{33}}{a'_{11}}\right)X_3^2+\left(\frac{a_{44}}{a_{11}}-\frac{a'_{44}}{a'_{11}}\right)X_4^2=0$$

et

(12) $$\left(\frac{a_{11}}{a_{22}}-\frac{a'_{11}}{a'_{22}}\right)\xi_2^2+\left(\frac{a_{11}}{a_{33}}-\frac{a'_{11}}{a'_{33}}\right)\xi_3^2+\left(\frac{a_{11}}{a_{44}}-\frac{a'_{11}}{a'_{44}}\right)\xi_4^2=0,$$

dans lesquelles tous les coefficients sont différents de zéro.
L'équation (11) représente un cône du second ordre proprement dit Γ_1 ayant le point A pour sommet et le trièdre $\beta\gamma\delta$ pour trièdre polaire. L'équation (12) représente une conique proprement dite γ_1 située dans le plan α et ayant le triangle BCD pour triangle polaire.
En considérant les autres valeurs de k, on trouve ainsi que l'intersection des quadriques Q, Q' est formée des points communs à quatre cônes du second degré proprement dits $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ dont les sommets sont les sommets A, B, C, D du tétraèdre polaire ABCD commun aux deux quadriques; et que la développable circonscrite à ces quadriques est déterminée par l'ensemble des plans tangents communs à quatre coniques proprement dites $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ situées dans les faces du même tétraèdre. Les quatre cônes Γ_i n'ont aucune génératrice rectiligne commune et les quatre coniques γ_i n'ont aucune tangente commune; l'intersection des quadriques Q, Q' est donc une courbe gauche du quatrième ordre, indécomposable en courbes d'ordres moins élevés, et la développable circonscrite à ces quadriques est une surface développable de quatrième classe, indécomposable en surfaces de classes moins élevées.

3° Second cas. Les points doubles et les plans doubles correspondants de la collinéation sont le sommet A et la face opposée α, le sommet B et la face opposée β, les points de l'arête $\alpha\beta$ et les plans passant par l'arête opposée AB du tétraèdre ABCD ou $\alpha\beta\gamma\delta$; les droites doubles sont la droite AB, la droite $\alpha\beta$, les droites du faisceau A dans la face β et les droites du faisceau B dans la face α.
Le point A, le point B et les points de la droite $\alpha\beta$ sont les seuls points ayant les mêmes plans polaires par rapport aux quadriques Q, Q'; ces plans sont respectivement le plan α, le plan β et les plans passant par la droite AB. Les droites $\alpha\beta$, AB sont des droites polaires par rapport aux deux quadriques et chacune des droites du faisceau A dans le plan β est la droite polaire d'une des droites du faisceau A dans le plan α. Les quadriques Q, Q' coupent la droite $\alpha\beta$ aux mêmes points distincts où elles ont les mêmes plans tangents passant par la droite AB; on peut supposer que ces points sont les points C, D et que les plans tangents correspondants sont les plans δ, γ. – En prenant le tétraèdre ABCD ou $\alpha\beta\gamma\delta$ pour tétraèdre fondamental des coordonnées quaternaires, les équations ponctuelles et tangentielles des quadriques Q, Q' sont

(1) $$a_{11}X_1^2+a_{22}X_2^2+2a_{34}X_3X_4=0 \qquad a'_{11}X_1^2+a'_{22}X_2^2+2a'_{34}X_3X_4=0$$
et

(2) $$\frac{1}{a_{11}}\xi_1^2+\frac{1}{a_{22}}\xi_2^2+\frac{2}{a_{34}}\xi_3\xi_4=0 \qquad \frac{1}{a'_{11}}\xi_1^2+\frac{1}{a'_{22}}\xi_2^2+\frac{2}{a'_{34}}\xi_3\xi_4=0;$$

dont tous les coefficients sont différents de zéro.
Les équations entre les points homologues X, X' dans la collinéation qui est le produit des deux polarités sont

(3) $$a'_{11}X'_1=a_{11}X_1, \qquad a'_{22}X'_2=a_{22}X_2, \qquad a'_{34}X'_4=a_{34}X_4, \qquad a'_{34}X'_3=a_{34}X_3$$

et les équations aux points doubles de cette collinéation sont

(4) $$(a_{11}-ka'_{11})X_1=0, \quad (a_{22}-ka'_{22})X_2=0 \quad (a_{34}-ka'_{34})X_4=0, \quad (a_{34}-ka'_{34})X_3=0,$$

dans lesquelles k doit être remplacé par les racines de l'équation

(5) $$(a_{11}-ka'_{11})(a_{22}-ka'_{22})(a_{34}-ka'_{34})^2=0.$$

Cette dernière équation devant avoir deux racines simples et une racine double, il faut qu'on ait

(6) $$a_{11}:a'_{11}\neq a_{22}:a'_{22}, \qquad a_{11}:a'_{11}\neq a_{34}:a'_{34}, \qquad a_{22}:a'_{22}\neq a_{34}:a'_{34}.$$

Les équations

(7) $$(a_{11}-ka'_{11})X_1^2+(a_{22}-ka'_{22})X_2^2+2(a_{34}-ka'_{34})X_3X_4=0$$

et

(8) $$\left(\frac{k}{a_{11}}-\frac{1}{a'_{11}}\right)\xi_1^2+\left(\frac{k}{a_{22}}-\frac{1}{a'_{22}}\right)\xi_2^2+2\left(\frac{k}{a_{34}}-\frac{1}{a'_{34}}\right)\xi_3\xi_4=0,$$

dans lesquelles k est un paramètre arbitraire, représentent, la première, une infinité de quadriques passant par l'intersection des quadriques Q, Q', la seconde, une infinité de quadriques inscrites à la surface développable circonscrite aux quadriques Q, Q'.

On dit que les quadriques représentées par l'équation (7) forment un faisceau ponctuel de quadriques et que celles représentées par l'équation (8) forment un faisceau tangentiel. En annulant les discriminants de ces équations, on obtient des équations en k équivalentes à l'équation (5). Il en résulte que chacun des deux faisceaux de quadriques contient trois quadriques qui ne sont pas des quadriques proprement dites, et qu'on appelle les quadriques dégénérées des deux faisceaux. Les équations des quadriques dégénérées du faisceau ponctuel (7) sont

(9) $$\left(\frac{a_{22}}{a_{11}}-\frac{a'_{22}}{a'_{11}}\right)X_1^2+2\left(\frac{a_{34}}{a_{11}}-\frac{a'_{34}}{a'_{11}}\right)X_3X_4=0,$$

(10) $$\left(\frac{a_{11}}{a_{22}}-\frac{a'_{11}}{a'_{22}}\right)X_2^2+2\left(\frac{a_{34}}{a_{22}}-\frac{a'_{34}}{a'_{22}}\right)X_3X_4=0,$$

(11) $$\left(\frac{a_{11}}{a_{34}}-\frac{a'_{11}}{a'_{34}}\right)X_1^2+\left(\frac{a_{22}}{a_{34}}-\frac{a'_{22}}{a'_{34}}\right)X_2^2=0$$

et celles des quadriques dégénérées du faisceau tangentiel (8) sont

(12) $$\left(\frac{a_{11}}{a_{22}}-\frac{a'_{11}}{a'_{22}}\right)\xi_1^2+2\left(\frac{a_{11}}{a_{34}}-\frac{a'_{11}}{a'_{34}}\right)\xi_3\xi_4=0,$$

(13) $$\left(\frac{a_{22}}{a_{11}}-\frac{a'_{22}}{a'_{11}}\right)\xi_2^2+2\left(\frac{a_{22}}{a_{34}}-\frac{a'_{22}}{a'_{34}}\right)\xi_3\xi_4=0,$$

(14) $$\left(\frac{a_{34}}{a_{11}}-\frac{a'_{34}}{a'_{11}}\right)\xi_1^2+\left(\frac{a_{34}}{a_{22}}-\frac{a'_{34}}{a'_{22}}\right)\xi_2^2=0.$$

Les équations (9), (10), (11) représentent respectivement un cône du second degré proprement dit Γ_1 ayant le point A pour sommet et tangent aux plans γ, δ suivant les droites $\beta\gamma, \beta\delta$; un cône du second degré proprement dit Γ_2 ayant le point B pour sommet et tangent aux plans γ, δ suivant les droites $\alpha\gamma, \alpha\delta$; un système de deux plans distincts ϖ_1, ϖ_2 passant par la droite $\alpha\beta$ et formant un groupe harmonique avec les plans α, β. L'intersection des quadriques Q, Q' est donc décomposable en deux coniques qui sont les intersections communes des cônes Γ_1, Γ_2 par les plans ϖ_1, ϖ_2 et qui sont tangentes aux plans γ, δ aux points communs D, C.

Les équations (12), (13), (14) représentent respectivement une conique proprement dite γ_1 située dans le plan α et tangente aux points C, D aux droites BC, BD; une conique proprement dite γ_2 située dans le plan β et tangente aux points C, D aux droites AC, AD; un système de deux points distincts P_1, P_2 situés sur la droite AB et formant un groupe harmonique avec les points A, B. La surface développable circonscrite aux quadriques Q, Q' est donc décomposable en deux cônes du second degré proprement dits dont les sommets sont les points P_1, P_2 et qui passent l'un et l'autre par les coniques γ_1, γ_2.

6° Troisième cas: *Les points et les plans doubles correspondants de la collinéation sont le sommet A et la face opposée α, le sommet B et la face opposée β, le sommet B et la face adjacente δ du tétraèdre ABCD ou $\alpha\beta\gamma\delta$; les droites doubles sont les droites AB, BC, CA et CD ou $\alpha\beta$,*

Les points A, B, C sont les seuls ayant les mêmes plans polaires pour les deux quadriques Q, Q'. Ces plans sont respectivement le plan α, le plan β et le plan δ. Les deux quadriques sont tangentes au plan δ au point C, elles admettent les droites AB, $\alpha\beta$ pour droites polaires et les droites CA, CB pour tangentes conjuguées au point C. Elles coupent la droite CD pour la seconde fois en des points E, F différents l'un de l'autre et du point C. Si le point D est le conjugué harmonique du point C pour les points E, F et si le tétraèdre ABCD ou $\alpha\beta\gamma\delta$ est le tétraèdre fondamental des coordonnées quaternaires, les équations ponctuelles et tangentielles des deux quadriques sont

(1) $$a_{11}X_1^2+a_{22}X_2^2+a_{44}X_4^2+2a_{34}X_3X_4=0, \qquad a'_{11}X_1^2+a'_{22}X_2^2+a_{44}X_4^2-2a_{34}X_3X_4=0$$
et

(2) $$\frac{1}{a_{11}}\xi_1^2+\frac{1}{a_{22}}\xi_2^2-\frac{a_{44}}{a_{34}^2}\xi_3+\frac{2}{a_{34}}\xi_3\xi_4=0, \qquad \frac{1}{a'_{11}}\xi_1^2+\frac{1}{a'_{22}}\xi_2^2-\frac{a_{44}}{a_{34}^2}\xi_3^2+\frac{2}{a_{34}}\xi_3\xi_4=0,$$

dont tous les coefficients sont différents de zéro.

Les équations entre les points homologues X, X' dans la collinéation qui est le produit des deux polarités sont

(3) $$a'_{11}X'_1=a_{11}X_1, \quad a'_{22}X'_2=a_{22}X_2, \quad X'_4=-X_4, \quad a_{44}X'_4-a_{34}X'_3=a_{44}X_4+a_{34}X_3$$
et les équations aux points doubles sont

(4) $$(a_{11}-k\,a'_{11})X_1=0, \quad (a_{22}-k\,a'_{22})X_2=0, \quad (1+k)X_4=0, \quad a_{44}(1-k)X_4+a_{34}(1+k)X_3=0,$$

dans lesquelles k doit être remplacé par les racines de l'équation

(5) $$(a_{11}-ka'_{11})(a_{22}-ka'_{22})(1+k)^2=0.$$

Cette équation devant avoir deux racines simples et une racine double correspondant respectivement aux points A, B, C, il faut qu'on ait

(6) $$a_{11}:a'_{11}\neq a_{22}:a'_{22}, \quad a_{11}:a'_{11}\neq -1, \quad a_{22}:a'_{22}\neq -1, \quad a_{44}\neq 0.$$
Les équations

(7) $$(a_{11}-k\,a'_{11})X_1^2+(a_{22}-k\,a'_{22})X_2^2+a_{44}(1-k)X_4^2+2a_{34}(1+k)X_3X_4=0$$
et

(8) $$\left(\frac{k}{a_{11}}-\frac{1}{a'_{11}}\right)\xi_1^2+\left(\frac{k}{a_{22}}-\frac{1}{a'_{22}}\right)\xi_2^2-\frac{a_{44}}{a_{34}^2}(k-1)\xi_3^2+\frac{2}{a_{34}}(k+1)\xi_3\xi_4=0,$$

dans lesquelles k est un paramètre arbitraire, représentent, la première, une infinité de quadriques passant par l'intersection des quadriques Q, Q', la seconde, une infinité de quadriques inscrites à la développable circonscrite aux quadriques Q, Q'.

On dit que les quadriques représentées par l'équation (7) forment un faisceau ponctuel de quadriques et que celles représentées par l'équation (8) forment un faisceau tangentiel de quadriques. En annulant les discriminants des deux équations, on obtient des équations en k équivalentes à l'équation (5). Chacun des deux faisceaux contient donc trois quadriques qui ne sont pas des quadriques proprement dites et qu'on appelle les quadriques dégénérées des deux faisceaux. Les équations des quadriques dégénérées du faisceau ponctuel (7) sont

(9) $$\left(\frac{a_{22}}{a_{11}}-\frac{a'_{22}}{a'_{11}}\right)X_2^2+a_{44}\left(\frac{1}{a_{11}}-\frac{1}{a'_{11}}\right)X_4^2+2a_{34}\left(\frac{1}{a_{11}}+\frac{1}{a'_{11}}\right)X_3X_4=0,$$

(10) $$\left(\frac{a_{11}}{a_{22}}-\frac{a'_{11}}{a'_{22}}\right)X_1^2+a_{44}\left(\frac{1}{a_{22}}-\frac{1}{a'_{22}}\right)X_4^2+2a_{34}\left(\frac{1}{a_{22}}+\frac{1}{a'_{22}}\right)X_3X_4=0,$$

(11) $$(a_{11}+a'_{11})X_1^2+(a_{22}+a'_{22})X_2^2+2a_{44}X_4^2=0,$$

et celles des quadriques du faisceau tangentiel (8) sont

(12) $$\left(\frac{a_{11}}{a_{22}}-\frac{a'_{11}}{a'_{22}}\right)\xi_1^2-\frac{a_{44}}{a_{34}^2}\left(a_{11}-a'_{11}\right)\xi_3^2+\frac{2}{a_{34}}\left(a_{11}+a'_{11}\right)\xi_3\xi_4=0,$$

(13) $$\left(\frac{a_{22}}{a_{11}}-\frac{a'_{22}}{a'_{11}}\right)\xi_2^2-\frac{a_{44}}{a_{34}^2}\left(a_{22}-a'_{22}\right)\xi_3^2+\frac{2}{a_{34}}\left(a_{22}+a'_{22}\right)\xi_3\xi_4=0,$$

(14) $$\left(\frac{1}{a_{11}}-\frac{1}{a'_{11}}\right)\xi_1^2+\left(\frac{1}{a_{22}}-\frac{1}{a'_{22}}\right)\xi_2^2-\frac{2a_{44}}{a_{34}^2}\xi_3^2=0.$$

Les équations (9), (10), (11) représentent trois cônes du second degré proprement dits $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ ayant pour sommets les points A, B, C. Le cône Γ_1 est tangent au plan δ suivant la droite AC et à un second plan ϖ_1 mené par la droite AB, suivant une droite du plan β. Le cône Γ_2 est tangent au plan δ suivant la droite BC et à un second plan ϖ_2 différent du plan ϖ_1 mené par la droite AB, suivant une droite du plan α. Le cône Γ_3 a le trièdre $\alpha\beta\delta$ pour trièdre polaire. L'intersection des quadriques Q, Q' est donc une courbe gauche de quatrième ordre indécomposable en courbes d'ordres moins élevés et ayant au point C un point double dont les tangentes forment un groupe harmonique avec les droites CA, CB dans la face δ.

Les équations (12), (13), (14) représentent trois coniques proprement dites $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ situées dans les plans α, β, δ. La conique γ_1 est tangente au point C à la droite BC et en un second point P_1 de la droite CD à une droite issue du point B. La conique γ_2 est tangente au point C à la droite AC et en un second point P_2 différent du point P_1 sur la droite CD à une droite issue du point A. La conique γ_3 a le triangle ABC pour triangle polaire. La surface développable circonscrite aux quadriques Q, Q' est donc une surface de quatrième classe indécomposable en surfaces de classes moins élevées et ayant le plan δ comme plan double avec pour génératrices rectilignes de contact des droites formant un groupe harmonique avec les droites CA, CB.

5° *Quatrième cas: Les points et les plans doubles correspondants de la collinéation sont les points de l'arête AC et les plans passant par l'arête opposée BD, les points de l'arête BD et les plans passant par l'arête opposée AC du tétraèdre ABCD ou $\alpha\beta\gamma\delta$; les droites doubles sont les droites AC, BD et toutes les droites qui coupent ces deux droites.*

Les quadriques Q, Q' coupent la droite AC aux mêmes points où elles ont les mêmes plans tangents passant par la droite BD et elles coupent la droite CD aux mêmes points où elles ont les mêmes plans tangents passant par la droite AB. On peut donc supposer les deux quadriques tangentes aux plans α, γ aux points C, A et tangentes aux plans β, δ aux points D, B. Dans ces conditions, les droites AB, AD, CB, CD sont quatre génératrices rectilignes communes aux quadriques Q, Q' et les droites AC, BD sont des droites polaires pour les deux quadriques. En prenant le tétraèdre ABCD ou $\alpha\beta\gamma\delta$ pour tétraèdre fondamental des coordonnées quaternaires, les équations ponctuelles et tangentielles des quadriques Q, Q' sont

(1) $$2a_{13}X_1X_3+2a_{24}X_2X_4=0, \qquad 2a'_{13}X_1X_3+2a'_{24}X_2X_4=0$$

et

(2) $$2a_{24}\xi_1\xi_3+2a_{13}\xi_2\xi_4=0, \qquad 2a'_{24}\xi_1\xi_3+2a'_{13}\xi_2\xi_4=0,$$

dans lesquelles tous les coefficients sont différents de zéro.

Les équations entre les points homologues X, X' de la collinéation qui est le produit des deux polarités sont

(3) $$a'_{13}X'_3=a_{13}X_3, \qquad a'_{24}X'_4=a_{24}X_4, \qquad a'_{13}X'_1=a_{13}X_1, \qquad a'_{24}X'_2=a_{24}X_2$$

et les équations aux points doubles sont

(4) $$(a_{13}-k\,a'_{13})X_3=0, \qquad (a_{24}-k\,a'_{24})X_4=0, \qquad (a_{13}-k\,a'_{13})X_1=0, \qquad (a_{24}-k\,a'_{24})X_2=0,$$

dans lesquelles k doit être remplacé par les racines de l'équation

(5) $$(a_{13}-ka'_{13})^2(a_{24}-ka'_{24})^2=0$$

Cette équation devant avoir deux racines doubles correspondant aux points des droites AB, CD, il faut qu'on ait

(6) $$a_{13}:a'_{13}\neq a_{24}:a'_{24}.$$

Les équations

(7) $$2(a_{13}-ka'_{13})X_1X_3+2(a_{24}-ka'_{24})X_2X_4=0$$

et

(8) $$2(a_{24}-ka'_{24})\xi_1\xi_3+2(a_{13}-ka'_{13})\xi_2\xi_4=0,$$

dans lesquelles k est un paramètre variable, représentent les mêmes quadriques en nombre infini qui passent par l'intersection des quadriques Q, Q' et qui sont, en outre, inscrites à la surface développable circonscrite à ces deux quadriques. On dit que toutes ces quadriques forment un faisceau de quadriques à la fois ponctuel (7) et tangentiel (8). Les quadriques dégénérées de ces faisceaux correspondent aux valeurs de k vérifiant l'équation (5) et leurs équations sont

(9) $$X_1X_3=0,\qquad X_2X_4=0,\qquad \xi_1\xi_3=0,\qquad \xi_2\xi_4=0.$$

Les quadriques dégénérées du faisceau considéré comme un faisceau ponctuel sont les plans α et γ, β et δ, celles du faisceau considéré comme un faisceau tangentiel sont les points A et C, B et D. Il en résulte que l'intersection des quadriques Q, Q' est formée des points des droites AB, AD, CB, CD et que la développable circonscrite aux deux quadriques est formée des plans passant par les mêmes droites.

4° Cinquième cas: *Les points doubles et les plans doubles correspondants de la collinéation sont les points de l'arête AC et les plans passant par l'arête BD, le sommet B et la face adjacente δ du tétraèdre ABCD ou $\alpha\beta\gamma\delta$, les droites doubles sont les droites AC, BD et celles du faisceau B dans le plan δ.*

Les quadriques Q, Q' sont tangentes au point B au plan δ, elles coupent la droite AC au même point où elles ont les mêmes plans tangents passant par la droite BD. On peut donc supposer qu'elles sont tangentes aux points A, C aux plans γ, α. Les droites AB, BC sont ainsi des génératrices rectilignes communes aux deux quadriques; les droites AC, BD sont des droites polaires et les droites du faisceau B dans le plan δ sont deux à deux des tangentes conjuguées formant un faisceau involutif dont les droites BA, BC sont les éléments doubles. Les quadriques Q, Q' coupent la droite BD pour la seconde fois en des points F, G différents l'un de l'autre et différents du point B. Si le point D est le conjugué harmonique du point B par rapport aux points F, G et si le tétraèdre ABCD ou $\alpha\beta\gamma\delta$ est le tétraèdre fondamental des coordonnées quaternaires, les équations ponctuelles et tangentielles des quadriques Q, Q' sont

(1) $$a_{44}X_4^2+2a_{13}X_1X_3+2a_{24}X_2X_4=0,\qquad a_{44}X_4^2+2a'_{13}X_1X_3-2a_{24}X_2X_4=0$$

et

(2) $$\frac{a_{44}}{a_{24}^2}\xi_2^2-\frac{2}{a_{13}}\xi_1\xi_3-\frac{2}{a_{24}}\xi_2\xi_4=0,\qquad \frac{a_{44}}{a_{24}^2}\xi_2^2-\frac{2}{a'_{13}}\xi_1\xi_3+\frac{2}{a_{24}}\xi_2\xi_4=0,$$

dont tous les coefficients sont différents de zéro.

Les équations entre les points homologues X, X' de la collinéation qui est le produit des deux polarités sont

(3) $$a'_{13}X'_3=a_{13}X_3,\quad -a'_{24}X'_4=a_{24}X_4,\quad a'_{13}X'_1=a_{13}X_1,\quad a_{44}X'_4-a_{24}X'_2=a_{24}X_4+a_{24}X_2$$

et les équations aux points doubles sont

(4) $$(a_{13}-ka'_{13})X_3=0,\quad a_{24}(1+k)X_4=0,\quad (a_{13}-ka'_{13})X_1=0,\quad a_{44}(1-k)X_4+a_{24}(1+k)X_2=0,$$

dans lesquelles k doit être remplacé par les racines de l'équation

(5) $$(a_{13}-ka'_{13})^2(1+k)^2=0.$$

Cette dernière équation devant avoir deux racines doubles correspondant au point B et aux points de la droite AC, il faut qu'on ait

(6) $$a_{13}:a'_{13}\neq\pm 1 \quad \text{et} \quad a_{44}\neq 0.$$

Les équations

(7) $$a_{44}(1-k)X_4^2+2(a_{13}-ka'_{13})X_1X_3+2a_{24}(1+k)X_2X_4=0$$

et

(8) $$\frac{a_{44}}{a_{24}^2}(k-1)\xi_2^2-2\left(\frac{k}{a_{13}}-\frac{1}{a'_{13}}\right)\xi_1\xi_3-\frac{2}{a_{24}}(k+1)\xi_2\xi_4=0$$

dans lesquelles k est un paramètre variable, représentent, la première une infinité de quadriques passant par l'intersection des quadriques Q, Q', la seconde, une infinité de quadriques inscrites à la surface développable circonscrite aux quadriques Q, Q'.

On dit que les quadriques représentées par l'équation (7) forment un faisceau ponctuel de quadriques et que celles représentées par l'équation (8) forment un faisceau tangentiel de quadriques. En annulant les discriminants de ces équations, on obtient des équations en k équivalentes à l'équation (5). Chacun des deux faisceaux contient donc deux quadriques qui ne sont pas des quadriques proprement dites et qu'on appelle les quadriques dégénérées des deux faisceaux. Les équations de ces quadriques dégénérées sont respectivement

(9) $$a_{44}\left(\frac{1}{a_{13}}-\frac{1}{a'_{13}}\right)X_4^2+2a_{24}\left(\frac{1}{a_{13}}+\frac{1}{a'_{13}}\right)X_2X_4=0, \quad 2a_{44}X_4^2+2(a_{13}+a'_{13})X_1X_3=0$$

et

(10) $$\frac{a_{44}}{a_{24}^2}\left(\frac{1}{a'_{13}}-\frac{1}{a_{13}}\right)\xi_2^2-\frac{2}{a_{24}}\left(\frac{1}{a'_{13}}+\frac{1}{a_{13}}\right)\xi_2\xi_4=0, \quad \frac{2a_{44}}{a_{24}^2}\xi_2^2-2\left(\frac{1}{a_{13}}+\frac{1}{a'_{13}}\right)\xi_1\xi_3=0.$$

La première des équations (9) représente une quadrique décomposable en deux plans, le plan δ et un plan ϖ passant par la droite AC et différent du plan δ. L'autre équation représente un cône du second degré proprement dit Γ_1 ayant le point B pour sommet et tangent aux plans α, γ suivant les droites BC, BA. L'intersection des quadriques Q, Q' est donc formée des droites BC, BA et de la conique proprement dite γ_1 suivant lesquelles le plan δ et le plan ϖ coupent le cône Γ_1; cette conique γ_1 est tangente aux plans γ, α aux points A, C.

La première des équations (10) représente le point B et un point P différent du point B sur la droite BD. L'autre équation représente une conique proprement dite γ_2 tangente aux points A, C aux droites BA, BC. Les plans tangents communs aux quadriques Q, Q' sont les plans passant par l'une ou l'autre des droites BA, BC et les plans tangents au cône du second degré proprement dit Γ_2 qui projette la conique γ_2 du point P; ce cône Γ_2 est tangent aux points A, C aux plans γ, α.

7° Sixième cas: *Les points et les plans doubles correspondants de la collinéation sont le sommet A et la face adjacente γ, le sommet B et la face adjacente δ du tétraèdre ABCD ou $\alpha\beta\gamma\delta$; les droites doubles sont les droites AB, AC, BD.*

Les quadriques Q, Q' sont tangentes aux points A, B aux plans γ, δ, elles ont la droite AB comme génératrice rectiligne commune et les droites AC, BD comme droites polaires. Elles coupent chacune des droites AC, BD pour la seconde fois en des points différents F et G, H et K différents des points A et B.

Si les points C, D sont les points conjugués harmoniques des points A, B par rapport aux points F et G, H et K, et si le tétraèdre ABCD ou $\alpha\beta\gamma\delta$ est le tétraèdre fondamental des coordonnées quaternaires, les équations ponctuelles et tangentielles des quadriques Q, Q' sont

(1) $$a_{33}X_3^2+a_{44}X_4^2+2a_{13}X_1X_3+2a_{24}X_2X_4=0, \quad a_{33}X_3^2+\lambda a_{44}X_4^2-2a_{13}X_1X_3-2\lambda a_{24}X_2X_4=0$$
et

(2) $$\frac{a_{33}}{a_{13}^2}\xi_1^2+\frac{a_{44}}{a_{24}^2}\xi_2^2-\frac{2}{a_{13}}\xi_1\xi_3-\frac{2}{a_{24}}\xi_2\xi_4=0, \quad \frac{a_{33}}{a_{13}^2}\xi_1^2+\frac{a_{44}}{\lambda a_{24}^2}\xi_2^2+\frac{2}{a_{13}}\xi_1\xi_3+\frac{2}{\lambda a_{24}}\xi_2\xi_4=0,$$

dont les coefficients sont différents de zéro.
Les équations entre les points homologues X, X' dans la collinéation qui est le produit des deux polarités sont

(3) $$-a_{13}X_3'=a_{13}X_3, \quad -\lambda a_{24}X_4'=a_{24}X_4, \quad a_{33}X_3'-a_{13}X_1'=a_{33}X_3+a_{13}X_1, \quad \lambda a_{44}X_4'-\lambda a_{24}X_2'=a_{44}X_4+a_{24}X_2,$$

et les équations aux points doubles sont

(4) $$a_{13}(1+k)X_3=0, \quad a_{24}(1+\lambda k)X_4=0, \quad a_{33}(1-k)X_3+a_{13}(1+k)X_1=0, \quad a_{44}(1-\lambda k)X_4+a_{24}(1+\lambda k)X_2=0$$

dans lesquelles k doit être remplacé par les racines de l'équation

(5) $$(1+k)^2(1+\lambda k)^2=0$$

Cette équation doit avoir deux racines doubles correspondant aux points A et B; il faut donc qu'on ait

(6) $$\lambda\neq 1.$$

Les équations

(7) $$a_{33}(1-k)X_3^2+a_{44}(1-\lambda k)X_4^2+2a_{13}(1+k)X_1X_3+2a_{24}(1+\lambda k)X_2X_4=0$$
et

(8) $$\frac{a_{33}}{a_{13}^2}(k-1)\xi_1^2+\frac{a_{44}}{a_{24}^2}\left(k-\frac{1}{\lambda}\right)\xi_2^2-\frac{2}{a_{13}}(k+1)\xi_1\xi_3-\frac{2}{a_{24}}\left(k+\frac{1}{\lambda}\right)\xi_2\xi_4=0,$$

dans lesquelles k est un paramètre arbitraire, représentent, la première, une infinité de quadriques passant par l'intersection des quadriques Q, Q', la seconde, une infinité de quadriques inscrites à la surface dévelloppable circonscrite aux quadriques Q, Q'.
On dit que les quadriques représentées par l'équation (7) forment un faisceau ponctuel de quadriques et que celles représentées par l'équation (8) forment un faisceau tangentiel de quadriques. En annulant les discriminants de ces équations, on obtient des équations équivalentes à l'équation (5). Chacun des deux faisceaux contient donc deux quadriques qui ne sont pas des quadriques proprement dites et qu'on appelle les quadriques dégénérées des deux faisceaux. Les équations de ces quadriques dégénérées sont respectivement

(9) $$2a_{33}X_3^2+a_{44}(1+\lambda)X_4^2+2a_{24}(1-\lambda)X_2X_4=0, \quad a_{33}(\lambda+1)X_3^2+2\lambda a_{44}X_4^2+2a_{13}(\lambda-1)X_1X_3=0$$ (10)
et

(11) $$\frac{2a_{33}}{a_{13}^2}\xi_1^2+\frac{a_{44}}{a_{24}^2}\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)\xi_2^2+\frac{2}{a_{24}}\left(\frac{1}{\lambda}-1\right)\xi_2\xi_4=0, \quad \frac{a_{33}}{a_{13}^2}\left(\frac{1}{\lambda}+1\right)\xi_1^2+\frac{2a_{44}}{a_{24}^2}\xi_2^2-\frac{2}{a_{13}}\left(\frac{1}{\lambda}-1\right)\xi_1\xi_3=0$$ (12)

Les équations (9) et (10) représentent deux cônes du second degré proprement dits Γ_1, Γ_2 ayant les points A, B pour sommets et la droite AB pour génératrice rectiligne commune; mais les plans tangents aux deux cônes suivant cette droite sont des plans différents δ, γ. L'intersection des quadriques Q, Q' est donc formée de la droite AB et d'une courbe gauche de troisième ordre (cubique gauche).
Les équations (11) et (12) représentent deux coniques proprement dites γ_1, γ_2 situées dans les plans γ, δ et tangentes à la droite AB en des points différents A, B. La surface développable circonscrite aux quadriques Q, Q' est donc formée de la feuille de support AB et d'une surface développable de troisième classe.

8° **Septième cas:** *Les points doubles et les plans doubles correspondants de la collinéation sont le sommet A et la face opposée α du tétraèdre $ABCD$ ou $\alpha\beta\gamma\delta$, les points du plan α et*

les plans passant par le point A; les droites doubles sont les droites du plan α et les droites passant par le point A.

Le point A est le pôle du plan α pour les quadriques Q, Q' et toute droite passant par le point A a la même droite du plan α pour droite polaire par rapport aux deux quadriques. Celles-ci sont donc inscrites à un même cône du second degré proprement dit Γ_1 de sommet A, suivant la même conique proprement dite γ_1 située dans le plan α. On peut supposer la conique γ_1 circonscrite au triangle BCD et le cône Γ_1 circonscrit au trièdre $\beta\gamma\delta$. En prenant le tétraèdre ABCD ou $\alpha\beta\gamma\delta$ pour tétraèdre fondamental des coordonnées quaternaires, les équations ponctuelles et tangentielles des quadriques Q, Q' sont

(1) $a_{11}X_1^2+2a_{23}X_2X_3+2a_{24}X_2X_4+2a_{34}X_3X_4=0,\quad a'_{11}X_1^2+2a_{23}X_2X_3+2a_{24}X_2X_4+2a_{34}X_3X_4=0$

et

$$(2)\quad \begin{aligned} &2a_{23}a_{24}a_{34}\xi_1^2-a_{11}\left(a_{34}^2\xi_2^2+a_{24}^2\xi_3^2+a_{23}^2\xi_4^2-2a_{24}a_{34}\xi_2\xi_3-2a_{23}a_{34}\xi_2\xi_4-2a_{23}a_{24}\xi_3\xi_4\right)=0,\\ &2a_{23}a_{24}a_{34}\xi_1^2-a'_{11}\left(a_{34}^2\xi_2^2+a_{24}^2\xi_3^2+a_{23}^2\xi_4^2-2a_{24}a_{34}\xi_2\xi_3-2a_{23}a_{34}\xi_2\xi_4-2a_{23}a_{24}\xi_3\xi_4\right)=0,\end{aligned}$$

dont tous les coefficients sont différents de zéro.

Les équations entre les points homologues X, X' de la collinéation qui est le produit des deux polarités sont

(3) $a'_{11}X'_1=a_{11}X_1,\ a_{23}X'_3+a_{24}X'_4=a_{23}X_3+a_{24}X_4,\ a_{23}X'_2+a_{34}X'_4=a_{23}X_2+a_{34}X_4,\ a_{24}X'_2+a_{34}X'_3=a_{24}X_2+a_{34}X_3$

et les équations aux points doubles sont

(4) $(a_{11}-ka'_{11})X_1=0,\quad a_{23}(1-k)X_3+a_{24}(1-k)X_4=0,\ a_{23}(1-k)X_2+a_{34}(1-k)X_4=0,\ a_{24}(1-k)X_2+a_{34}(1-k)X_3=0$

dans lesquelles k doit être remplacé par les racines de l'équation

$$(5)\qquad (a_{11}-ka'_{11})(1-k)^3=0.$$

Cette équation doit avoir une racine simple et une racine triple, correspondant au point A et aux points du plan α; il faut donc qu'on ait

$$(6)\qquad a_{11}\neq a'_{11}\quad \text{et}\quad a_{11}a'_{11}a_{23}a_{24}a_{44}\neq 0.$$

Les équations

$$(7)\qquad (a_{11}-ka'_{11})X_1^2+2(1-k)(a_{23}X_2X_3+a_{24}X_2X_4+a_{34}X_3X_4)=0$$

et

$$(8)\quad 2a_{23}a_{24}a_{34}(1-k)\xi_1^2-(a_{11}-ka'_{11})\left(a_{34}^2\xi_2^2+a_{24}^2\xi_3^2+a_{23}^2\xi_4^2-2a_{24}a_{34}\xi_2\xi_3-2a_{23}a_{34}\xi_2\xi_4-2a_{23}a_{24}\xi_3\xi_4\right)=0$$

dans lesquelles k est un paramètre arbitraire, représentent les mêmes quadriques inscrites au cône du second degré Γ_1 suivant la conique γ_1. On dit que ces quadriques forment un faisceau à la fois ponctuel (7) et tangentiel (8). Les quadriques dégénérées de ce faisceau correspondent aux valeurs de k vérifiant l'équation (5). Les équations des quadriques dégénérées du faisceau considéré comme faisceau ponctuel sont

(9) X_1^2 et $a_{23}X_2X_3+a_{24}X_2X_4+a_{34}X_3X_4=0$

et les équations des quadriques dégénérées du faisceau considéré comme faisceau tangentiel sont

(10) $\xi_1^2=0$ et $a_{34}^2\xi_2^2+a_{24}^2\xi_3^2+a_{23}^2\xi_4^2-2a_{24}a_{34}\xi_2\xi_3-2a_{23}a_{34}\xi_2\xi_4-2a_{23}a_{24}\xi_3\xi_4=0.$

Les équations (9) représentent un système de deux plans confondus avec le plan α et le cône du second degré Γ_1; les équations (10) représentent un système de deux points confondus avec le point A et la conique γ_1. Cette conique est donc l'intersection des quadriques Q, Q' et le cône

du second degré Γ_1 est la surface développable circonscrite à ces quadriques.

9° Huitième cas: Les points doubles et les plans doubles correspondants de la collinéation sont le point A et la face opposée α, les points de l'arête BD et les plans passant par l'arête AB du tétraèdre ABCD ou $\alpha\beta\gamma\delta$; les droites doubles sont les droites du faisceau A dans le plan γ et les droites du faisceau B dans le plan α.

Les quadriques Q, Q' sont tangentes au point B au plan γ; les droites BA, BD sont des tangentes conjuguées, tout point de la droite BD a le même plan polaire par rapport aux deux quadriques et toute droite du faisceau A dans le plan γ a une droite du faisceau B dans le plan α pour droite polaire. On peut supposer que le plan δ est le plan polaire du point D pour les deux quadriques et que le point C est le conjugué harmonique du point B par rapport aux points F, G où les quadriques coupent la droite BC pour la seconde fois. En prenant le tétraèdre ABCD ou $\alpha\beta\gamma\delta$ comme tétraèdre fondamental des coordonnées quaternaires, les équations ponctuelles et tangentielles des quadriques Q, Q' sont

(1) $$a_{11}X_1^2 + a_{33}X_3^2 + a_{44}X_4^2 + 2a_{23}X_2X_3 = 0, \qquad a'_{11}X_1^2 - a_{33}X_3^2 + a_{44}X_4^2 + 2a_{23}X_2X_3 = 0$$

et

(2) $$\frac{1}{a_{11}}\xi_1^2 - \frac{a_{33}}{a_{23}^2}\xi_2^2 + \frac{1}{a_{44}}\xi_4^2 + \frac{2}{a_{23}}\xi_2\xi_3 = 0, \quad \frac{1}{a'_{11}}\xi_1^2 - \frac{a_{33}}{a_{23}^2}\xi_2^2 + \frac{1}{a_{44}}\xi_4^2 + \frac{2}{a_{23}}\xi_2\xi_3 = 0,$$

dont tous les coefficients sont différents de zéro.

Les équations entre les points homologues X, X' de la collinéation qui est le produit des deux polarités sont

(3) $$a'_{11}X'_1 = a_{11}X_1, \quad a_{23}X'_3 = a_{23}X_3, \quad -a_{33}X'_3 + a_{23}X'_2 = a_{33}X_3 + a_{23}X_2, \quad a_{44}X'_4 = a_{44}X_4$$

et les équations aux points doubles sont

(4) $$(a_{11} - ka'_{11})X_1 = 0, \quad a_{23}(1-k)X_3 = 0, \quad a_{33}(1+k)X_3 + a_{23}(1-k)X_2 = 0, \quad a_{44}(1-k)X_4 = 0,$$

dans lesquelles k doit être remplacé par les racines de l'équation

(5) $$(a_{11} - ka'_{11})(1-k)^3 = 0.$$

Cette équation devant avoir une racine simple et une racine triple correspondant au point A et aux points de la droite BD, il faut qu'on ait

(6) $$a_{11} \neq a'_{11} \quad \text{et} \quad a_{11}a'_{11}a_{23}a_{33}a_{44} \neq 0.$$

Les équations

(7) $$(a_{11} - ka'_{11})X_1^2 + a_{33}(1+k)X_3^2 + a_{44}(1-k)X_4^2 + 2a_{23}(1-k)X_2X_3 = 0$$

et

(8) $$\left(\frac{k}{a_{11}} - \frac{1}{a'_{11}}\right)\xi_1^2 - \frac{a_{33}}{a_{23}^2}(k+1)\xi_2^2 + \frac{1}{a_{44}}(k-1)\xi_4^2 + \frac{2}{a_{23}}(k-1)\xi_2\xi_3 = 0,$$

dans lesquelles k est un paramètre variable, représentent, la première une infinité de quadriques passant par l'intersection des quadriques Q, Q', la seconde, une infinité de quadriques inscrites à la surface développable circonscrite aux quadriques Q, Q'.

On dit que les quadriques représentées par l'équation (7) forment un faisceau ponctuel de quadriques et que celles représentées par l'équation (8) forment un faisceau tangentiel de quadriques. En annulant les discriminants de ces deux équations on trouve des équations équivalentes à l'équation (5). Chacun des deux faisceaux contient donc deux quadriques qui ne sont pas des quadriques proprement dites et qu'on appelle les quadriques dégénérées des deux faisceaux.

Les équations de ces quadriques dégénérées sont respectivement

(9) $$a_{33}\left(\frac{1}{a_{11}} + \frac{1}{a'_{11}}\right)X_3^2 + \left(\frac{1}{a_{11}} - \frac{1}{a'_{11}}\right)(a_{44}X_4^2 + 2a_{23}X_2X_3) = 0, \quad (a_{11} - a'_{11})X_1^2 + 2a_{33}X_3^2 = 0$$

et

$$(10)\quad \frac{a_{33}}{a_{23}^2}\left(\frac{1}{a_{11}}+\frac{1}{a'_{11}}\right)\xi_2^2+\left(\frac{1}{a_{11}}-\frac{1}{a'_{11}}\right)\left(\frac{1}{a_{44}}\xi_4^2+\frac{2}{a_{23}}\xi_2\xi_3\right)=0,\qquad \left(\frac{1}{a_{11}}-\frac{1}{a'_{11}}\right)\xi_1^2-\frac{2a_{33}}{a_{23}^2}\xi_2^2=0$$

La première des équations (9) représente un cône du second degré proprement dit Γ_1 ayant le point A comme sommet et tangent au plan γ suivant la droite AB et à un second plan passant par la droite AD suivant une droite du plan δ. L'autre équation (9) représente deux plans différents ϖ_1, ϖ_2 passant par la droite BD et formant un groupe harmonique avec les plans α, γ. L'intersection des quadriques Q, Q' est donc composée des coniques γ_1, γ_2, tangentes au point B à la droite BD, suivant lesquelles les plans ϖ_1, ϖ_2 coupent le cône du second degré Γ_1.

La première des équations (10) représente une conique proprement dite γ'_1 située dans le plan α et tangente à la droite BD au point B et à une seconde droite issue du point D en un point de la droite BC. L'autre équation (10) représente deux points différents P_1, P_2 de la droite AB et formant un groupe harmonique avec les points A, B. La surface développable circonscrite aux quadriques Q, Q' est donc composée des deux cônes du second degré Γ'_1, Γ'_2 projetant la conique γ'_1 des points P_1, P_2.

10° **Neuvième cas**: *Les points doubles et les plans doubles correspondants de la collinéation sont le sommet A et la face opposée α, le sommet B et la face adjacente γ du tétraèdre ABCD ou $\alpha\beta\gamma\delta$; les droites doubles sont les droites AB et BD ou $\alpha\gamma$.*

Les quadriques Q, Q' sont tangentes au point B au plan γ dans lequel les droites BA, BD sont des tangentes conjuguées. Le point B est le seul point du plan α ayant le même plan polaire par rapport aux deux quadriques; celles-ci coupent donc le plan α suivant des coniques ayant un contact du second ordre au point B sur la droite BD et on peut supposer que le point différent du point B commun à ces coniques est le point C. En prenant le tétraèdre ABCD ou $\alpha\beta\gamma\delta$ comme tétraèdre fondamental des coordonnées quaternaires, les équations ponctuelles et tangentielles des quadriques Q, Q' sont

$$(1)\quad a_{11}X_1^2+a_{44}X_4^2+2a_{23}X_2X_3+2a_{34}X_3X_4=0,\qquad a'_{11}X_1^2+a_{44}X_4^2+2a_{23}X_2X_3+2a'_{34}X_3X_4=0$$

et

$$(2)\quad \begin{aligned} &a_{23}^2a_{44}\xi_1^2+a_{11}(a_{34}^2\xi_2^2+a_{23}^2\xi_4^2+2a_{23}a_{44}\xi_2\xi_3-2a_{23}a_{34}\xi_2\xi_4)=0,\\ &a_{23}^2a_{44}\xi_1^2+a'_{11}(a'^2_{34}\xi_2^2+a_{23}^2\xi_4^2+2a_{23}a_{44}\xi_2\xi_3-2a_{23}a'_{34}\xi_2\xi_4)=0,\end{aligned}$$

dont tous les coefficients sont différents de zéro.

Les équations entre les points homologues X, X' de la collinéation qui est le produit des deux polarités sont

$$(3)\quad a'_{11}X'_1=a_{11}X_1,\ \ a_{23}X'_3=a_{23}X_3,\ \ a_{23}X'_2+a'_{34}X'_4=a_{23}X_2+a_{34}X_4,\ \ a_{44}X'_4+a'_{34}X'_3=a_{44}X_4+a_{34}X_3$$

et les équations aux points doubles sont

$$(4)\quad (a_{11}-ka'_{11})X_1=0,\ a_{23}(1-k)X_3=0,\ a_{23}(1-k)X_2+(a_{34}-ka'_{34})X_4=0,\ a_{44}(1-k)X_4+(a_{34}-ka'_{34})X_3=0,$$

dans lesquelles k doit être remplacé par les racines de l'équation

$$(5)\quad (a_{11}-ka'_{11})(1-k)^3=0.$$

Cette équation devant avoir une racine simple et une racine triple correspondant au point A et au point B, il faut qu'on ait

$$(6)\quad a_{11}\neq a'_{11},\qquad a_{34}\neq a'_{34},\qquad a_{11}a'_{11}a_{34}a'_{34}a_{23}a_{44}\neq 0.$$

Les équations

$$(7)\quad (a_{11}-ka'_{11})X_1^2+(1-k)(a_{44}X_4^2+2a_{23}X_2X_3)+2(a_{34}-ka'_{34})X_3X_4=0$$

et

$$(8)\quad a_{23}^2a_{44}(1-k)\xi_1^2+(a_{11}-ka'_{11})(a_{23}^2\xi_4^2+2a_{23}a_{44}\xi_2\xi_3)+(a_{11}a_{34}^2-ka'_{11}a'^2_{34})\xi_2^2-2a_{23}(a_{11}a_{34}-ka'_{11}a'_{34})\xi_2\xi_4=0$$

dans lesquelles k est un paramètre arbitraire, représentent, la première, une infinité de quadriques passant par l'intersection des quadriques Q, Q'. la seconde, une infinité de quadriques inscrites à la surface développable circonscrite aux quadriques Q, Q'.
On dit que les quadriques représentées par l'équation (7) forment un faisceau ponctuel de quadriques et que celles représentées par l'équation (8) forment un faisceau tangentiel de quadriques. En annulant les discriminants de ces équations, on obtient deux équations équivalentes à l'équation (5). Chacun des deux faisceaux contient donc deux quadriques qui ne sont pas des quadriques proprement dites et qu'on appelle les quadriques dégénérées des deux faisceaux. Les équations des quadriques dégénérées du faisceau (7) sont

(9) $\left(\frac{1}{a_{11}}-\frac{1}{a'_{11}}\right)\left(a_{44}X_4^2+2a_{23}X_2X_3\right)+2\left(\frac{a_{34}}{a_{11}}-\frac{a'_{34}}{a'_{11}}\right)X_3X_4=0,\quad \left(a_{11}-a'_{11}\right)X_1^2+2\left(a_{34}-a'_{34}\right)X_3X_4=0$ (10)

et celles des quadriques dégénérées du faisceau tangentiel sont

(11) $$a_{23}^2\,a_{44}\left(\frac{1}{a_{11}}-\frac{1}{a'_{11}}\right)\xi_1^2+\left(a_{34}^2-a'^2_{34}\right)\xi_2^2-2\,a_{23}\left(a_{34}-a'_{34}\right)\xi_2\xi_4=0$$

(12) $\left(a_{11}-a'_{11}\right)\left(a_{23}^2\xi_4^2+2a_{23}a_{44}\xi_2\xi_3\right)+\left(a_{11}a_{34}^2-a'_{11}a'^2_{34}\right)\xi_2^2-2a_{23}\left(a_{11}a_{34}-a'_{11}a'_{34}\right)\xi_2\xi_4=0.$

Les équations (9) et (10) représentent deux cônes du second degré proprement dits Γ_1, Γ_2; Le cône Γ_1 a pour sommet le point A et il coupe le plan α suivant une conique passant par le point C et tangente à la droite BD au point B; le cône Γ_2 a le point B pour sommet et il coupe le plan β suivant une conique tangente aux droites AC, AD aux points C et D. L'intersection des quadriques Q, Q' est donc une courbe gauche de quatrième ordre non décomposable en courbes d'ordres moins élevés.
Les équations (11) et (12) représentent deux coniques proprement dites γ_1, γ_2; la conique γ_1 est située dans le plan γ et elle est tangente à la droite AB au point B; la conique γ_2 est située dans le plan α et elle est tangente au point B à la droite BD. La développable circonscrite aux quadriques Q, Q' est une surface développable de la quatrième classe non décomposable en surfaces de classes moins élevées.

11° Dixième cas: *Les points et les plans doubles correspondants de la collinéation sont les points de la face β et les plans passant par le sommet A du tétraèdre ABCD ou $\alpha\beta\gamma\delta$; les droites doubles sont les droites du plan β et les droites passant par le point A.*
Les quadriques ont deux génératrices rectilignes communes passant par le point A dans le plan β et elles sont tangentes l'une à l'autre en chaque point des deux droites. On peut donc supposer qu'elles sont tangentes aux plans γ, δ aux points D, C et qu'elles coupent la droite AB pour la seconde fois en des points F, G formant un groupe harmonique avec les points A, B. En prenant le tétraèdre ABCD ou $\alpha\beta\gamma\delta$ comme tétraèdre fondamental des coordonnées quaternaires, les équations ponctuelles et tangentielles des quadriques Q, Q' sont

(1) $a_{22}X_2^2+2a_{12}X_1X_2+2a_{34}X_3X_4=0,\qquad a_{22}X_2^2-2a_{12}X_1X_2-2a_{34}X_3X_4=0$
et
(2) $\frac{a_{22}}{a_{12}^2}\xi_1^2-\frac{2}{a_{12}}\xi_1\xi_2-\frac{2}{a_{24}}\xi_3\xi_4=0,\qquad \frac{a_{22}}{a_{12}^2}\xi_1^2+\frac{2}{a_{12}}\xi_1\xi_2+\frac{2}{a_{24}}\xi_3\xi_4=0,$

dont tous les coefficients sont différents de zéro.
Les équations entre les points homologues de la collinéation qui est le produit des deux polarités sont

(3) $-a_{12}X'_2=a_{12}X_2,\quad a_{22}X'_2-a_{12}X'_1=a_{22}X_2+a_{12}X_1,\quad -a_{34}X'_4=a_{34}X_4,\quad -a_{34}X'_3=a_{34}X_3$

et les équations aux points doubles sont

(4) $a_{12}(1+k)X_2=0,\quad a_{22}(1-k)X_2+a_{12}(1+k)X_1=0,\quad a_{34}(1+k)X_4=0,\quad a_{34}(1+k)X_3=0$

dans lesquelles il faut remplacer k par la racine de l'équation

(5) $$(1+k)^4=0.$$

Cette équation devant avoir une racine quadruple correspondant aux points du plan β, il faut qu'on ait

(6) $$a_{12}\neq 0,\qquad a_{22}\neq 0\qquad a_{34}\neq 0.$$

Les équations

(7) $$a_{22}(1-k)X_2^2+2(1+k)(a_{12}X_1X_2+a_{34}X_3X_4)=0$$

et

(8) $$\frac{a_{22}}{a_{12}^2}(1-k)\xi_1^2-2(1+k)\left(\frac{1}{a_{12}}\xi_1\xi_2+\frac{1}{a_{34}}\xi_3\xi_4\right)=0,$$

dans lesquelles k est un paramètre arbitraire, représentent les mêmes quadriques et on dit que ces quadriques forment un faisceau à la fois ponctuel (7) et tangentiel (8). La seule quadrique dégénérée du faisceau considéré comme un faisceau ponctuel est formée de deux plans confondus avec le plan β, et la seule quadrique dégénérée du faisceau considéré comme un faisceau tangentiel est formé de deux points confondus avec le point A. L'intersection des quadriques Q, Q' se réduit au système des deux droites AC, AD et la développable circonscrite se réduit à l'ensemble des plans passant par les mêmes droites

12° Onzième cas: Les points et les plans doubles correspondants de la collinéation sont les points de l'arête AC et les plans passant par la même arête du tétraèdre ABCD ou $\alpha\beta\gamma\delta$; chaque point double est le support d'un faisceau de droites doubles contenues dans un plan double avec la condition que le point et le plan doubles ainsi associés engendrent une ponctuelle et une feuillée projectives ayant la droite AC pour support commun. Les quadriques Q, Q' sont tangentes l'une à l'autre en chaque point de la génératrice rectiligne commune AC, et en deux points de cette droite, les secondes génératrices rectilignes sont les mêmes. On peut supposer que ces deux points sont les points A, C et que les secondes génératrices rectilignes communes en ces points sont les droites AB, CD. En prenant le tétraèdre ABCD ou $\alpha\beta\gamma\delta$ pour tétraèdre fondamental des coordonnées quaternaires, les équations ponctuelles et tangentielles des quadriques Q, Q' sont

(1) $$2a_{14}X_1X_4+2a_{23}X_2X_3+2a_{24}X_2X_4=0,\qquad 2a_{14}X_1X_4+2a_{23}X_2X_3+2a'_{24}X_2X_4=0$$

et

(2) $$2a_{14}\xi_2\xi_3+2a_{23}\xi_1\xi_4-2a_{24}\xi_1\xi_3=0,\qquad 2a_{14}\xi_2\xi_3+2a_{23}\xi_1\xi_4-2a'_{24}\xi_1\xi_3=0,$$

dont tous les coefficients sont différents de zéro.

Les équations entre les points homologues X, X' de la collinéation produit des deux polarités sont

(3) $$a_{14}X'_4=a_{14}X_4,\quad a_{23}X'_3+a'_{24}X'_4=a_{23}X_3+a_{24}X_4,\quad a_{23}X'_2=a_{23}X_2,\quad a_{14}X'_1+a'_{24}X'_2=a_{14}X_1+a_{24}X_2$$

et les équations aux points doubles sont

(4) $$a_{14}(1-k)X_4=0,\quad a_{23}(1-k)X_3+(a_{24}-ka'_{24})X_4=0,\quad a_{23}(1-k)X_2=0,\quad a_{14}(1-k)X_1+(a_{24}-ka'_{24})X_2=0,$$

dans lesquelles k doit être remplacé par la racine de l'équation

(5) $$(1-k)^4=0.$$

Cette équation devant avoir une racine quadruple correspondant aux points de la droite AC, il faut qu'on ait

(6) $$a_{24}\neq a'_{24},\qquad a_{14}\neq 0,\qquad a_{23}\neq 0.$$

Les équations

(7) $$2(1-k)(a_{14}X_1X_4+a_{23}X_2X_3)+2(a_{24}-ka'_{24})X_2X_4=0,$$

et

(8) $$2(1-k)(a_{14}\xi_2\xi_3+a_{23}\xi_1\xi_4)-2(a_{24}-k\,a'_{24})\xi_1\xi_3=0,$$

dans lesquelles k est un paramètre arbitraire, représentent les mêmes quadriques et on dit que ces quadriques forment un faisceau à la fois ponctuel (7) et tangentiel (8). La seule quadrique dégénérée du faisceau considéré comme faisceau ponctuel se réduit au système des plans β, δ, et la seule quadrique du faisceau considéré comme faisceau tangentiel se réduit au système des points A, C. L'intersection des quadriques Q, Q' est donc formée des droites AC, AB, CD, et la développable circonscrite est formée des plans passant par l'une ou l'autre de ces droites.

13° Douzième cas: *Les points et les plans doubles correspondants de la collinéation sont les points de l'arête AC et les plans passant par l'arête AD du tétraèdre ABCD ou $\alpha\beta\gamma\delta$; les droites doubles sont les droites du faisceau A dans le plan β.*

Les quadriques Q, Q' ont deux génératrices rectilignes communes d, g passant par le point A dans le plan β et formant un groupe harmonique avec les droites AC, AD. Comme les deux quadriques ne sont tangentes l'une à l'autre qu'au point A, on peut supposer qu'elles passent toutes les deux par le point B et, en prenant le tétraèdre ABCD ou $\alpha\beta\gamma\delta$ pour tétraèdre fondamental des coordonnées quaternaires, les équations ponctuelles et tangentielles des quadriques Q, Q' sont

(1) $$\begin{aligned}&a_{33}X_3^2+a_{44}X_4^2+2a_{12}X_1X_2+2a_{23}X_2X_3+2a_{24}X_2X_4=0,\\&a_{33}X_3^2+a_{44}X_4^2+2a_{12}X_1X_2+2a_{23}X_2X_3+2a'_{24}X_2X_4=0\end{aligned}$$

et

(2) $$\begin{aligned}&(a_{33}a_{24}^2+a_{44}a_{23}^2)\xi_1^2+a_{12}^2(a_{44}\xi_3^2+a_{33}\xi_4^2)+2a_{12}\xi_1(a_{33}a_{44}\xi_2-a_{23}a_{44}\xi_3-a_{33}a_{24}\xi_4)=0,\\&(a_{33}a'^2_{24}+a_{44}a_{23}^2)\xi_1^2+a_{12}^2(a_{44}\xi_3^2+a_{33}\xi_4^2)+2a_{12}\xi_1(a_{33}a_{44}\xi_2-a_{23}a_{44}\xi_3-a_{33}a'_{24}\xi_4)=0\end{aligned}$$

dont tous les coefficients sont différents de zéro.

Les équations entre les points homologues X, X' de la collinéation qui est le produit des deux polarités sont

(3) $$\begin{aligned}&a_{12}X'_2=a_{12}X_2, \qquad a_{12}X'_1+a_{23}X'_3+a'_{24}X'_4=a_{12}X_1+a_{23}X_3+a_{24}X_4;\\&a_{33}X'_3+a_{23}X'_2=a_{33}X_3+a_{23}X_2, \qquad a_{44}X'_4+a'_{24}X'_2=a_{44}X_4+a_{24}X_2,\end{aligned}$$

et les équations aux points doubles sont

(4) $$\begin{aligned}&a_{12}(1-k)X_2=0, \qquad a_{12}(1-k)X_1+a_{23}(1-k)X_3+(a_{24}-k\,a'_{24})X_4=0,\\&a_{33}(1-k)X_3+a_{23}(1-k)X_2=0, \qquad a_{44}(1-k)X_4+(a_{24}-k\,a'_{24})X_2=0,\end{aligned}$$

dans lesquelles k doit être remplacé par la racine de l'équation

(5) $$(1-k)^4=0.$$

Cette équation devant avoir une racine quadruple correspondant aux points de la droite AC, il faut qu'on ait

(6) $$a_{24}\neq a'_{24} \qquad \text{et} \qquad a_{33}a_{44}a_{12}a_{23}a_{24}a'_{24}\neq 0.$$

Les équations

(7) $$(1-k)(a_{33}X_3^2+a_{44}X_4^2+2a_{12}X_1X_2+2a_{23}X_2X_3)+2(a_{24}-k\,a'_{24})X_2X_4=0$$

et

(8) $$(1-k)\{a_{44}a_{23}^2\xi_1^2+a_{12}^2(a_{44}\xi_3^2+a_{33}\xi_4^2)+2a_{12}a_{44}\xi_1(a_{33}\xi_2-a_{23}\xi_3)\}+a_{33}\{(a_{24}^2-k\,a'^2_{24})\xi_1^2-2a_{12}(a_{24}-k\,a'_{24})\xi_1\xi_4\}=0,$$

dans lesquelles k est un paramètre arbitraire, représentent, la première, une infinité de quadriques passant par l'intersection des quadriques Q, Q', la seconde, une infinité de quadriques inscrites à la surface

développable circonscrite aux deux quadriques.
On dit que les quadriques représentées par l'équation (7) forment un faisceau ponctuel de quadriques et que celles représentées par l'équation (8) forment un faisceau tangentiel de quadriques. Les quadriques dégénérées de ces faisceaux sont respectivement une quadrique réduite au système des plans β, δ et une quadrique réduite à un système de deux points, le point A et un point P différent du point A sur la droite AD. L'intersection des quadriques Q, Q' est donc formée des droites d, g et d'une conique proprement dite γ_1 située dans le plan δ et tangente à la droite AC au point A; et la développable circonscrite est formée des plans passant par l'une ou l'autre des droites d, g et des plans tangents à un cône du second degré proprement dit ayant le point P pour sommet.

14° Treizième cas: *Le sommet A, la face adjacente β et l'arête AC du tétraèdre ABCD ou $\alpha\beta\gamma\delta$ sont les seuls éléments doubles de la collinéation.*

La droite AC est une génératrice rectiligne commune aux deux quadriques Q, Q' et celles-ci sont tangentes au plan β au point A. On peut en outre supposer qu'elles passent toutes deux par le point B et que si g, g' sont les secondes génératrices rectilignes contenues dans le plan β, les droites AC, AD, g, g' forment un groupe harmonique. En prenant le tétraèdre ABCD ou $\alpha\beta\gamma\delta$ pour tétraèdre fondamental des coordonnées quaternaires, les équations ponctuelles des quadriques Q, Q' sont

$$(1)\qquad \begin{aligned} &a_{44}X_4^2+2a_{12}X_1X_2+2a_{23}X_2X_3+2a_{24}X_2X_4+2a_{34}X_3X_4=0,\\ &a_{44}X_4^2+2a'_{12}X_1X_2+2a'_{23}X_2X_3+2a'_{24}X_2X_4-2a_{34}X_3X_4=0 \end{aligned}$$

avec

$$(2)\qquad a_{44}\neq 0,\qquad a_{12}a_{34}\neq 0\qquad \text{et}\qquad a'_{12}a_{34}\neq 0,$$

puisque les quadriques sont des quadriques proprement dites ne passant pas par le point D.
Les équations entre les points homologues X, X' de la collinéation qui est le produit des deux polarités sont

$$(3)\qquad \begin{aligned} &a'_{12}X'_2=a_{12}X_2,\qquad a'_{12}X'_1+a'_{23}X'_3+a'_{24}X'_4=a_{12}X_1+a_{23}X_3+a_{24}X_4,\\ &a'_{23}X'_2-a_{34}X'_4=a_{23}X_2+a_{34}X_4,\ a'_{24}X'_2-a_{34}X'_3+a_{44}X'_4=a_{24}X_2+a_{34}X_3+a_{44}X_4 \end{aligned}$$

et les équations aux points doubles sont

$$(4)\qquad \begin{aligned} &(a_{12}-ka'_{12})X_2=0\quad (a_{12}-ka'_{12})X_1+(a_{23}-ka'_{23})X_3+(a_{24}-ka'_{24})X_4=0,\\ &(a_{23}-ka'_{23})X_2+a_{34}(1+k)X_4=0,\ (a_{24}-ka'_{24})X_2+a_{34}(1+k)X_3+a_{44}(1-k)X_4=0, \end{aligned}$$

dans lesquelles k doit être remplacé par les racines de l'équation

$$(5)\qquad (a_{12}-ka'_{12})^2(1+k)^2=0.$$

Cette équation devant avoir une racine quadruple correspondant au point A, il faut qu'on ait

$$(6)\qquad a'_{12}=-a_{12}\neq 0,\qquad a_{23}+a'_{23}\neq 0,\qquad a_{44}\neq 0,$$

et ainsi les équations ponctuelles (1) des quadriques Q, Q' deviennent

$$(7)\qquad \begin{aligned} &a_{44}X_4^2+2a_{12}X_1X_2+2a_{23}X_2X_3+2a_{24}X_2X_4+2a_{34}X_3X_4=0,\\ &a_{44}X_4^2-2a_{12}X_1X_2+2a'_{23}X_2X_3+2a'_{24}X_2X_4-2a_{34}X_3X_4=0. \end{aligned}$$

En additionnant ces équations membre à membre, on obtient l'équation

$$(8)\qquad a_{44}X_4^2+(a_{23}+a'_{23})X_2X_3+(a_{24}+a'_{24})X_2X_4=0$$

d'un cône du second degré proprement dit Γ_1 tangent au plan β suivant la génératrice rectiligne AC et tangent suivant la génératrice rectiligne AB au plan

(9) $$\varpi \equiv (a_{23}+a'_{23})X_3+(a_{24}+a'_{24})X_4=0.$$

On peut supposer que ce plan ϖ est le second plan tangent au cône Γ_1 par la droite AD ou le plan γ, ce qui donne

(10) $$a'_{24}=-a_{24}.$$

En tenant compte de cette condition et en retranchant membre à membre les équations (7), on obtient l'équation

(11) $$2a_{12}X_1X_2+(a_{23}-a'_{23})X_2X_3+2a_{24}X_2X_4+2a_{34}X_3X_4=0$$

qui représente une quadrique proprement dite dont les droites AC, AD sont deux génératrices rectilignes; deux autres génératrices rectilignes issues du point B sont situées dans les plans γ, δ et on peut supposer qu'elles coïncident avec les droites BC, BD; cela donne

(12) $$a_{23}=a'_{23} \quad \text{et} \quad a_{24}=0.$$

De cette manière, les équations ponctuelles (7) des quadriques Q, Q' se réduisent à

(13) $$a_{44}X_4^2+2a_{12}X_1X_2+2a_{23}X_2X_3+2a_{34}X_3X_4=0, \quad a_{44}X_4^2-2a_{12}X_1X_2+2a_{23}X_2X_3-2a_{34}X_3X_4=0.$$

Les équations tangentielles correspondantes sont

(14) $$\begin{aligned}&a_{44}a_{23}^2\xi_1^2+a_{12}^2(a_{44}\xi_3-2a_{34}\xi_4)\xi_3-2a_{12}(a_{34}^2\xi_2+a_{23}a_{44}\xi_3-a_{23}a_{34}\xi_4)\xi_1=0,\\ &a_{44}a_{23}^2\xi_1^2+a_{12}^2(a_{44}\xi_3+2a_{34}\xi_4)\xi_3+2a_{12}(a_{34}^2\xi_2+a_{23}a_{44}\xi_3+a_{23}a_{34}\xi_4)\xi_1=0.\end{aligned}$$

Les équations

(15) $$(1-k)(a_{44}X_4^2+2a_{23}X_2X_3)+2(1+k)(a_{12}X_1X_2+a_{34}X_3X_4)=0$$

et

(16) $$(1-k)\{a_{44}a_{23}^2\xi_1^2+a_{12}^2a_{44}\xi_3^2+2a_{12}a_{34}a_{23}\xi_1\xi_4\}+(1+k)\{-2a_{34}\xi_3\xi_4-2a_{12}\xi_1\xi_2-2a_{12}a_{23}a_{44}\xi_1\xi_3\}=0,$$

dans lesquelles k est un paramètre arbitraire, représentant, la première une infinité de quadriques passant par l'intersection des quadriques Q, Q', la seconde, une infinité de quadriques inscrites à la développable circonscrite aux quadriques Q, Q'.

On dit que les quadriques représentées par l'équation (15) forment un faisceau ponctuel et que celles représentées par l'équation (16) forment un faisceau tangentiel. Les seules quadriques dégénérées des deux faisceaux sont le cône du second degré proprement dit

(17) $$\Gamma_1 \equiv a_{44}X_4^2+2a_{23}X_2X_4=0$$

et la conique proprement dite

(18) $$\gamma_1 \equiv a_{44}a_{23}^2\xi_1^2+a_{12}^2a_{44}\xi_3^2+2a_{12}a_{34}a_{23}\xi_1\xi_4=0.$$

Le cône Γ_1 est celui qu'on a déjà trouvé plus haut; l'intersection des quadriques Q, Q' est donc formée de la droite AC et d'une cubique gauche.

La conique γ_1 est dans le plan β et est tangente au point A à la droite AC; la développable circonscrite aux quadriques Q, Q' est donc formée de la feuillée ayant la droite AC pour support et d'une surface développable de la troisième classe.

Chapitre II: Congruences de droites.

A. – Congruences linéaires considérées comme supports de faisceaux de complexes linéaires. –

57. – 1° Congruence linéaire des droites doubles d'un espace involutif gauche. – Cette congruence linéaire est formée des droites qui s'appuient sur deux droites gauches s, t appelées les directrices de la congruence linéaire et de l'espace involutif gauche. En choisissant le tétraèdre de référence pour que les équations entre

les coordonnées des points conjugués de l'espace involutif gauche soient

(1) $$X'_1 = a X_2, \quad X'_2 = b X_1, \quad X'_3 = ab X_4, \quad X'_4 = X_3,$$

les droites doubles sont les droites dont les coordonnées ponctuelles vérifient les deux équations

(2) $$X_{13} - a X_{24} = 0, \quad X_{23} + b X_{14} = 0$$

et elles appartiennent à tous les complexes linéaires représentés par l'équation

(3) $$\lambda_1 (X_{13} - a X_{24}) + \lambda_2 (X_{23} + b X_{14}) = 0$$

lorsque le rapport des paramètres λ_1, λ_2 varie arbitrairement pourvu que l'un au moins des deux paramètres ne soit pas nul. On dit que l'ensemble de ces complexes linéaires est un faisceau de complexes linéaires et qu'il a la congruence linéaire considérée pour support. En donnant à λ_1 et λ_2 des valeurs vérifiant l'équation

(4) $$\lambda_1^2 a - \lambda_2^2 b = 0,$$

on obtient les complexes linéaires spéciaux ayant les droites s, t pour axes et formés ainsi des droites s'appuyant respectivement sur la droite s ou sur la droite t.

2° Définition générale des congruences linéaires. — 1) Par généralisation, on donne le nom de congruence linéaire à tout ensemble de droites communes à deux complexes linéaires distincts pris arbitrairement. On dit que les deux complexes linéaires passent par la congruence linéaire et que celle-ci est leur intersection. Si

(5) $$A = 0 \quad \text{ou} \quad A_{34}X_{12} + A_{42}X_{13} + A_{23}X_{14} + A_{12}X_{34} + A_{13}X_{42} + A_{14}X_{23} = 0 \quad \text{ou} \quad \Sigma A_{ij} X_{kl} = 0,$$

(6) $$B = 0 \quad \text{ou} \quad B_{34}X_{12} + B_{42}X_{13} + B_{23}X_{14} + B_{12}X_{34} + B_{13}X_{42} + B_{14}X_{23} = 0 \quad \text{ou} \quad \Sigma B_{ij} X_{kl} = 0$$

sont les équations ponctuelles de deux complexes linéaires, les complexes linéaires A, B, les droites de la congruence linéaire C_1 ou AB formant l'intersection de ces complexes linéaires, appartiennent à tous les complexes linéaires représentés par l'équation

(7) $$\lambda_1 A + \lambda_2 B = 0 \quad \text{ou} \quad \Sigma (\lambda_1 A_{ij} + \lambda_2 B_{ij}) X_{kl} = 0,$$

lorsque le rapport $\lambda_1 : \lambda_2$ des paramètres λ_1, λ_2 varie arbitrairement, l'un au moins des deux paramètres n'étant pas nul. On dit que ces complexes linéaires passent par la congruence linéaire C_1 et que leur ensemble est le faisceau de complexes linéaires ayant la congruence linéaire C_1 pour support.

2) Les complexes linéaires correspondant à des valeurs inégales $\lambda'_1 : \lambda'_2$, $\lambda''_1 : \lambda''_2$ du rapport $\lambda_1 : \lambda_2$ sont différents l'un de l'autre ; en effet, s'ils étaient confondus, on aurait

(8) $$(\lambda'_1 A_{ij} + \lambda'_2 B_{ij}) : (\lambda''_1 A_{ij} + \lambda''_2 B_{ij}) = (\lambda'_1 A_{rs} + \lambda'_2 B_{rs}) : (\lambda''_1 A_{rs} + \lambda''_2 B_{rs}),$$

pour tous les arrangements deux à deux ij, rs des indices $1, 2, 3, 4$; $\lambda'_1 : \lambda'_2$ étant différent de $\lambda''_1 : \lambda''_2$, on en déduirait

(9) $$A_{ij} : B_{ij} = A_{rs} : B_{rs}$$

et les complexes linéaires A, B ne seraient pas différents l'un de l'autre, ce qui est contraire à l'hypothèse.

3) On pose

(10) $$\alpha_{ij} = \lambda'_1 A_{ij} + \lambda'_2 B_{ij}, \quad \beta_{ij} = \lambda''_1 A_{ij} + \lambda''_2 B_{ij}$$

et on appelle α, β les complexes linéaires correspondant ainsi aux valeurs λ'_1 et λ'_2, λ''_1 et λ''_2 des paramètres λ_1, λ_2 ; ayant

(11) $$\lambda'_1 : \lambda'_2 \neq \lambda''_1 : \lambda''_2,$$

les équations (10) donnent

(12) $$A_{ij} : \begin{vmatrix} \alpha_{ij} & \lambda'_2 \\ \beta_{ij} & \lambda''_2 \end{vmatrix} = B_{ij} : \begin{vmatrix} \lambda'_1 & \alpha_{ij} \\ \lambda''_1 & \beta_{ij} \end{vmatrix} = 1 : \begin{vmatrix} \lambda'_1 & \lambda'_2 \\ \lambda''_1 & \lambda''_2 \end{vmatrix}$$

et l'équation (7) prend la forme

(13) $$\Sigma (\mu_1 \alpha_{ij} + \mu_2 \beta_{ij}) X_{kl} = 0 \quad \text{ou} \quad \mu_1 \alpha + \mu_2 \beta = 0;$$

μ_1 et μ_2 sont de nouveaux paramètres liés aux paramètres λ_1, λ_2 par la relation bilinéaire, à module différent de zéro,

(14) $$\lambda'_2 \lambda_1 \mu_1 + \lambda''_2 \lambda_1 \mu_2 - \lambda'_1 \lambda_2 \mu_1 - \lambda''_1 \lambda_2 \mu_2 = 0;$$

l'équation (13) est donc équivalente à l'équation (7). La congruence linéaire support d'un faisceau de complexes linéaires et, par suite, le faisceau lui-même sont donc déterminés par deux complexes linéaires quelconques du faisceau, et on peut dire qu'une congruence linéaire est l'intersection de deux quelconques des complexes linéaires du faisceau dont elle est le support.

4) Une forme réglée dont les droites sont des droites d'une congruence linéaire est dite appartenir à la congruence linéaire et on dit aussi que celle-ci passe par la forme considérée et qu'elle la contient.

5) Une droite qui n'appartient pas à une congruence linéaire est dite extérieure à la congruence linéaire.

6) Théorème. *Une droite extérieure à une congruence linéaire n'appartient qu'à un seul des complexes linéaires du faisceau ayant cette congruence linéaire pour support et elle le détermine.*

En effet, si on exprime que les coordonnées ponctuelles d'une droite extérieure à la congruence linéaire G_1 support du faisceau des complexes linéaires représentés par l'équation (7), vérifient cette équation, celle-ci ne se réduit pas à une identité et ne fournit qu'une seule valeur du rapport $\lambda_1 : \lambda_2$ des paramètres λ_1, λ_2.

7) Théorème. *Si deux droites concourantes et, par suite, situées dans un même plan appartiennent à une congruence linéaire, il en est de même de toutes les droites du faisceau du premier degré dont elles sont deux rayons.*

En effet, le point où les deux droites se coupent est le foyer du plan dans lequel elles se trouvent pour tous les complexes linéaires du faisceau ayant la congruence linéaire considérée pour support; toutes les droites du faisceau du premier degré dont elles sont deux rayons appartiennent donc à tous ces complexes linéaires et, par suite, aussi à la congruence linéaire.

2° Classification des congruences linéaires. – 1) Les complexes linéaires spéciaux du faisceau (7) correspondent aux valeurs de λ_1 et λ_2 vérifiant l'équation de condition

(15) $$\Sigma' (\lambda_1 A_{ij} + \lambda_2 B_{ij})(\lambda_1 A_{kl} + \lambda_2 B_{kl}) = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda_1^2 \Sigma' A_{ij} A_{kl} + \lambda_1 \lambda_2 \Sigma A_{ij} B_{kl} + \lambda_2^2 \Sigma' B_{ij} B_{kl} = 0,$$

les sommes Σ' étant à trois termes et les sommes Σ à six termes. Il y a trois cas à distinguer selon que cette équation du second degré en $\lambda_1 : \lambda_2$ a deux racines inégales, a une racine double, ou se réduit à une identité, et la congruence linéaire est dite du premier, du second, ou du troisième genre.

N.B. Pour la commodité du langage, une congruence linéaire sera représentée par l'une des notations G'_1, G''_1, G'''_1 suivant qu'elle sera du premier, du second, ou du troisième genre.

2) Théorème. *Toute projectivité établie entre deux espaces à trois dimensions transforme toute congruence linéaire de l'un des espaces en une congruence linéaire du même genre dans*

l'autre espace.
Cela provient de ce que les équations de formes homologues dans deux espaces projectifs sont les mêmes, si on rapporte les deux espaces à des coordonnées quaternaires dont les éléments fondamentaux se correspondent dans les deux espaces.

58. Congruence linéaire du premier genre (G'_1). – 1° Identité de la congruence linéaire du premier genre et de la congruence linéaire des droites doubles d'un espace involutif gauche. – 1) Lorsque les valeurs de $\lambda_1 : \lambda_2$ vérifiant l'équation (15) sont distinctes, il en est de même des complexes linéaires qui leur correspondent; ces deux complexes linéaires sont les seuls complexes linéaires spéciaux du faisceau; on peut supposer qu'ils coïncident avec les complexes linéaires A, B; de cette manière, les solutions de l'équation (15) sont

(16) $$\lambda_1 = 1 \text{ avec } \lambda_2 = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_1 = 0 \text{ avec } \lambda_2 = 1;$$

on a les conditions

(17) $$\Sigma' A_{ij} A_{kl} = 0, \qquad \Sigma A_{ij} B_{kl} \neq 0, \qquad \Sigma' B_{ij} B_{kl} = 0$$

dont la seconde exprime que les axes a, b des complexes linéaires A, B sont gauches.

2) Les droites a, b s'appellent les directrices de la congruence linéaire considérée G'_1 et, si celle-ci est réelle, elle est dite elliptique ou hyperbolique, selon que ses directrices a, b sont des droites imaginaires conjuguées ou des droites réelles.

3) La congruence linéaire G'_1 étant formée des droites communes à deux quelconques des complexes linéaires du faisceau dont elle est le support, est, en particulier, formée des droites communes aux complexes linéaires spéciaux A, B ou des droites rencontrant, à la fois, les deux droites a, b; elle se confond donc avec la congruence linéaire des droites doubles de l'espace involutif gauche déterminé par la condition d'avoir les droites a, b pour directrices. Certaines des propriétés qui suivent sont déjà connues, mais les démonstrations ont changé et il aura été utile de rappeler ces propriétés pour l'emploi qu'on en aura fait dans l'étude des propriétés nouvelles.

2° Extension de la notion de projectivité au faisceau de complexes linéaires ayant pour support la congruence linéaire du premier genre G'_1 et considérée comme une forme de première espèce. – 1) On peut supposer les droites a, b confondues avec les arêtes AB, CD du tétraèdre de référence ABCD; leurs coordonnées ponctuelles sont ainsi

(18) $$A_{12}=1,\ A_{13}=0,\ A_{14}=0,\ A_{34}=0,\ A_{42}=0,\ A_{23}=0, \qquad B_{12}=0, B_{13}=0, B_{14}=0, B_{34}=1, B_{42}=0, B_{23}=0$$

et l'équation (7) se réduit à

(19) $$\lambda_1 X_{34} + \lambda_2 X_{12} = 0.$$

En coordonnées courantes Y_i, l'équation

(20) $$\lambda_1 (X_3 Y_4 - X_4 Y_3) + \lambda_2 (X_1 Y_2 - X_2 Y_1) = 0$$

représente les plans focaux du point X (X_1, X_2, X_3, X_4) dans les complexes linéaires (19). En particulier, les équations

(21) $$X_3 Y_4 - X_4 Y_3 = 0, \qquad X_1 Y_2 - X_2 Y_1 = 0$$

représentent les plans focaux du point X dans les complexes linéaires spéciaux A, B; le premier de ces deux plans est le plan aX ou est indéterminé, selon que le point X n'est pas ou est sur la droite a; le second plan est le plan bX ou est indéterminé, selon que le point X n'est pas ou est sur la droite b.
Lorsque le point X est sur la droite a, l'équation (20) se réduit à

(22) $$\lambda_2 (X_1 Y_2 - X_2 Y_1) = 0$$

et le point X a le même plan focal, le plan bX, pour tous les complexes linéaires du faisceau

différents du complexe linéaire spécial A pour lequel $\lambda_2=0$; les droites de la congruence linéaire $\mathcal{C}'_1$ qui passent par le point X sont les droites du faisceau du premier degré ayant ce point pour support dans le plan bX. Une propriété analogue existe dans le plan aX, lorsque le point X est sur la droite b; à cause de cela, les points des droites a, b et les plans passant par l'une ou l'autre de ces droites sont appelés les points singuliers et les plans singuliers de la congruence linéaire $\mathcal{C}'_1$.

Si le point X est extérieur aux droites a, b, et si le rapport $\lambda_1 : \lambda_2$ des paramètres λ_1, λ_2 varie arbitrairement, le plan (20) tourne autour de l'intersection x des plans focaux aX, bX du point X dans les complexes linéaires spéciaux A, B. La droite x est maintenant la seule droite de la congruence linéaire $\mathcal{C}'_1$ passant par le point X et, à cause de cela, la congruence linéaire $\mathcal{C}'_1$ est dite du premier ordre. On retrouve ainsi que les droites de la congruence linéaire $\mathcal{C}'_1$ sont les droites qui s'appuient, à la fois, sur les droites a, b. Mais il résulte, en outre de l'équation (20) que les plans focaux d'un point non singulier dans les complexes linéaires du faisceau considéré (19) engendrent une feuillée du premier degré ayant pour support la droite de la congruence linéaire $\mathcal{C}'_1$ passant par le point considéré et projective à toute forme de première espèce dont l'élément courant a, pour coordonnées binaires, les valeurs des paramètres λ_1, λ_2 du complexe linéaire correspondant. Les feuillées des plans focaux de points non singuliers dans les complexes linéaires du faisceau sont donc projectives entre elles; on convient de dire que ces feuillées et les formes de première espèce qui leur sont projectives sont projectives au faisceau des complexes linéaires lui-même et on considère celui-ci comme une forme de première espèce. En même temps, le rapport anharmonique de quatre éléments quelconques d'une forme de première espèce projective au faisceau de complexes linéaires est, par définition, le rapport anharmonique des complexes linéaires correspondant à ces quatre éléments; en particulier, le rapport anharmonique de quatre complexes linéaires du faisceau est celui des plans focaux d'un point non singulier arbitraire pour les quatre complexes linéaires.

Des valeurs particulières des paramètres λ_1, λ_2 dans l'équation (19) s'appellent les coordonnées binaires du complexe linéaire correspondant rapporté à trois complexes linéaires dits fondamentaux, dont les coordonnées binaires sont 1 et 0, 0 et 1, 1 et 1; le quotient $\lambda_1 : \lambda_2$ des coordonnées binaires de tout complexe linéaire du faisceau est la valeur du rapport anharmonique du groupe que ce complexe linéaire forme comme quatrième terme, avec les trois complexes linéaires fondamentaux. Enfin, quatre complexes linéaires quelconques du faisceau ont pour rapport anharmonique celui des quotients de leurs coordonnées binaires

2) En passant des coordonnées ponctuelles aux coordonnées tangentielles, l'équation (19) devient

$$\lambda_1 \xi_{12} + \lambda_2 \xi_{34} = 0. \tag{23}$$

En coordonnées courantes η_i, l'équation

$$\lambda_1 (\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1) + \lambda_2 (\xi_3 \eta_4 - \xi_4 \eta_3) = 0 \tag{24}$$

représentent les foyers du plan $\xi(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ dans les complexes linéaires du faisceau considéré (19) et (23). En particulier, les équations

$$\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1 = 0 \qquad \xi_3 \eta_4 - \xi_4 \eta_3 = 0 \tag{25}$$

représentent les foyers du plan ξ dans les complexes linéaires spéciaux A, B; le foyer du plan ξ dans le complexe linéaire A est le point $a\xi$ ou est indéterminé, selon que le plan ξ ne passe pas ou passe par la droite a; le foyer du plan ξ dans le complexe linéaire B est le point $b\xi$ ou est indéterminé, selon que le le plan ξ ne passe pas ou passe par la droite b.

Lorsque le plan ξ passe par la droite a, l'équation (24) se réduit à

$$\lambda_2 (\xi_3 \eta_4 - \xi_4 \eta_3) = 0 \tag{26}$$

et le plan ξ a le même foyer, le point $b\xi$, pour tous les complexes linéaires du faisceau différents du

complexe linéaire spécial A pour lequel $\lambda_2 = 0$; les droites de la congruence linéaire G'_1 qui sont dans le plan ξ y forment le faisceau du premier degré ayant le point $b\xi$ pour support. Une propriété analogue existe pour le point $a\xi$ dans le plan ξ passant par la droite b. On retrouve ainsi la propriété qui a fait appeler les points des droites a, b et les plans passant par l'une ou l'autre de ces droites, les points singuliers et les plans singuliers de la congruence linéaire G'_1.

Si le plan ξ ne passe ni par la droite a ni par la droite b et si le rapport $\lambda_1 : \lambda_2$ des paramètres λ_1, λ_2 varie arbitrairement, le point (24) décrit la droite x joignant les foyers $a\xi$, $b\xi$ du plan ξ dans les complexes linéaires spéciaux A, B. La droite x est maintenant la seule droite de la congruence linéaire G'_1 située dans le plan ξ et, à cause de cela, la congruence linéaire G'_1 est dite de la première classe. On retrouve encore que les droites de la congruence linéaire G'_1 sont les droites qui s'appuient à la fois, sur les droites a, b. Mais il résulte, en outre, de l'équation (24) rapprochée de l'équation (20), et de l'extension déjà faite ci-dessus de la notion de projectivité au faisceau de complexes linéaires défini par les équations équivalentes (20) et (23) et considéré comme une forme de première espèce, que ce faisceau est également projectif à la ponctuelle des foyers d'un plan non singulier dans les complexes linéaires du faisceau; on déduit de là que le rapport anharmonique de quatre complexes linéaires quelconques du faisceau est égal à celui des foyers de tout plan non singulier dans les quatre complexes linéaires.

3) Remarque. — a. — Les droites de la congruence linéaire G'_1 s'appuyant à la fois sur les droites a, b, il résulte des propriétés générales des complexes linéaires que les droites a, b sont conjuguées dans tous les complexes linéaires du faisceau ayant la congruence linéaire G'_1 pour support.

b). — La réciproque de cette propriété est vraie; si deux droites distinctes a, b sont conjuguées par rapport à deux complexes linéaires Γ_1, Γ_2, elles sont gauches et les droites qui les coupent l'une et l'autre appartiennent aux complexes linéaires Γ_1, Γ_2, à l'exclusion des autres droites de l'espace une droite qui ne coupe que l'une des droites a, b n'appartenant ni au complexe linéaire Γ_1 ni au complexe linéaire Γ_2, et une droite qui ne coupe ni la droite a ni la droite b ne pouvant appartenir qu'à un seul complexe linéaire ayant les droites a, b pour droites conjuguées. Les droites a, b sont donc les directrices de la congruence linéaire des droites communes aux complexes linéaires Γ_1, Γ_2.

Corollaire. *Par une droite extérieure à la congruence linéaire G'_1, il ne passe qu'un seul complexe linéaire du faisceau ayant la congruence linéaire G'_1 pour support.* (Voir aussi n° 57, 2°, 6).

c. Théorème. *Celui des complexes linéaires du faisceau ayant la congruence linéaire G'_1 pour support, qui passe par une droite extérieure à la congruence linéaire G'_1 passe aussi par la droite conjuguée de cette droite dans l'espace involutif gauche ε associé à la congruence linéaire G'_1.*

Soient a, b les directrices de la congruence linéaire G'_1 et de l'espace involutif gauche ε; d la droite gauche aux droites a, b par laquelle passe le complexe linéaire Γ du faisceau ayant la congruence linéaire G'_1 pour support; d' la droite conjuguée de la droite d dans l'espace involutif gauche ε; A, B, D, D' les points où une droite u de la congruence linéaire G'_1 ou une droite double de l'espace involutif gauche ε coupe les droites a, b, d, d'. On a $(ABDD') = -1$ et les plans focaux des points A, B, D, D' doivent former un groupe harmonique; or les plans focaux des points A, B, D sont les plans Ab, Ba, du; le plan focal du point D' est dans le plan $d'u$, et la droite d' est ainsi une droite du complexe linéaire Γ.

Corollaire. *Tout complexe linéaire passant par la congruence linéaire G'_1 est anallagmatique dans l'espace involutif gauche ε associé à cette congruence.*

3° Des droites conjuguées d'une droite donnée pour les complexes linéaires passant par la congruence linéaire G'_1. —

1) Théorème. *Les droites conjuguées d'une droite gauche aux directrices de la congruence*

linéaire G'_1 dans les complexes linéaires du faisceau ayant la congruence pour support, sont les génératrices rectilignes d'un système réglé projectif au faisceau des complexes linéaires et ayant pour directrices les droites de la congruence linéaire G'_1 qui s'appuient sur la droite donnée et sont déterminés par cette condition.

Soient d une droite gauche aux directrices a, b de la congruence linéaire G'_1; X, Y deux points arbitraires de cette droite; x, y les droites de la congruence linéaire qui passent par les points X, Y ou les intersections des plans focaux aX et bX, aY et bY des points X, Y dans les complexes linéaires spéciaux A, B du faisceau. Les droites conjuguées de la droite d dans les complexes linéaires du faisceau sont les intersections des plans focaux des points X, Y dans ces complexes linéaires; la première partie du théorème résulte de ce que ces plans focaux engendrent deux feuillées projectives entre elles, ayant les droites gauches x, y pour supports, et projectives au faisceau des complexes linéaires. La seconde partie résulte de ce que les droites x, y sont déjà des directrices du système réglé Δ des droites conjuguées de la droite d, alors que les points X, Y sont des points quelconques de la droite d.

2) N.B. a.– Les directrices a, b de la congruence linéaire G'_1 sont des génératrices du système réglé Δ; elles sont les droites conjuguées de la droite d dans les complexes linéaires spéciaux dont elles sont les axes.

b.– La droite d est une droite de celui des complexes linéaires du faisceau pour lequel le point X est le foyer du plan xd, et, pour lequel, chaque point de la droite d est donc le foyer du plan tangent en ce point à la quadrique support du système réglé Δ.

c.– Lorsque la droite d coupe l'une des droites a, b, la droite a par exemple, les droites de la congruence linéaire G'_1 qui la rencontrent sont les rayons de deux faisceaux du premier degré; le premier faisceau a pour support le point ad dans le plan de ce point et de la droite b; le second faisceau est dans le plan ad et son support est le point où ce plan coupe la droite b.

d.– Si la droite d coupe à la fois les droites a, b, elle appartient à la congruence linéaire G'_1 et les autres droites de celle-ci qui la coupent sont les droites du faisceau dont le support est le point ad dans le plan bd et celles du faisceau dont le support est le point bd dans le plan ad.

e.– Théorème. *Si trois génératrices rectilignes d'un système réglé appartiennent à la congruence linéaire G'_1, il en est de même des autres génératrices rectilignes du système réglé.*

Si trois génératrices rectilignes g_1, g_2, g_3 du système réglé Σ appartiennent à la congruence linéaire G'_1, les directrices a, b de celle-ci sont des directrices du système réglé Σ. Toutes les génératrices rectilignes du système réglé Σ rencontrent donc les deux droites a, b et sont ainsi des droites de la congruence linéaire G'_1.

f.– Corollaire 1.– *La congruence linéaire G'_1 est déterminée par quatre de ses droites si elles sont gauches deux à deux et ne sont pas des génératrices rectilignes d'un système réglé.*

Si d_1, d_2, d_3, d_4 sont quatre pareilles droites, les directrices a, b de la congruence linéaire G'_1 sont les directrices du système réglé $\Sigma(d_1, d_2, d_3)$ qui passent par les points nécessairement distincts où la droite d_4 coupe la quadrique support du système réglé.

g.– Corollaire 2.– *Tout complexe linéaire qui contient quatre droites de la congruence linéaire G'_1, contient toutes les droites de celle-ci et appartient donc au faisceau dont elle est le support, lorsque les quatre droites sont gauches deux à deux et ne sont pas des génératrices rectilignes d'un système réglé.*

En effet, les directrices a, b de la congruence linéaire G'_1 sont les seules droites qui s'appuient à la fois sur les quatre droites données; elles sont donc des droites conjuguées pour le complexe linéaire considéré; celui-ci contient donc toutes les droites qui les coupent l'une et l'autre, ou, ce qui

revient au même, toutes les droites de la congruence linéaire G'_1.

59.– Congruence linéaire du second genre (G''_1).– 1° 1) Lorsque l'équation (15) a une racine double pour $\lambda_1 : \lambda_2$, un seul des complexes linéaires du faisceau est spécial ; on peut supposer que c'est le complexe linéaire A ; la racine double est ainsi $\lambda_1 : \lambda_2 = 1 : 0$ et on a les conditions

(27) $$\Sigma' A_{ij} A_{kl} = 0, \qquad \Sigma A_{ij} B_{kl} = 0, \qquad \Sigma' B_{ij} B_{kl} \neq 0,$$

dont la seconde exprime que l'axe a du complexe linéaire spécial A appartient au complexe linéaire B, et, par suite, à tous les complexes linéaires du faisceau et à la congruence linéaire G''_1 support du faisceau.

2) Les droites de la congruence linéaire G''_1 appartenant à tous les complexes linéaires du faisceau, appartiennent au complexe linéaire spécial A ; elles coupent toutes la droite a qu'on appelle la directrice de la congruence linéaire du second genre G''_1 et, lorsque celle-ci est réelle, elle est dite parabolique.

2° Extension de la notion de projectivité au faisceau de complexes linéaires ayant pour support la congruence linéaire G''_1 et considérée comme une forme de première espèce.– 1) On peut supposer la droite a confondue avec l'arête AB du tétraèdre de référence ; ses coordonnées ponctuelles sont ainsi

(28) $$A_{12} = 1, \quad A_{13} = 0, \quad A_{14} = 0, \quad A_{34} = 0, \quad A_{42} = 0, \quad A_{23} = 0 ;$$

les conditions (27) et l'équation (7) du faisceau se réduisent à

(29) $$B_{34} = 0 \qquad \text{avec} \qquad B_{13}B_{42} + B_{14}B_{23} \neq 0$$

et

(30) $$\lambda_1 X_{34} + \lambda_2 (B_{42} X_{13} + B_{23} X_{14} + B_{12} X_{34} + B_{13} X_{42} + B_{14} X_{23}) = 0.$$

En coordonnées courantes Y_i, l'équation

(31) $$\lambda_1 (X_3 Y_4 - X_4 Y_3) + \lambda_2 \{ B_{42} (X_1 Y_3 - X_3 Y_1) + \cdots\cdots + B_{14} (X_2 Y_3 - X_3 Y_2) \} = 0$$

représente les plans focaux du point X (X_1, X_2, X_3, X_4) dans les divers complexes linéaires (30). En particulier, les équations

(32) $$X_3 Y_4 - X_4 Y_3 = 0, \qquad B_{42} (X_1 Y_3 - X_3 Y_1) + \cdots\cdots + B_{14} (X_2 Y_3 - X_3 Y_2) = 0$$

représentent les plans focaux du point X dans les complexes linéaires A, B ; le premier des deux plans est le plan aX ou est indéterminé selon que le point X n'est pas ou est sur la droite a.

Lorsque le point X est sur la droite a, l'équation (31) se réduit à

(33) $$\lambda_2 \{ B_{42} (X_1 Y_3 - X_3 Y_1) + \cdots\cdots + B_{14} (X_2 Y_3 - X_3 Y_2) \} = 0,$$

et le point X a le même plan focal ξ dans tous les complexes linéaires du faisceau différents du complexe linéaire spécial A pour lequel $\lambda_2 = 0$, et ce plan ξ passe par la droite a dont les coordonnées (28) vérifient son équation quel que soit λ_2 ; les droites de la congruence linéaire G''_1 qui passent par le point X sont les droites du faisceau ayant ce point pour support dans le plan ξ, leur nombre étant infini, les points de la droite a et les plans passant par cette droite sont appelés les points singuliers et les plans singuliers de la congruence linéaire G''_1 ; le plan ξ peut occuper telle position qu'on veut dans la feuillée de support a, car si le point X glisse sur la droite a, le plan ξ tourne autour de cette droite et les deux formes engendrées sont projectives.

Lorsque le point X est extérieur à la droite a et que le rapport $\lambda_1 : \lambda_2$ varie arbitrairement, le plan (31) tourne autour de l'intersection x des plans focaux (32) du point X dans les complexes linéaires A, B.

La droite x est maintenant la seule droite de la congruence linéaire G''_1 passant par le point X et,

à cause de cela, la congruence linéaire G''_1 est dite du premier ordre. Il résulte aussi de l'équation (31) que les plans focaux de points non singuliers dans les complexes linéaires du faisceau considéré (30) engendrent des feuillées projectives entre elles et à toute forme de première espèce dont les coordonnées binaires de l'élément courant sont les valeurs des paramètres λ_1, λ_2 du complexe linéaire correspondant. On est donc amené, comme dans le cas de la congruence linéaire G'_1 du premier genre, à considérer comme une forme de première espèce le faisceau des complexes linéaires ayant pour support une congruence linéaire G''_1 du second genre, et à lui étendre la notion de la projectivité et celle du rapport anharmonique, ainsi que l'usage des coordonnées binaires.

2) En passant des coordonnées ponctuelles aux coordonnées tangentielles, l'équation (30) devient

$$(34)\qquad \lambda_1 \xi_{12} + \lambda_2 (B_{42}\xi_{42} + B_{23}\xi_{23} + B_{12}\xi_{12} + B_{13}\xi_{13} + B_{14}\xi_{14}) = 0.$$

En coordonnées courantes η_i, l'équation

$$(35)\qquad \lambda_1(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1) + \lambda_2\{B_{42}(\xi_4\eta_2 - \xi_2\eta_4) + \cdots\cdots + B_{14}(\xi_1\eta_4 - \xi_4\eta_1)\} = 0$$

représente les foyers du plan $\xi(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ dans les complexes linéaires du faisceau considéré (30) et (34). En particulier, les équations

$$(36)\qquad \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 = 0, \quad B_{42}(\xi_4\eta_2 - \xi_2\eta_4) + \cdots\cdots + B_{14}(\xi_1\eta_4 - \xi_4\eta_1) = 0$$

représentent les foyers du plan ξ dans les complexes linéaires A, B; le foyer du plan ξ dans le complexe linéaire spécial A est le point $a\xi$ ou est indéterminé selon que le plan ξ ne passe pas ou passe par la droite a.

Lorsque le plan ξ passe par la droite a, l'équation (35) se réduit à

$$(37)\qquad \lambda_2\{B_{42}(\xi_4\eta_2 - \xi_2\eta_4) + \cdots\cdots + B_{14}(\xi_1\eta_4 - \xi_4\eta_1)\} = 0,$$

le plan ξ a le même foyer X dans les complexes linéaires du faisceau différents du complexe linéaire spécial A pour lequel $\lambda_2 = 0$; ce foyer X est sur la droite a dont les coordonnées tangentielles 0, 0, 0, 1, 0, 0 vérifient son équation quel que soit λ_2. Les droites de la congruence linéaire G''_1 qui sont dans le plan ξ y forment le faisceau du premier degré ayant le point X pour support; on retrouve ainsi la propriété qui a fait appeler les points de la droite a et les plans passant par cette droite, les points singuliers et les plans singuliers de la congruence linéaire G''_1.

Si le plan ξ ne passe pas par la droite a et si le rapport $\lambda_1 : \lambda_2$ des paramètres λ_1, λ_2 varie arbitrairement, le point (35) décrit la droite x joignant les foyers du plan ξ dans les complexes linéaires A, B. La droite x est maintenant la seule droite de la congruence linéaire G''_1 située dans le plan ξ, et, à cause de cela, la congruence linéaire G''_1 est dite de la première classe. Il résulte en outre de l'équation (35) et de l'extension déjà faite de la notion de projectivité au faisceau de complexes linéaires défini par les équations équivalentes (30) et (34) et considéré comme une forme de première espèce, que ce faisceau est également projectif à la ponctuelle des foyers de tout plan non singulier dans les complexes linéaires du faisceau. Le rapport anharmonique de quatre complexes linéaires quelconques du faisceau est égal à celui des plans focaux d'un point non singulier arbitraire et à celui des foyers d'un plan non singulier arbitraire dans les quatre complexes linéaires considérés.

2°. Des droites conjuguées d'une droite donnée par rapport aux complexes linéaires passant par la congruence linéaire G''_1.-

1) **Théorème.** *Les droites conjuguées d'une droite gauche à la directrice de la congruence linéaire G''_1 dans les complexes linéaires du faisceau ayant la congruence pour support sont les génératrices rectilignes d'un système réglé projectif au faisceau des complexes linéaires et ayant pour directrices les droites de la congruence linéaire G''_1 qui s'appuient sur la droite donnée et sont déterminées par cette condition.*

La démonstration de ce théorème est identique à celle du théorème analogue pour la congruence linéaire C'_1 du premier ordre (n° 58, 3°)

2) N. B. _ a. _ La directrice a de la congruence linéaire C''_1 est une directrice du système réglé trouvé Δ; elle est la droite conjuguée de la droite donnée d dans le complexe linéaire spécial A dont elle est l'axe.

b. _ La droite d est une droite de celui des complexes linéaires du faisceau pour lequel chacun de ses points est le foyer du plan tangent en ce point à la quadrique support du système réglé Σ.

c. _ Lorsque la droite d coupe la droite a, les droites de la congruence linéaire C''_1 qui la rencontrent sont les rayons de deux faisceaux du premier degré, le premier faisceau a pour support le point ad dans le plan focal de ce point pour les complexes linéaires différents du complexe linéaire spécial A, le second faisceau est dans le plan ad et a pour support le foyer de ce plan dans les mêmes complexes linéaires; les deux faisceaux se confondent en un seul, lorsque le plan ad est le plan focal du point ad, ou, ce qui revient au même, lorsque la droite d appartient à la congruence linéaire C''_1.

d. _ Soient Δ, Δ' les systèmes réglés des droites conjuguées à deux droites d, d' gauches à la droite a; Q, Q' les quadriques supports de ces systèmes réglés. Les directrices des systèmes réglés Δ, Δ' étant des droites de la congruence linéaire C''_1, les quadriques Q, Q' passent par la droite a et ont, en chaque point de cette droite, le même plan tangent, le plan focal du point dans les complexes linéaires non spéciaux passant par la congruence linéaire C''_1. Les quadriques Q, Q' se raccordent donc l'une à l'autre suivant la droite a, et les droites de la congruence linéaire du second genre C''_1 sont tangentes à une infinité de quadriques aux points d'une même génératrice rectiligne, la directrice de la congruence, le long de laquelle les quadriques sont tangentes entre elles.

e. _ Théorème. Réciproquement, les tangentes à une quadriques aux points d'une génératrice rectiligne sont les droites d'une congruence linéaire du second genre dont cette génératrice rectiligne est la directrice.

Cette propriété est une conséquence immédiate du théorème démontré au n° 57, 2°, 2. Soient Q une des quadriques tangentes aux droites de la congruence linéaire du second genre C''_1 aux points de la directrice a de cette congruence linéaire. Q' une autre quadrique à laquelle on mène les tangentes aux points d'une génératrice rectiligne quelconque a'. On peut établir une infinité de projectivités entre deux espaces à trois dimensions contenant respectivement les deux quadriques pour que celles-ci soient des formes homologues et les droites a, a' des droites homologues; les tangentes à la quadrique Q' aux points de la génératrice rectiligne a' sont donc les droites d'une congruence linéaire du second genre, transformée, par l'une ou l'autre de ces projectivités, de la de la congruence linéaire donnée C''_1.

f. Théorème. Si trois génératrices rectilignes d'un système réglé appartiennent à la congruence linéaire C''_1, il en est de même des autres génératrices rectilignes du système réglé.

Si les trois génératrices rectilignes g_1, g_2, g_3 du système réglé Σ appartiennent à la congruence linéaire C''_1, la directrice a de celle-ci est une directrice du système réglé Σ, les plans ag_1, ag_2, ag_3 sont les plans focaux des points désignés par les mêmes lettres dans les complexes linéaires non spéciaux passant par la congruence linéaire C''_1. Mais si g est une génératrice rectiligne quelconque du système réglé Σ, les rapports anharmoniques des points et des plans désignés par la même notation $a(g_1, g_2, g_3, g)$ sont égaux, il résulte des propriétés des complexes linéaires non spéciaux que le plan ag est le plan focal du point ag dans le faisceau des complexes linéaires ayant pour support la congruence linéaire C''_1 et la droite g est une droite de cette dernière.

g. _ Corollaire 1. _ La congruence linéaire C''_1 est déterminée par quatre de ses droites si elles sont gauches deux à deux et ne sont pas des génératrices rectilignes d'un système réglé. Démonstration analogue à celle du n° 58, 3°, 2, f.

h. _ Corollaire _ 2. _ Tout complexe linéaire qui contient quatre droites de la congruence linéaire C''_1, contient toutes les droites de celle-ci et appartient donc au faisceau dont elle est le support,

lorsque les quatre droites sont gauches deux à deux et ne sont pas des génératrices rectilignes d'un système réglé.

Soient d_1, d_2, d_3, d_4 quatre droites satisfaisant aux conditions énoncées et Γ le complexe linéaire qui les contient. La directrice a de la congruence linéaire G''_1 est la seule droite qui coupe les quatre droites d_1, d_2, d_3, d_4 car s'il y en avait une seconde ces quatre droites seraient des génératrices rectilignes d'un système réglé. La droite a est donc sa propre conjuguée dans le complexe linéaire Γ pour lequel les points ad_1, ad_2, ad_3, ad_4 sont aussi les foyers des plans désignés par les mêmes notations. La propriété résulte donc de ce que le complexe linéaire détermine la même projectivité entre les points de la droite a et les plans passant par cette droite que celle déterminée par les droites de la congruence linéaire G''_1.

2.- Corollaire. *Quatre droites deux à deux gauches qui ne sont pas des génératrices rectilignes d'un système réglé, déterminent une congruence linéaire du premier ou du second genre à laquelle elles appartiennent.*

Soient d_1, d_2, d_3, d_4 les quatre droites données et Σ le système réglé déterminé par la condition d'avoir les trois droites d_1, d_2, d_3, d_4 pour génératrices rectilignes. La droite d_4 n'étant pas une génératrice rectiligne de Σ, coupe la quadrique Q support du système réglé en deux points distincts A, B ou est tangente à cette quadrique en un point A. Dans le premier cas, la congruence linéaire répondant à la question est la congruence linéaire du premier genre ayant pour directrices les directrices a, b du système réglé Σ passant par les points A, B. Dans le second cas, la congruence linéaire est la congruence linéaire du second genre formée des tangentes à la quadrique Q le long de la directrice a du système réglé Σ passant par le point A. La congruence linéaire trouvée ainsi, dans chacun des deux cas, est la seule pouvant répondre à la question; car s'il y en avait une seconde, une autre directrice du système réglé Σ couperait à la fois les droites d_1, d_2, d_3, d_4 et la droite d_4 serait une génératrice rectiligne du système réglé ce qui est contraire à l'hypothèse.

3° Congruence parabolique.- Lorsque les complexes linéaires A, B sont réels, il en est de même de la congruence linéaire G''_1 qui est dite parabolique. Soient Q une des quadriques qu'on vient de définir ci-dessus (voir d); ϖ le plan tangent à cette quadrique en un point quelconque P de la droite a; ϖ_∞ la position du plan ϖ lorsque le point P devient le point impropre P_∞ de la droite a, ou le plan asymptote de la droite a pour toutes les quadriques telles que la quadrique Q; P_0 la position du point P lorsque le plan ϖ devient le plan ϖ_0 perpendiculaire au plan ϖ_∞ de sorte que le point P_0 et le plan ϖ_0 sont le point central et le plan central de la droite a pour les mêmes quadriques; y, z les droites perpendiculaires à la droite a au point P_0 dans les plans ϖ_∞, ϖ_0. Si le point P glisse sur la droite a, le plan ϖ tourne autour de cette droite et les formes du premier degré a (P), a (ϖ) sont projectives; une rotation de 180° autour de la droite a laisse la ponctuelle immobile et ramène donc la feuillée a (ϖ) sur elle-même, ce qui prouve que la droite a est un axe de symétrie de la congruence linéaire parabolique dont elle est la directrice. D'autre part, en établissant dans la ponctuelle a(P) une involution ayant les points P_0, P_∞ pour points doubles, ou, ce qui est la même chose, une symétrie ayant le point P_0 pour centre, les plans tangents à la quadrique Q aux points conjugués dans cette involution se correspondent dans une feuillée involutive dont les plans ϖ_0, ϖ_∞ sont les plans doubles, et, par suite, des plans de symétrie puisqu'ils sont perpendiculaires l'un sur l'autre; il en résulte que des rotations de 180° autour des droites y ou z n'altèrent ni la ponctuelle involutive ni la feuillée involutive placées sur la droite a; ces rotations transforment donc en elle-même la congruence parabolique G''_1 qui admet ainsi les droites y, z pour axes de symétrie et possède, comme les congruences elliptiques et hyperboliques trois axes de symétrie qui sont les arêtes d'un trièdre trirectangle.

63. Congruences linéaires du troisième genre (G'''_1).-1 Dans ce cas, l'équation (15) se réduisant à une identité, on a, à la fois

$$(38)\qquad \Sigma' A_{ij} A_{kl} = 0, \qquad \Sigma A_{ij} B_{kl} = 0, \qquad \Sigma' B_{ij} B_{kl} = 0,$$

et les complexes linéaires A, B sont des complexes linéaires spéciaux dont les axes a, b se coupent et sont donc dans un même plan, ces droites étant distinctes puisque les complexes linéaires A, B sont différents l'un de l'autre. L'équation (15) étant vérifiée quels que soit λ_1 et λ_2 tous les complexes linéaires du faisceau sont spéciaux et chacun d'eux est formé de droites s'appuyant sur une droite passant par le point ab dans le plan ab et de coordonnées ponctuelles $\lambda_1 A_{ij} + \lambda_2 B_{ij}$; ce qui prouve, en même temps, que la congruence linéaire donnée G_1''' est formée des droites du système plan ayant le plan ab pour support et des droites de la gerbe ayant le point ab pour support, et on dit que les droites du faisceau ayant le point ab pour support dans le plan ab, ou les axes des complexes linéaires du faisceau, sont ses directrices.

2° Extension de la notion de projectivité au faisceau des complexes linéaires ayant la congruence linéaire G_1''' pour support et considéré comme une forme de première espèce. 1) On peut supposer les droites a, b confondues avec les arêtes AB, AC du tétraèdre de référence ABCD; leurs coordonnées ponctuelles sont ainsi

(39) $A_{12}=1,\ A_{13}=0,\ A_{14}=0,\ A_{34}=0,\ A_{42}=0,\ A_{23}=0$ et $B_{12}=0, B_{13}=1, B_{14}=0, B_{34}=0, B_{42}=0, B_{23}=0$

et l'équation (7) se réduit à

(40) $$\lambda_1 X_{34} + \lambda_2 X_{42} = 0.$$

En coordonnées courantes Y_i, l'équation

(41) $$\lambda_1 (X_3 Y_4 - X_4 Y_3) + \lambda_2 (X_4 Y_2 - X_2 Y_4) = 0$$

représente les plans focaux du point $X(X_1, X_2, X_3, X_4)$ dans les complexes linéaires (40). En particulier, les équations

(42) $$X_3 Y_4 - X_4 Y_3 = 0, \qquad X_4 Y_2 - X_2 Y_4 = 0$$

représentent les plans focaux du point X dans les complexes linéaires A, B; le premier plan est le plan aX ou est indéterminé selon que le point X n'est pas ou est sur la droite a; le second plan est le plan bX ou est indéterminé selon que le point X n'est pas ou est sur la droite b.

Lorsque le point X coïncide avec le point $A \equiv ab$, l'équation (41) se réduit à une identité, le plan focal du point ab est indéterminé dans tous les complexes linéaires du faisceau et on retrouve ainsi que toutes les droites issues de ce point appartiennent à la congruence linéaire G_1'''.

Lorsque le point X est un point différent du point $A \equiv ab$ dans le plan ab, l'équation (41) se réduit à

(43) $$(\lambda_1 X_3 - \lambda_2 X_2) Y_4 = 0$$

et ce point X a le même plan focal, le plan ab, pour tous les complexes linéaires du faisceau différents de celui pour lequel, ayant

(44) $$\lambda_1 X_3 - \lambda_2 X_2 = 0$$

l'axe passe par le point X et le plan focal est indéterminé. Chaque point du plan ab et différent du point ab est donc le support d'un faisceau de droites de la congruence linéaire G_1''' et ces droites sont dans le plan ab; à cause de cette propriété et de la précédente, les points du plan ab et les plans passant par le point ab s'appellent les points singuliers et les plans singuliers de la congruence linéaire G_1'''.

Si le point X est extérieur au plan ab et si le rapport $\lambda_1 : \lambda_2$ des paramètres λ_1, λ_2 varie arbitrairement, le plan (41) tourne autour de l'intersection $x \equiv XA$ des plans focaux aX, bX du point X dans les complexes linéaires A, B; la droite x est maintenant la seule droite de la congruence linéaire G_1''' passant par le point A, et, à cause de cela, la congruence linéaire G_1''' est dite du premier ordre.

Il résulte, en outre, de l'équation (41) que les plans focaux de points non singuliers dans les complexes linéaires du faisceau considéré (40) engendrent des feuillées projectives entre elles et à toute

forme de première espèce dont les coordonnées de l'élément courant sont les valeurs des paramètres λ_1, λ_2 du complexe linéaire correspondant. On est donc amené, comme dans les cas des congruences linéaires G'_1, G''_1 du premier et du second genre, à considérer comme une nouvelle forme de première espèce le faisceau de complexes linéaires ayant pour support la congruence linéaire G'''_1 du troisième genre et à lui étendre la notion de projectivité et celle du rapport anharmonique, ainsi que l'usage des coordonnées binaires.
2) En passant des coordonnées ponctuelles aux coordonnées tangentielles, l'équation (40) devient

(45) $$\lambda_1 \xi_{12} + \lambda_2 \xi_{13} = 0.$$

En coordonnées courantes η_i, l'équation

(46) $$\lambda_1 (\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1) + \lambda_2 (\xi_1\eta_3 - \xi_3\eta_1) = 0$$

représente les foyers du plan $\xi (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ dans les complexes linéaires du faisceau considéré (40) et (45). En particulier, les équations

(47) $$\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 = 0, \qquad \xi_1\eta_3 - \xi_3\eta_1 = 0$$

représentent les foyers du plan ξ dans les complexes linéaires A, B; le premier de ces deux points est le point $a\xi$ ou est indéterminé selon que le plan ξ ne passe pas ou passe par la droite a; le second est le point $b\xi$ ou est indéterminé selon que le plan ξ ne passe pas ou passe par la droite b.
Lorsque le plan ξ se confond avec le plan ab, l'équation (46) se réduit à une identité; le foyer du plan ab est indéterminé dans tous les complexes linéaires du faisceau et on retrouve ainsi que toutes les droites du plan ab appartiennent à la congruence linéaire G'''_1.
Lorsque le plan ξ est un plan différent du plan ab dans la gerbe ayant le point $A \equiv ab$ pour support, l'équation (46) se réduit à

(48) $$(\lambda_1 \xi_2 + \lambda_2 \xi_3)\eta_1 = 0$$

et le plan ξ a le même foyer, le point $A \equiv ab$, pour tous les complexes linéaires du faisceau différents de celui pour lequel, ayant

(49) $$\lambda_1 \xi_2 + \lambda_2 \xi_3 = 0$$

l'axe est dans le plan ξ et le foyer de ce plan est indéterminé. Chaque plan passant par le point ab et différent du plan ab contient donc une infinité de droites de la congruence linéaire G'''_1 formant un faisceau ayant le point ab pour support. Par cette propriété et la précédente on est encore amené à dire que les points du système plan ab et les plans de la gerbe ab sont les points singuliers et les plans singuliers de la congruence linéaire G'''_1.
Si le plan ξ ne passe pas par le point ab et si le rapport $\lambda_1 : \lambda_2$ des paramètres λ_1, λ_2 varie arbitrairement, le point (46) décrit la droite x joignant les foyers $a\xi$, $b\xi$ du plan ξ dans les complexes linéaires A, B. La droite x est maintenant la seule droite de la congruence linéaire G'''_1 située dans le plan ξ, et à cause de cela, la congruence linéaire G'''_1 est dite de la première classe. Il résulte, en outre, de l'équation (46) et de l'extension déjà faite de la notion de projectivité au faisceau de complexes linéaires défini par les équations équivalentes (40) et (45) et considéré comme une forme de première espèce, que ce faisceau est également projectif à la ponctuelle des foyers de tout plan non singulier dans les complexes linéaires du faisceau. Le rapport anharmonique de quatre quelconques de ces complexes linéaires est donc égal à celui des plans focaux d'un point non singulier quelconque et à celui des foyers d'un plan non singulier quelconque dans les quatre complexes linéaires; on en déduit que ce rapport anharmonique est aussi celui des axes des quatre complexes linéaires; en effet, si a_1, a_2, a_3, a_4 sont ces axes les plans focaux correspondants d'un point non singulier X sont les plans Xa_1, Xa_2, Xa_3, Xa_4, ces plans sont dans la feuillée du premier degré qui a la droite $XA \equiv X(ab)$ pour support et ils coupent le plan ab

suivant les droites a_1, a_2, a_3, a_4 du faisceau ayant le point $A \equiv ab$ pour support.

3° **Des droites conjuguées d'une droite donnée dans les complexes linéaires passant par la congruence linéaire G'''_1.** — Si la droite donnée d est extérieure à la congruence linéaire G'''_1, les droites qui lui sont conjuguées dans les complexes linéaires considérés sont les intersections des plans focaux de deux quelconques de ses points dans les mêmes complexes linéaires, ou les axes de ceux-ci, et on sait que ces axes sont les droites d'un faisceau du premier degré projectif au faisceau des complexes linéaires. Les droites de la congruence linéaire G'''_1 qui coupent la droite d forment deux faisceaux du premier degré, le faisceau des droites du plan ab passant par le point où la droite d coupe ce plan et celui des droites issues du point ab dans le plan de ce point et de la droite d.

B. Les congruences linéaires du premier et du second genre engendrées par deux gerbes, deux systèmes plans ou deux espaces collinéaires.

61. 1° 1) **Théorème.** *Une congruence linéaire du premier ou du second genre est projetée d'un point non singulier de l'une de ses droites suivant une gerbe réciproque au système plan suivant lequel elle est coupée par un plan non singulier passant par la même droite.*

Soient d une droite quelconque d'une congruence linéaire G_1 du premier ou du second genre ; θ un plan non singulier passant par la droite d ; P un point non singulier de la même droite ; X_1, X_2 les points où deux droites quelconques d_1, d_2 de la congruence linéaire G_1 coupent le plan θ ; a_1, a_2 deux droites distinctes menées par ces points dans le plan θ et rencontrant la droite d en des points non singuliers A_1, A_2 différents l'un de l'autre et du point P. Lorsque les points X_1, X_2 décrivent les droites a_1, a_2, les droites d_1, d_2 engendrent des systèmes réglés Σ_1, Σ_2 ayant en commun deux génératrices rectilignes, la droite de la congruence linéaire G_1 passant par le point a_1a_2 et la droite d qui est la position des droites d_1, d_2 lorsque les points X_1, X_2 deviennent les points A_1, A_2. On sait d'ailleurs que les deux systèmes réglés ont pour directrices communes les directrices a, b de la congruence linéaire G_1 si celle-ci est du premier genre et qu'ils sont sur deux quadriques tangentes le long de la directrice a de la congruence linéaire G_1 lorsque celle-ci est du second genre. Dès lors, le point P n'étant pas un point singulier de la congruence linéaire G_1, les directrices des systèmes réglés Σ_1, Σ_2 passant par ce point sont des droites distinctes p_1, p_2 extérieures au plan θ et on a les deux projectivités

$$\text{feuillée } p_1\,(d_1)\ \pi\ \text{ponctuelle } a_1\,(d_1), \qquad \text{feuillée } p_2\,(d_2)\ \pi\ \text{ponctuelle } a_2\,(d_2),$$

dans chacune desquelles le plan p_1p_2 est le plan homologue du point a_1a_2. Ces deux projectivités établissent donc une réciprocité entre la gerbe P et le système plan θ. Cette réciprocité répondra à la question, si, le point X' et le plan ξ' en étant des éléments homologues quelconques, on démontre que la droite d' de la congruence linéaire G_1 qui passe par le point X' est dans le plan ξ'. A cet effet, soit a' une droite du plan θ qui passe par le point X', coupe d en un point non singulier et ne passe par aucun des points P, a_1a_2, a_1d, a_2d. Par des raisonnements analogues à ceux qu'on a faits avec les droites a_1, a_2, on trouve une droite p' issue du point P avec la condition que cette droite p' et la droite a' sont des directrices d'un système réglé Σ' engendré par la droite d' de la congruence linéaire G_1 lorsque le point X' décrit la droite a' et on a la projectivité

$$\text{feuillée } p'\,(d')\ \pi\ \text{ponctuelle } a'\,(d');$$

en mettant le point X' successivement sur les points $a'd$, $a'a_1$, $a'a_2$, on constate que cette projectivité a trois couples d'éléments homologues communs avec celle qu'on obtiendrait en utilisant la réciprocité déjà établie entre la gerbe P et le système plan θ ; ces deux projectivités sont donc identiques et la droite d' est dans le plan ξ'.

2) **Remarque.** Les points a_1d, a_2d, $a'd$, ... sont sur les ponctuelles $a_1\,(d_1)$, $a_2\,(d_2)$, $a'\,(d')$, ... les points homologues des plans p_1d, p_2d, $p'd$, ... dans les feuillées $p_1\,(d_1)$, $p_2\,(d_2)$, $p'\,(d')$, ... respectivement

projectives aux ponctuelles précédentes ; la droite d est donc une droite double de la réciprocité établie par la congruence linéaire $\mathcal{C}_1$ entre la gerbe P et le système plan θ.

3) Corollaire. 1- Les gerbes obtenues en projetant une congruence linéaire du premier ou du second genre de deux points non singuliers quelconques d'une même droite de la congruence sont collinéaires et ont la droite pour droite double.

4) Corollaire. 2.- Les systèmes plans obtenus en coupant une congruence linéaire du premier ou du second genre par deux plans non singuliers quelconques passant par une même droite de la congruence sont collinéaires et ont la droite pour droite double.

5) Remarque. La droite double des formes collinéaires obtenues n'est ni le support d'une feuillée double, dans le cas de deux gerbes collinéaires, ni le support d'une ponctuelle double, dans le cas de deux systèmes plans collinéaires, sans quoi, la collinéation considérée dégénérerait en une perspectivité et les droites de la congruence linéaire se couperaient dans un plan ou passeraient par un même point, ce qui est absurde. Les feuillées projectives ou les ponctuelles projectives dont la droite double est le support ont deux éléments doubles, les plans singuliers passant par cette droite ou les points singuliers qu'elle contient, ces éléments doubles étant distincts ou confondus selon que la congruence linéaire est du premier ou du second genre.

6) Théorèmes. a- Quand deux gerbes collinéaires de supports différents ont une droite double et n'ont pas une feuillée double, les plans homologues se coupent suivant les droites d'une congruence linéaire du premier ou du second genre.

b.- Quand deux systèmes plans collinéaires de supports différents ont une droite double, les droites joignant les points homologues sont les droites d'une congruence linéaire du premier ou du second genre.

Ces propriétés sont les propriétés réciproques de celles énoncées ci-dessus dans les corollaires 1, 2. Il suffit de démontrer le théorème b. Soient donnés deux systèmes plans collinéaires de supports différents θ, θ' admettant pour droite double, l'intersection $d \equiv \theta\theta'$ des supports. Les deux systèmes plans n'ayant pas une ponctuelle double, les ponctuelles projectives dont la droite d est le support commun ont deux point doubles distincts ou confondus.

Soient A et A', B et B', C et C' trois couples de points homologues dans les deux systèmes plans, tels que les couples de droites homologues BC et B'C', CA et C'A', AB et A'B' déterminent sur la droite d trois couples de points homologues distincts et différents des points doubles situés sur cette droite. De cette manière, les droites d, $AA' \equiv a$, $BB' \equiv b$, $CC' \equiv c$ sont gauches deux à deux et ne sont pas des génératrices rectilignes d'un système réglé ; elles déterminent donc une congruence linéaire $\mathcal{C}_1$ du premier ou du second genre à laquelle elles appartiennent. La propriété résulte de ce que cette congruence linéaire est coupée par les plans θ, θ' suivant deux systèmes plans collinéaires qui ne diffèrent pas des systèmes plans donnés, une collinéation entre deux systèmes plans étant déterminée par quatre couples de droites homologues (d et d, BC et B'C', CA et C'A', AB et A'B') pouvant servir d'éléments fondamentaux à des coordonnées ternaires dans les deux formes.

62. 1° Définition. On dit qu'une quadrique appartient à une congruence linéaire du premier ou du second genre lorsque les génératrices rectilignes de l'un des systèmes réglés dont elle est le support sont des droites de la congruence.

2° Théorème. Une congruence linéaire du premier ou du second genre est anallagmatique dans toute polarité dont la quadrique directrice lui appartient.

Soient Q une quadrique appartenant à la congruence linéaire considérée $\mathcal{C}_1$; Σ le système réglé de ses génératrices rectilignes qui sont des droites de la congruence linéaire $\mathcal{C}_1$; d, d' deux droites polaires par rapport à la quadrique Q dont la première est une droite de $\mathcal{C}_1$.

On distingue trois cas dont le troisième ne peut se présenter que si la congruence linéaire $\mathcal{C}_1$ est du premier genre.

1) Quand la droite d est une génératrice rectiligne de la quadrique Q, elle coïncide avec la droite d' et n'est donc pas altérée par la polarité dont la quadrique Q est la quadrique directrice.
2) Si la droite d est tangente à la quadrique Q en un certain point A, elle est dans le plan α des génératrices rectilignes menées par ce point sur la quadrique; mais l'une de ces génératrices est, comme la droite d, une droite de la congruence linéaire $\mathfrak{C}_1$. Le point A et le plan α sont donc un point et un plan singuliers tels que toutes les droites menées par le point dans le plan sont des droites de la congruence linéaire $\mathfrak{C}_1$; or la droite d' est une de ces droites, puisque le plan α est tangent à la quadrique Q au point A.
3) Si la droite d coupe la quadrique Q en des points différents A, B, ces points sont des points singuliers et les directrices du système réglé Σ sur lesquelles ils se trouvent sont les directrices a, b de la congruence linéaire qui est donc du premier genre. Or la droite d' est l'intersection des plans α, β tangents à la quadrique Q aux points A, B; les plans α, β contenant respectivement les droites a, b, la droite d' rencontre ces deux droites et est donc encore une droite de la congruence linéaire, ce qui achève de démontrer le théorème.

3° Remarque. 1) Dans le troisième cas le théorème peut se démontrer en menant par la droite d deux plans non singuliers θ_1, θ_2 coupant la quadrique Q suivant deux coniques proprement dites γ_1, γ_2. La congruence linéaire $\mathfrak{C}'_1$ établit entre les systèmes plans de supports θ_1, θ_2 une collinéation, dans laquelle, les points où les génératrices rectilignes du système réglé Σ coupent les coniques γ_1, γ_2 sont des points homologues, et, dans laquelle, la droite d étant une droite double, les pôles X_1, X_2 de cette droite pour les deux coniques sont aussi des points homologues; la droite X_1X_2 est donc une droite de la congruence linéaire $\mathfrak{C}'_1$ et la propriété résulte alors de ce que cette droite X_1X_2 est précisément la droite polaire d' de la droite d pour la quadrique Q.
2). On aurait pu également considérer les cônes proprement dits Γ_1, Γ_2 circonscrits à la quadrique Q de deux points non singuliers P_1, P_2 de la droite d; la droite d' est l'intersection des plans polaires de la droite d pour ces deux cônes et ces plans sont des plans homologues des gerbes collinéaires projetant la congruence linéaire $\mathfrak{C}'_1$ des points P_1, P_2.

4° Théorèmes. a. Si la droite d de la congruence linéaire du premier genre $\mathfrak{C}'_1$ n'est ni une génératrice rectiligne ni une tangente d'une quadrique Q appartenant à la congruence, des plans θ_1, θ_2 conjugués pour la quadrique Q menés par la droite d coupent la congruence suivant deux systèmes plans collinéaires dont les couples de points homologues sont des couples de points conjugués pour la quadrique Q.
b. Si la droite d de la congruence linéaire du premier genre $\mathfrak{C}'_1$ n'est ni une génératrice rectiligne ni une tangente d'une quadrique Q appartenant à la congruence, celle-ci est projetée de deux points P_1, P_2 conjugués pour la quadrique Q sur la droite d suivant deux gerbes collinéaires dont les couples de plans homologues sont des couples de plans conjugués pour la quadrique Q.
Il suffit de démontrer le théorème a. Soient Σ le système réglé des génératrices rectilignes de la quadrique Q qui sont des droites de la congruence linéaire $\mathfrak{C}'_1$; γ_1, γ_2 les coniques proprement dites suivant lesquelles les plans θ_1, θ_2 coupent la quadrique Q; X_1, X_2 les pôles de la droite d pour ces coniques, ou les points où la droite polaire d' de la droite d pour la quadrique Q coupe les plans θ_1, θ_2. Le point X_1 est donc le pôle du plan θ_2 et le point X_2 celui du plan θ_1 pour la quadrique Q et la droite $d' \equiv X_1X_2$ est, en outre, une droite de la congruence linéaire $\mathfrak{C}'_1$. Soient encore A_1, A_2 les points où une droite quelconque a de la congruence linéaire $\mathfrak{C}'_1$ coupe les plans θ_1, θ_2 ou deux points homologues quelconques de la collinéation établie entre les plans θ_1, θ_2 par la congruence; B_1, C_1 les points où la droite X_1A_1 coupe la conique γ_1; B_2, C_2 les points où les génératrices rectilignes du système réglé Σ passant par les points B_1, C_1 coupent la conique γ_2.

Les droites X_1A_1 et X_2A_2, les points B_1 et B_2, C_1 et C_2 sont des droites homologues et des couples de points homologues dans la collinéation établie entre les plans θ_1, θ_2 par la congruence linéaire G'_1; les points B_1, C_1 étant sur la droite X_1A_1, les points B_2, C_2 sont sur la droite X_2A_2 et on a

(1) $$(X_1A_1B_1C_1) \overline{\wedge} (X_2A_2B_2C_2).$$

D'autre part, les points X_1 et X_2, B_1 et C_1, B_2 et C_2 sont trois couples de points conjugués pour la quadrique Q; si on désigne par A'_2 le point de la droite B_2C_2 qui est, pour la quadrique Q, le point conjugué du point A_1 de la droite B_1C_1, on a donc

(2) $$(X_1A_1B_1C_1) \overline{\wedge} (X_2A'_2B_2C_2);$$

il en résulte, en vertu de la relation (1) que le point A'_2 est confondu avec le point A_2, ce qui démontre le théorème.

5° 1) Théorèmes. a - *Les plans polaires d'un point non singulier quelconque P pour les quadriques appartenant à une congruence linéaire du premier ou du second genre passent par un même point P_1 de la droite de la congruence linéaire qui passe par le point P.*

b. - *Les pôles d'un plan non singulier quelconque ϖ pour les quadriques appartenant à une congruence linéaire du premier ou du second genre sont dans un même plan ϖ_1 passant par la droite de la congruence linéaire qui est dans le plan ϖ.*

Il suffit de démontrer le premier théorème et on distingue deux cas. 1) Si la congruence linéaire est du premier genre, ses directrices a, b sont deux génératrices rectilignes de même mode de toutes les quadriques qui lui appartiennent et celle de ses droites qui passe par le point P s'appuie sur les droites a, b en des points A, B; le point P_1 est donc le conjugué harmonique du point P par rapport aux points A, B.

2) Si la congruence linéaire est du second genre, elle a une directrice a le long de laquelle les quadriques qui lui appartiennent sont tangentes les unes aux autres et aux droites de la congruence qu'elles n'ont pas pour génératrices rectilignes; le point P_1 est donc le point où la droite de la congruence passant par le point P s'appuie sur la droite a.

2) Remarque. - Dans le cas de la congruence linéaire du premier genre, le théorème (a) peut encore se démontrer comme suit. Soient d la droite de la congruence linéaire passant par le point P; Q_1, Q_2 deux quadriques quelconques appartenant à la congruence linéaire. La droite d est le support de deux feuillées involutives de plans conjugués respectivement pour chacune des quadriques Q_1, Q_2. Ces feuillées ont deux plans conjugués communs θ_1, θ_2. La congruence établit entre les systèmes plans ayant pour supports les plans θ_1, θ_2 une collinéation dans laquelle les points homologues sont conjugués pour les deux quadriques et dans laquelle la droite d est une droite double. Le point P_1 conjugué du point P pour la quadrique Q_1 est donc aussi le conjugué du point P pour la quadrique Q_2, et, par suite, pour toutes les quadriques appartenant à la congruence linéaire considérée.

63. - 1° Théorème. *Les droites d'une congruence linéaire du premier ou du second genre sont les droites doubles dans une infinité de collinéations entre deux espaces superposés.*

Soient P_1, P_2 deux points non singuliers quelconques d'une droite d de la congruence linéaire considérée G_1; ϖ_1 et ϖ_2, ϖ'_1 et ϖ'_2 des couples de plans homologues des gerbes collinéaires obtenues en projetant des points P_1, P_2 la congruence linéaire G_1. Celle-ci coupe les plans ϖ_1 et ϖ_2, ϖ'_1 et ϖ'_2, dont les intersections sont des droites $\varpi_1\varpi_2$, $\varpi'_1\varpi'_2$ de la congruence, suivant deux couples de systèmes plans collinéaires, avec la condition que, dans les deux collinéations, les droites $\varpi_1\varpi'_1$, $\varpi_2\varpi'_2$ sont des droites homologues; ces deux couples de systèmes plans collinéaires établissent donc une collinéation entre deux espaces E_1, E_2 contenant respectivement les plans ϖ_1 et ϖ'_1, ϖ_2 et ϖ'_2. Or toute droite de la congruence linéaire G_1 coupe ϖ_1 et ϖ_2, ϖ'_1 et ϖ'_2 en deux couples de points homologues des

espaces $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ et est donc une droite double de ceux-ci; réciproquement, toute droite double des espaces $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ coupe ϖ_1 et ϖ_2, de même que ϖ'_1 et ϖ'_2, en des points homologues de la collinéation établie par la congruence linéaire $\mathcal{C}_1$ entre les systèmes plans ayant ces plans pour support, elle est donc une droite de la congruence linéaire $\mathcal{C}_1$.

2° Remarque._ On peut déduire de cette démonstration que les droites d'une congruence linéaire du premier genre sont les droites doubles d'un espace involutif gauche. Il suffit de supposer que les points P_1, P_2 sont conjugués pour une quadrique Q appartenant à la congruence linéaire et dont la droite d n'est ni une génératrice rectiligne, ni une tangente; dans ces conditions les plans ϖ_1 et ϖ_2, ϖ'_1 et ϖ'_2 sont deux couples de plans conjugués pour cette quadrique et il en de même des couples de points homologues dans les collinéations existant entre les systèmes plans ayant ces plans pour supports. Il en résulte que les ponctuelles projectives déterminées sur les droites doubles de la collinéation établie entre les espaces $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ sont involutives, et cette collinéation est une involution gauche.

C. Le Cylindroïde.

On considère un faisceau de complexes linéaires ayant pour support une congruence linéaire réelle du premier genre $\mathcal{C}'_1$ dont les directrices sont des droites réelles ou imaginaires a, b.-

64. 1° Définition._ Les axes des complexes linéaires du faisceau sont appelés les axes de la congruence linéaire $\mathcal{C}'_1$.

2° Il résulte d'une propriété générale des complexes linéaires que si r, r_1 sont les distances de deux droites d, d_1 de la congruence linéaire $\mathcal{C}'_1$ à un axe quelconque x de celle-ci et si α, α_1 sont les angles des droites d, d_1 avec la droite x, on a

$$r \tang \alpha = r_1 \tang \alpha_1 .$$

3° Théorème. Toute droite x qui coupe à angle droit trois droites d_1, d_2, d_3, gauches deux à deux, de la congruence linéaire $\mathcal{C}'_1$ est un axe de celle-ci.

En effet, soit d une droite de la congruence linéaire $\mathcal{C}'_1$, gauche aux droites d_1, d_2, d_3, gauche et oblique à la droite x. Il existe un complexe linéaire qui passe par la droite d et qui a la droite x pour axe. Ce complexe linéaire contenant les droites, deux à deux gauches, d_1, d_2, d_3, d de la congruence linéaire $\mathcal{C}'_1$ contient toute celle-ci dont la droite x est donc un axe.

4° Théorème. Tout axe x de la congruence linéaire $\mathcal{C}'_1$ est perpendiculaire aux droites de la congruence qu'il rencontre, il rencontre toutes les droites de la congruence auxquelles il est perpendiculaire et ces droites sont les génératrices rectilignes d'un même mode d'un paraboloïde hyperbolique équilatère dont la droite x est, en outre, la génératrice rectiligne du second mode passant par le sommet du paraboloïde.

Les deux premières parties du théorème sont des propriétés connues des complexes linéaires; la troisième se déduit de la propriété des droites de la congruence linéaire $\mathcal{C}'_1$ rencontrant une droite extérieure à la congruence d'être les génératrices rectilignes d'un système réglé; on peut ajouter que les génératrices rectilignes du second mode du paraboloïde sont les droites conjuguées de la droite x dans les complexes linéaires passant par la congruence linéaire $\mathcal{C}'_1$.

65._ Cas où les directrices a, b de la congruence linéaire $\mathcal{C}'_1$ sont des droites propres.

1° Dans ce cas, la congruence linéaire $\mathcal{C}'_1$ a une seule droite h dans le plan de l'infini. Cette droite h s'appuie sur l'axe x au foyer P du plan de l'infini pour le complexe linéaire du faisceau dont la droite x est l'axe; elle appartient au paraboloïde hyperbolique équilatère des droites de la congruence linéaire $\mathcal{C}'_1$ qui coupent la droite x; le plan $\omega \equiv hx$ est un des plans directeurs de ce paraboloïde; le second plan directeur θ est perpendiculaire à la droite x. Le plan ω est parallèle au plan central de l'espace involutif gauche ε associé à la congruence linéaire $\mathcal{C}'_1$.

2° Les plans passant par la droite k, sont parallèles au plan ω; ils sont les plans diamétraux communs à tous les complexes linéaires du faisceau; les axes de la congruence linéaire G'_1 leur sont parallèles et coupent à angle droit la droite p de la congruence perpendiculaire au plan ω; ils engendrent donc un conoïde droit dont la droite p est l'axe; c'est à ce conoïde qu'on donne le nom de cylindroïde; la droite p s'appelle la droite principale de la congruence linéaire G'_1 dont on sait qu'elle est un axe de symétrie.

3° Théorème. *Toute droite x qui coupe à angle droit la droite p et une droite de la congruence linéaire G'_1 gauche à la droite p est un axe de la congruence.*

Les droites de la congruence linéaire G'_1 qui coupent la droite x engendrent un système réglé Σ. La droite x étant perpendiculaire à la droite p est parallèle au plan ω et s'appuie sur la droite k qui est donc une génératrice rectiligne du système réglé Σ. Celui-ci est ainsi sur un paraboloïde hyperbolique équilatère dont le plan ω est un plan directeur; le second plan directeur est parallèle aux deux droites p, l; les droites de la congruence linéaire G'_1 qui coupent la droite x sont perpendiculaires à cette droite qui est donc un axe de la congruence. — N.B. Le point xp est le sommet du paraboloïde

4° Corollaire. *Les droites perpendiculaires à une droite p et aux rayons successifs d'un faisceau du premier degré dont le support n'est pas sur la droite p et dont le plan ne passe pas par cette droite, sont les génératrices rectilignes d'un cylindroïde.*

Soient A le support et α le plan du faisceau; a la perpendiculaire abaissée du point A sur la droite p; b la droite du plan α qui est perpendiculaire et sécante à la droite p. La droite p est la droite principale de la congruence linéaire ayant les droites a, b pour directrices. Les droites du faisceau de support A dans le plan α sont des droites de cette congruence linéaire et la propriété devient ainsi une conséquence du théorème précédent.

5° N.B. — Lorsque la congruence linéaire détermine un espace involutif gauche qui est rectangulaire, tous les axes sont dans le plan central et le cylindroïde se réduit à ce plan. — On laissera ce cas de côté.

6° Théorème. *Les deux axes de symétrie de la congruence linéaire G'_1, différents de l'axe de symétrie p, sont des axes de la congruence.*

Soient x, y ces deux axes de symétrie. Ils forment avec l'axe de symétrie p un trièdre trirectangle xyp. La droite x est conjuguée à la droite x' à l'infini dans le plan yp pour l'espace involutif gauche ε associé à la congruence linéaire G'_1; de même, la droite y est conjuguée à la droite y' à l'infini dans le plan xp. Les droites de la congruence qui coupent la droite x doivent rencontrer la droite x'; elles sont donc perpendiculaires à la droite x, ce qui démontre le théorème.

7° Théorème. *Le lieu des projections d'un point quelconque sur les axes de la congruence linéaire G'_1 est une conique.*

La droite k est le lieu des foyers $P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots$ du plan ϖ de l'infini pour les complexes linéaires du faisceau. Si d est une droite quelconque du plan ϖ, les droites conjuguées de la droite d pour les complexes linéaires du faisceau sont des diamètres $d_1, d_2, d_3, \ldots$ de ces complexes linéaires et elles engendrent un système réglé Σ_1 passant par d, perspectif à la ponctuelle $k\,(P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots)$ et projectif au faisceau des complexes linéaires. Le système réglé complémentaire est formé de droites de la congruence linéaire G'_1 dont l'une est la droite k. Ces systèmes réglés ont pour support un paraboloïde hyperbolique dont le plan directeur pour les génératrices rectilignes d_i est le plan ω.

Si par un point quelconque A, on mène les droites $d'_1, d'_2, d'_3, \ldots$ parallèles aux droites $d_1, d_2, d_3, \ldots$, elles sont dans un plan parallèle au plan ω et y forment un faisceau perspectif à la ponctuelle $k, (P_1, P_2, P_3, \ldots)$ et, par suite, projectif au système réglé $\Sigma\,(d_1, d_2, d_3, \ldots)$ et au faisceau des complexes linéaires. Dès lors, les plans $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots$ menés par le point A perpendiculairement aux droites $d_1, d_2, d_3, \ldots$ se coupent suivant une droite m perpendiculaire au plan ω et parallèle à la droite p, ils engendrent

une feuillée $m(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots)$ projective au faisceau $A(d'_1, d'_2, d'_3, \ldots)$, au système réglé $\Sigma(d_1, d_2, d_3, \ldots)$ et au faisceau des complexes linéaires.

Le plan μ_i étant perpendiculaire à la droite d_i, son foyer M_i dans le complexe linéaire correspondant Γ_i est la projection du point A sur l'axe x_i du complexe linéaire Γ_i (la droite x_i est perpendiculaire au plan μ_i au point M_i) et il s'agit de démontrer que le lieu du point M_i est une conique.

Soit m_i la droite conjuguée de la droite m dans le complexe linéaire Γ_i. Cette droite m_i passe par le point M_i et engendre un système réglé Σ'_1 passant par la droite m, projectif au faisceau des complexes linéaires, à la feuillée $m(\mu_i)$ et, par suite, au système réglé complémentaire Σ'_2 dont la génératrice rectiligne homologue du point M_i passe par ce point dans le plan μ_i. Le lieu du point M_i est donc le lieu du point d'intersection de deux génératrices rectilignes homologues de deux systèmes réglés complémentaires projectifs l'un à l'autre, ou une ponctuelle du second degré $\gamma(M_i)$ projective aux deux systèmes réglés et au faisceau des complexes linéaires.

8° Remarque. — 1) La démonstration précédente fournit une construction remarquable du cylindroïde. En effet, l'axe x_i du complexe linéaire Γ_i est la droite M_iP_i; or la ponctuelle $h(P_i)$ est projective à la ponctuelle du second degré $\gamma(M_i)$, ces deux formes étant toutes deux projectives au faisceau des complexes linéaires. Le cylindroïde est donc le lieu des droites joignant les points homologues des ponctuelles projectives $h(P_i)$, $\gamma(M_i)$.

2) Corollaire. *Le cylindroïde est une surface de troisième ordre.*

Si t est une droite quelconque, la feuillée $t(P_1, P_2, \ldots)$ coupe le plan de la conique γ suivant un faisceau du premier degré φ projectif à la ponctuelle du second degré $\gamma(M_i)$. Mais si on projette celle-ci de l'un de ses points S, on obtient un faisceau du premier degré φ' projectif au faisceau φ et engendrant avec lui une conique γ' passant par le point S. Les coniques γ, γ' ont trois points communs différents du point S. Chacun de ces points déterminent une génératrice rectiligne du cylindroïde s'appuyant sur la droite t qui a donc trois points communs avec le cylindroïde.

9° 1) Théorème. *La conique γ est une ellipse située sur un cylindre de révolution dont les droites m et p sont deux génératrices rectilignes opposées.*

L'axe x_i du complexe linéaire Γ_i coupe la droite p et le plan px_i est perpendiculaire au plan μ_i. Ces deux plans engendrent des feuillées projectives et le lieu de leur intersection l_i est un cylindre de révolution C dont les droites p et m sont des génératrices rectilignes opposées. La conique γ étant sur un cylindre est une ellipse.

N.B. — Dans le cas d'un espace rectangulaire, la conique γ se réduit à une circonférence dans le plan central.

2) Corollaire. *Le cylindroïde est formé des perpendiculaires abaissées des points de l'ellipse γ sur la droite p.* Tout plan σ perpendiculaire à la droite p coupe l'ellipse γ en deux points conjugués dans l'involution dont la polaire est le grand axe de la conique, le plan σ contient donc deux génératrices rectilignes du cylindroïde et la droite p est une droite double de celle-ci.

3) Le grand axe de l'ellipse γ est la projection de l'axe du cylindre C sur le plan de la conique; le petit axe est dans un plan de section droite du cylindre. Les sommets de l'ellipse γ sont sur quatre génératrices rectilignes du cylindre qui coupent un plan de section droite aux sommets d'un carré. Ces sommets sont projetés de la droite p suivant quatre feuillets d'une feuillée harmonique dont les feuillets conjugués sont perpendiculaires, l'angle de deux feuillets consécutifs valant 45°.

4) Le plan perpendiculaire à la droite p par un sommet du grand axe de la conique γ ne contient qu'une génératrice rectiligne du cylindroïde. Les deux plans obtenus ainsi limitent le cylindroïde et les génératrices qu'ils contiennent sont appelés les génératrices rectilignes limites. Elles déterminent avec la droite p deux plans perpendiculaires et les autres génératrices rectilignes sont projetées deux

par deux de la droite p suivant les feuillets conjugués d'une feuillée involutive ayant ces plans comme plans doubles et ces plans sont des plans de symétrie du cylindroïde.

5) Le plan perpendiculaire à la droite p par le petit axe de l'ellipse γ est équidistant des plans limites; il coupe le cylindroïde suivant deux génératrices rectilignes formant un trièdre trirectangle avec la droite p. Ces génératrices rectilignes sont les seules ayant cette propriété, elles coïncident donc avec les axes de symétrie x, y de la congruence linéaire G'_1 et leur plan est le plan central ω de l'espace involutif gauche; les axes de symétrie de la congruence linéaire G'_1 sont donc aussi des axes de symétrie du cylindroïde.

6) Si $2a_1, 2b_1, 2c_1$ sont les longueurs des axes de l'ellipse γ et la distance des génératrices limites du cylindroïde, on a $c_1^2 = a_1^2 - b_1^2$ et $2c_1$ est la distance focale de l'ellipse γ.

7) Un des plans perpendiculaires à la droite p passe par le point $P = \gamma p$; il coupe l'ellipse γ en un second point Q. La droite PQ est une génératrice rectiligne du cylindroïde et ainsi le plan de l'ellipse γ coupe le cylindroïde suivant une intersection du troisième degré qui est décomposable en la droite PQ et l'ellipse γ. ce plan est tangent au cylindroïde au point Q.

8) Les droites p, m déterminent le cylindre C. Le point A étant un point arbitraire, le cylindre C est un cylindre de révolution quelconque ayant la droite p pour génératrice rectiligne. Donc: Tout cylindre de révolution C dont la droite p est une génératrice rectiligne coupe le cylindroïde suivant une ellipse γ; les génératrices rectilignes limites du cylindroïde sont le lieu des sommets des grands axes des ellipses γ; les axes de symétrie x, y de la congruence linéaire G'_1 sont le lieu des sommets des petits axes de ces ellipses; le plan de toute ellipse γ contient une génératrice rectiligne du cylindroïde et est tangent à la surface au point où cette droite recoupe l'ellipse; les ellipses γ ont la même distance focale égale à la distance des génératrices limites du cylindroïde.

N.B. Le trièdre coordonné $Oxyz$ étant réel et trirectangle, si on considère le cylindroïde comme un conoïde droit ayant l'axe z pour axe et l'ellipse

$$\gamma \equiv x^2 + y^2 - cx\sqrt{2} - cy\sqrt{2} = 0, \quad x + y - z\sqrt{2} = c\sqrt{2}$$

pour directrice, on trouve que son équation est

$$(x^2 + y^2)z - 2cxy = 0 \quad \text{ou} \quad (x+y)^2(z-c) + (x-y)^2(z+c) = 0.$$

10° Lorsque les directrices a, b de la congruence linéaire G'_1 sont réelles, elles sont des génératrices rectilignes du cylindroïde et elles sont symétriques l'une de l'autre par rapport aux droites x, y.

11° 1) Théorème. Trois droites d_1, d_2, d_3 gauches deux à deux qui coupent une droite p à angle droit sont trois génératrices rectilignes d'un cylindroïde qu'elles déterminent et qui a la droite p pour droite double.

Soit u une droite perpendiculaire à d_1 et gauche aux droites p, d_2, d_3. Il y a deux complexes linéaires qui passent par la droite u et ont les droites d_2, d_3 comme axes respectifs. La congruence linéaire commune aux deux complexes linéaires contient les droites u, p et admet les droites d_2, d_3 comme axes, de sorte que la droite p est sa droite principale. Le cylindroïde répondant à la question est celui des axes de cette congruence linéaire.

2) Corollaire. Un même cylindroïde contient les axes d'une simple infinité de congruences linéaires.

Chacune des congruence linéaires correspond à une position différente de la droite u dans le même plan perpendiculaire à la droite d_1.

66. Cas où l'une b des directrices de la congruence linéaire G'_1 est à l'infini dans un plan θ. 1° Si la seconde directrice a est perpendiculaire au plan θ, une rotation de 180° autour de la droite a n'altère pas la congruence linéaire G'_1. Les axes des complexes

linéaires coïncident avec la droite a, les droites a, b étant conjuguées dans chacun des complexes linéaires, alors que la droite b est à l'infini dans les plans perpendiculaires à la droite a.
2°. Si la droite a est oblique au plan θ, les axes des complexes linéaires sont parallèles à la droite a qui est un diamètre pour chaque complexe linéaire. Mais les foyers d'un plan λ perpendiculaire à la droite a pour les complexes linéaires sont sur une droite l de la congruence linéaire G_1', la parallèle à la droite θλ par le point aλ. Les axes de la congruence G_1' forment le faisceau des droites parallèles à la droite a par les points de la droite l.

D. Sur les droites communes à plus de deux complexes linéaires.

67. 1° Intersection de trois complexes linéaires ou d'une congruence linéaire et d'un complexe linéaire. — L'intersection de trois complexes linéaires $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ n'appartenant pas à un même faisceau est formée des droites communes à l'un de ces complexes linéaires et à la congruence linéaire suivant laquelle les deux autres complexes linéaires se coupent. Si la congruence linéaire G_1 commune aux complexes linéaires Γ_2, Γ_3 admet deux directrices distinctes a, b et si la droite a' est la droite conjuguée de la droite a dans le complexe linéaire Γ_1, l'intersection est formée des droites qui coupent les droites a, b, a'. Donc, en général, l'intersection de trois complexes linéaires n'appartenant pas à un même faisceau est un système réglé Σ. Si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et $\Gamma_1=0, \Gamma_2=0, \Gamma_3=0$ sont des paramètres arbitraires et les équations des trois complexes linéaires considérés, le système réglé Σ appartient à tous les complexes linéaires du réseau d'équation

$$\lambda_1 \Gamma_1 + \lambda_2 \Gamma_2 + \lambda_3 \Gamma_3 = 0,$$

et les axes des ∞^1 complexes linéaires spéciaux de ce réseau sont les directrices du système réglé Σ ou les génératrices rectilignes du système réglé complémentaire du système réglé Σ.
2° Intersection de quatre complexes linéaires, ou d'une congruence linéaire et de deux complexes linéaires, ou de deux congruences linéaires. En exprimant que les coordonnées x_{ij} ou ξ_{ij} d'une droite x vérifient les équations $\Gamma_1=0, \Gamma_2=0, \Gamma_3=0, \Gamma_4=0$ de quatre complexes linéaires et la relation

$$x_{12}x_{34}+x_{13}x_{42}+x_{14}x_{23}=0 \quad \text{ou} \quad \xi_{12}\xi_{34}+\xi_{13}\xi_{42}+\xi_{14}\xi_{23}=0,$$

on obtient un système de cinq équations dont les relations sont les coordonnées des droites répondant à la question. Les quatre premières équations sont linéaires et la cinquième est du second degré. L'intersection est donc, en général, formée de deux droites ; ces droites sont alors les seules qui rencontrent les directrices des congruences linéaires $(\Gamma_1\Gamma_2), (\Gamma_3\Gamma_4)$. Si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ sont quatre paramètres arbitraires, les deux droites sont communes à tous les complexes linéaires représentés par l'équation

$$\lambda_1\Gamma_1 + \lambda_2\Gamma_2 + \lambda_3\Gamma_3 + \lambda_4\Gamma_4 = 0,$$

et elles sont les directrices de la congruence linéaire formée des axes, en nombre doublement infini, des complexes linéaires spéciaux de ce système triplement infini de complexes linéaires.
3° Cas de cinq complexes linéaires. — Si λ_i et $\Gamma_i=0$, $(i=1,2,3,4,5)$, sont cinq paramètres arbitraires et les équations de cinq complexes linéaires, le système quadruplement infini d'équation

$$(1) \qquad \lambda_1\Gamma_1 + \lambda_2\Gamma_2 + \lambda_3\Gamma_3 + \lambda_4\Gamma_4 + \lambda_5\Gamma_5 = 0$$

contient un nombre triplement infini de complexes linéaires spéciaux. Il est facile de montrer que les axes de ces complexes linéaires spéciaux sont les droites d'un complexe linéaire. En effet, si on écrit l'équation (1) sous la forme

(2) $$\Sigma\left(\lambda_1 A^1_{ij}+\lambda_2 A^2_{ij}+\lambda_3 A^3_{ij}+\lambda_4 A^4_{ij}+\lambda_5 A^5_{ij}\right)X_{kl}=0,$$

les coordonnées de l'axe d'un complexe linéaire spécial défini par cette équation sont

(3) $$X_{ij}=\lambda_1 A^1_{ij}+\lambda_2 A^2_{ij}+\lambda_3 A^3_{ij}+\lambda_4 A^4_{ij}+\lambda_5 A^5_{ij}$$

pourvu que

(4) $$\sum_{ij,kl}{}'\left(\sum_2 \lambda_2 A^2_{ij}\right)\left(\sum_2 \lambda_2 A^2_{kl}\right)=0.$$

Le lieu des axes des complexes linéaires spéciaux du système (1) est donc le complexe linéaire d'équation

(5) $$\left|X_{ij}\quad A^1_{ij}\quad A^2_{ij}\quad A^3_{ij}\quad A^4_{ij}\quad A^5_{ij}\right|=0.$$

Comme les droites communes aux cinq complexes linéaires $\Gamma_1,\ldots\ldots,\Gamma_5$ devraient appartenir à tous les complexes linéaires représentés par l'équation (1) et, en particulier, à tous les complexes linéaires spéciaux représentés par cette équation, elles couperaient toutes les droites du complexe linéaire (5); donc, en général, cinq complexes linéaires n'ont aucune droite commune.

N.B.– Cette dernière propriété résulte aussi de ce que les coordonnées d'une droite commune à cinq complexes linéaires devraient vérifier six équations homogènes.

4° Cas de six complexes linéaires.– Le système quintuplement infini des complexes linéaires représentés par l'équation

$$\lambda_1\Gamma_1+\lambda_2\Gamma_2+\lambda_3\Gamma_3+\lambda_4\Gamma_4+\lambda_5\Gamma_5+\lambda_6\Gamma_6=0$$

contient un nombre quadruplement infini de complexes linéaires spéciaux dont les axes sont, en général, toutes les droites de l'espace.

E.– Note sur le complexe tétraédral.

66.– 1° Problème. Evaluer le rapport anharmonique des points A',B',C',D' où la droite x définie par deux points X,Y coupe les faces du tétraèdre $ABCD\equiv\alpha\beta\gamma\delta$ adopté pour tétraèdre fondamental des coordonnées quaternaires.

Si X_i, Y_i $(i=1,2,3,4)$ sont les coordonnées des points X,Y, celles d'un point arbitraire Z de la droite x sont

(1) $$Z_i=\lambda_1 X_i+\lambda_2 Y_i,$$

λ_1,λ_2 étant des paramètres arbitraires ou les coordonnées binaires du point Z sur la droite x dans un système de coordonnées dont les points X,Y sont les deux premiers points fondamentaux. En faisant successivement $i=1,2,3,4$ dans l'équation

(2) $$\lambda_1 X_i+\lambda_2 Y_i=0,$$

on obtient successivement les coordonnées binaires $(Y_i,-X_i)$ des points A',B',C',D' sur la droite x. On a donc

(3) $$(A'B'C'D')=\frac{\begin{vmatrix}X_1 & X_3\\ Y_1 & Y_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}X_3 & X_2\\ Y_3 & Y_2\end{vmatrix}}:\frac{\begin{vmatrix}X_1 & X_4\\ Y_1 & Y_4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}X_4 & X_2\\ Y_4 & Y_2\end{vmatrix}}\quad\text{ou}\quad (A'B'C'D')=\frac{x_{13}}{x_{32}}:\frac{x_{14}}{x_{42}},\qquad (3)^{bis}$$

si x_{ij} sont les coordonnées ponctuelles de la droite x.

2° Corollaire 1. Si $\alpha',\beta',\gamma',\delta'$ sont les plans déterminés par la droite $x\equiv\xi\eta$ et les sommets du tétraèdre, on a

(4) $$(\alpha'\beta'\gamma'\delta')=\frac{\xi_{13}}{\xi_{32}}:\frac{\xi_{14}}{\xi_{42}}$$

3° Corollaire. 2.– Si les droites $x \equiv XY$, $x \equiv \xi\eta$ coïncident, on a

(5) $$(A'B'C'D') = (\alpha'\beta'\gamma'\delta').$$

En effet, on a

(6) $$X_{13}X_{42} : X_{14}X_{32} = \xi_{13}\xi_{42} : \xi_{14}\xi_{32}$$

puisque

(7) $$X_{12}:X_{13}:X_{14}:X_{34}:X_{42}:X_{23} = \xi_{34}:\xi_{42}:\xi_{23}:\xi_{12}:\xi_{13}:\xi_{14}.$$

4° Définition du complexe tétraédral.– Le complexe tétraédral est formé des droites x pour lesquelles la valeur commune des rapports anharmoniques $(A'B'C'D')$, $(\alpha'\beta'\gamma'\delta')$ a une valeur constante donnée arbitrairement. Son équation est

(8) $$X_{13}X_{42} + k X_{14}X_{32} = 0 \quad \text{ou} \quad \xi_{13}\xi_{42} + k\,\xi_{14}\xi_{32} = 0,$$

si k est la constante donnée.

5° Théorème. Les droites des gerbes A, B, C, D et celles des systèmes plans $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ appartiennent au complexe tétraédral.

En effet, les coordonnées d'une droite x issue du point A se tirent du tableau

(9) $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \end{vmatrix}$$

de sorte qu'ayant $X_{12} = X_{13} = X_{14} = 0$, elles vérifient l'équation (8).

6° Théorème. Les droites du complexe tétraédral issues d'un point X sont les génératrices rectilignes d'un cône du second degré circonscrit au tétraèdre $ABCD$ et celles qui sont dans un plan quelconque ξ sont tangentes à une conique inscrite dans le tétraèdre $\alpha\beta\gamma\delta$.

L'équation (8) est en coordonnées courantes Y_i l'équation du cône des droites issues du point X qui appartiennent au complexe tétraédral; la propriété résulte de ce que cette équation est du second degré par rapport aux coordonnées Y_i et de ce qu'elle est vérifiée par les coordonnées des points A, B, C, D, et aussi en vertu du théorème précédent.

7° Corollaire. Les droites du complexe tétraédral issues d'un point d'une des faces du tétraèdre $ABCD$ forment deux faisceaux dont l'un est dans la face considérée et l'autre, dans un plan passant par le sommet opposé à cette face. Les droites du complexe tétraédral qui sont dans un plan passant par un sommet du tétraèdre $\alpha\beta\gamma\delta$ forment deux faisceaux dont l'un a le sommet considéré pour support et dont l'autre a son support dans la face opposée au même sommet. A cause de cela, on dit que le tétraèdre $ABCD \equiv \alpha\beta\gamma\delta$ est la surface singulière du complexe tétraédral.

8° Théorème. Le complexe tétraédral peut être considéré comme le lieu des droites qui coupent les rayons homologues de deux faisceaux projectifs et non perspectifs qui sont dans deux plans différents et n'ont pas leurs supports sur l'intersection des deux plans.

Si A'', B'' sont les points où les droites BA', AB' coupent l'arête CD du tétraèdre $ABCD$, on a

(10) $$x\,(A'B'C'D') = AB\,(A''B''CD) = k;$$

les points A'', B'' décrivent sur la droite CD des ponctuelles projectives dont les points C, D sont les points doubles. Les droites BA'', AB'' engendrent des faisceaux projectifs et les droites x du complexe tétraédral s'appuient sur des rayons homologues de ces deux faisceaux

9°) Théorème. Si deux plans collinéaires superposés n'ont que trois points doubles P_1, P_2, P_3, ces points sont les sommets d'un triangle, et si X, X' sont deux points homologues quelconques de ces systèmes plans, le rapport anharmonique $X(P_1 P_2 P_3 X')$ est constant.

Soient X et X', Y et Y' deux couples de points homologues; γ, γ' les coniques $P_1P_2P_3XY$, $P_1P_2P_3X'Y'$. On a

$$(11) \qquad \gamma(P_1P_2P_3XY) \,\overline{\wedge}\, \gamma'(P_1P_2P_3X'Y'),$$

d'où on déduit, si P est le quatrième point commun aux deux coniques

$$(12) \qquad P(P_1P_2P_3XY) \,\overline{\wedge}\, P(P_1P_2P_3X'Y');$$

les points X', Y' sont donc sur les droites PX, PY et la relation

$$(13) \qquad X(P_1P_2P_3P) \,\overline{\wedge}\, Y(P_1P_2P_3P)$$

fournie par la conique γ peut s'écrire

$$(14) \qquad X(P_1P_2P_3X') \,\overline{\wedge}\, Y(P_1P_2P_3Y')$$

ce qui prouve le théorème.

2) Théorème. *Un complexe tétraédral peut être considéré comme formé des droites qui, passant par les points d'un système plan, coupent les rayons homologues de ces points dans une gerbe collinéaire au système plan.*

Soient A'_1 le point où une droite particulière x_1 du complexe tétraédral coupe le plan BCD et A''_1 un point particulier de l'intersection des plans BCD, Ax_1. Considérons dans le plan BCD la collinéation dont les points B, C, D sont les points doubles et les points A'_1, A''_1 deux points homologues. Soient A'_2, A''_2 deux points homologues quelconques de cette collinéation. Le théorème sera démontré si on prouve que la droite x_2 qui joint le point A'_2 à un point quelconque de la droite AA''_2 est une droite du complexe tétraédral. Or la droite x_1 étant dans le plan $AA'_1A''_1$ et la droite x_2 dans le plan $AA'_2A''_2$, on a

$$(15) \qquad x_1(ABCD) = A'_1(A''_1BCD) \qquad\qquad x_2(ABCD) = A'_2(A''_2BCD).$$

Mais on vient de démontrer que

$$(16) \qquad A'_1(A''_1BCD) = A'_2(A''_2BCD);$$

on a donc $x_1(ABCD) = x_2(ABCD)$, ce qui justifie le théorème.

10° 1) Théorème. *Le complexe tétraédral peut être considéré comme formé des droites joignant les points homologues de deux espaces collinéaires superposés n'ayant que quatre points doubles, sommets d'un tétraèdre.*

En vertu du 1°, l'équation (8) peut s'écrire

$$(17) \qquad k = \begin{vmatrix} X_1 & X_3 \\ Y_1 & Y_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X_4 & X_2 \\ Y_4 & Y_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} X_1 & X_4 \\ Y_1 & Y_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X_3 & X_2 \\ Y_3 & Y_2 \end{vmatrix},$$

et ce théorème résulte de ce que cette équation est vérifiée si on y fait

$$(18) \qquad Y_1 = k_1X_1, \qquad Y_2 = k_2X_2, \qquad Y_3 = k_3X_3, \qquad Y_4 = k_4X_4,$$

k_1, k_2, k_3, k_4 étant des constantes telles qu'on ait

$$(19) \qquad (k_1k_2k_3k_4) = k.$$

2) Exemple. — *Les droites joignant les pôles d'un plan quelconque par rapport à deux quadriques données non dégénérées sont les droites d'un complexe tétraédral et chacune de ces droites est le lieu des pôles d'un même plan pour les quadriques du faisceau tangentiel auquel appartiennent les deux quadriques données.*

Cas particulier. — Si les quadriques données sont une quadrique quelconque Q et la circonférence imaginaire de l'infini ω, le faisceau tangentiel auquel appartiennent ces deux quadriques est le faisceau des quadriques homofocales à la quadrique Q. Le lieu des pôles d'un plan par rapport

à ces quadriques homofocales est une droite perpendiculaire au plan considéré et le lieu de cette droite lorsque le plan varie est un complexe tétraédral dont le tétraèdre singulier a pour sommets le centre commun des quadriques et les points à l'infini sur leurs axes. Les normales aux quadriques homofocales considérées appartiennent à ce complexe tétraédral et il en est de même des axes de l'une quelconque des coniques tracées sur n'importe laquelle des quadriques.

F. Exemple d'un second complexe du second ordre et de la seconde classe : le complexe des tangentes à une quadrique.

67. Soient $\Sigma a_{ij} X_i X_j = 0$ l'équation ponctuelle d'une quadrique donnée Q; ξ, η les plans polaires des points X, Y pour cette quadrique. On a

$$(1) \qquad \xi_i = \sum_j a_{ij} X_j, \qquad \eta_i = \sum_j a_{ij} Y_j.$$

Les coordonnées des droites $x \equiv XY$, $y \equiv \xi\eta$ sont

$$(2) \qquad X_{ij} = \begin{vmatrix} X_i & X_j \\ Y_i & Y_j \end{vmatrix}, \qquad \eta_{ij} = \begin{vmatrix} \xi_i & \xi_j \\ \eta_i & \eta_j \end{vmatrix} = \sum_{r,s} \begin{vmatrix} a_{ir} & a_{jr} \\ a_{is} & a_{js} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_r & X_s \\ Y_r & Y_s \end{vmatrix} = \sum_{rs} \begin{vmatrix} a_{ir} & a_{jr} \\ a_{is} & a_{js} \end{vmatrix} X_{rs}$$

Pour que la droite x soit tangente à la quadrique Q, il faut et il suffit qu'elle coupe la droite y, c'est-à-dire que

$$(3) \qquad \sum_{ij} X_{ij} \eta_{ij} = 0;$$

les tangentes à la quadrique Q forment donc le complexe d'équation

$$(4) \qquad \Sigma_{ij} \Sigma_{rs} \begin{vmatrix} a_{ir} & a_{jr} \\ a_{is} & a_{js} \end{vmatrix} X_{ij} X_{rs} = 0.$$

Cette équation peut se mettre sous une autre forme. Si ξ, η sont des plans passant par une tangente à la quadrique Q au point X, les coordonnées du plan tangent en ce point peuvent s'écrire $\lambda_1 \xi_i + \lambda_2 \eta_i$. On a donc à la fois

$$(5) \qquad \sum_j a_{ij} X_j = \lambda_1 \xi_i + \lambda_2 \eta_i, \qquad \sum_j \xi_j X_j = 0, \qquad \sum_j \eta_j Y_j = 0$$

et l'équation du complexe considéré peut se mettre sous la forme

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \xi_1 & \eta_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \xi_2 & \eta_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \xi_3 & \eta_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \xi_4 & \eta_4 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 & 0 & 0 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

avec $a_{ij} = a_{ji}$.

Les droites de ce complexe qui sont issues d'un même point sont les génératrices rectilignes du cône circonscrit à la quadrique ayant le point considéré pour sommet (cône du complexe pour ce point), et celles qui sont dans un même plan sont tangentes à la conique suivant laquelle le plan coupe la quadrique (courbe du complexe pour ce plan).

§II. Congruence $G_{1,2}$ du premier ordre et de la seconde classe, et congruence $G_{2,1}$ du second degré et de la première classe.

A. Préliminaires.

68. 1° Congruences du premier ordre. - L'ensemble des droites suivant lesquelles se coupent les plans homologues distincts de deux gerbes collinéaires ayant des supports différents P, P_1 est une forme géométrique désignée sous le nom de congruence du premier ordre et dont la nature dépend du nombre des plans doubles ou unis des deux gerbes. Quatre cas sont à considérer.

1) Si les deux gerbes ont une droite unie, support d'une feuillée unie, elles sont perspectives et la congruence est composée des droites d'un plan, le plan de perspectivité des deux gerbes.

2) Si les deux gerbes ont une droite unie et deux feuillets unis, distincts ou confondus, la congruence est la congruence linéaire ou la congruence du premier ordre et de la première classe (G_1 ou $G_{1,1}$) étudiée dans le paragraphe précédent (§ II).

3) Si les gerbes ont un feuillet uni, sans que la droite PP_1 soit une droite unie, la congruence est dite du premier ordre et de la seconde classe, et se désigne par la notation $G_{1,2}$.

4) Si les gerbes n'ont aucun élément uni, la congruence est dite du premier ordre et de la troisième classe, et désignée par la notation $G_{1,3}$.

2° Congruences de la première classe. Par réciprocité, l'ensemble des droites joignant les points homologues distincts de deux systèmes plans collinéaires de supports différents ϖ, ϖ_1 est une gerbe, une congruence linéaire (G_1 ou $G_{1,1}$), une congruence du second ordre et de la première classe ($G_{2,1}$), ou une congruence du troisième ordre et de la première classe ($G_{3,1}$).

3° Points singuliers et plans singuliers des congruences. - Un point ou un plan sont dits singuliers si le point appartient à une infinité de droites de la congruence ou si le plan contient une infinité de telles droites.

B. - Congruence $G_{1,2}$. -

69. 1° Notations. 1) On considère la congruence $G_{1,2}$ du premier ordre et de la seconde classe composée des droites d'intersection des plans homologues distincts de deux gerbes collinéaires de supports différents, étant donné que la droite PP_1 n'est pas une droite unie et que les deux gerbes ont un plan uni θ, lequel passe nécessairement par la droite PP_1.

2) On désigne la droite PP_1 par a ou b_1 suivant qu'on suppose qu'elle appartient à la gerbe P ou à la gerbe P_1 et on désigne par a_1, b les droites homologues dans les gerbes P_1, P.

N.B. Les droites $a \equiv b_1$ étant dans le plan θ qui est un plan uni des deux gerbes, les droites a_1, b sont aussi dans ce plan, mais elles diffèrent toutes deux de la droite PP_1 qui n'est pas une droite unie. Le faisceau de support P dans le plan θ a pour homologue le faisceau de support P_1 dans le même plan. ces faisceaux sont projectifs et non perspectifs.

2° Théorème. Le lieu des points d'intersection des rayons homologues des gerbes P, P_1 dans le plan θ est une conique C^2 tangente aux droites a_1, b aux points P_1, P.

La conique C^2 est le lieu du point d'intersection X des rayons homologues x, x_1 des faisceaux homologues dont il vient d'être question ci-dessus (1°, 2, N.B), ayant les points P, P_1 pour supports dans le plan θ. Elle est définie par la projectivité

$$P(a, b, x) \pi P_1(a_1, b_1, x_1),$$

d'où il résulte qu'elle est tangente aux droites a_1, b aux points P_1, P.

3° 1) Théorème. Tout plan différent du plan θ, mené par la droite PP_1, contient deux droites de la congruence $G_{1,2}$ distinctes de la droite PP_1; ces droites sont des droites

homologues des gerbes P, P_1 et, quand leur plan tourne autour de la droite PP_1, elles parcourent des faisceaux dont les plans ω, ω_1 sont des plans homologues des gerbes P, P_1; le plan ω ne passe ni par la droite a ni par la droite b, le plan ω_1 ne passe ni par la droite a_1 ni par la droite b_1.

Ayant mené un plan différent du plan θ par la droite $PP_1 \equiv a \equiv b_1$, on le désigne par α ou β_1 selon qu'on le considère comme appartenant à la gerbe P et à la feuillée ayant la droite a pour support, ou à la gerbe P_1 et à la feuillée ayant la droite b_1 pour support. Les plans homologues respectivement dans les gerbes P_1, P sont des plans α_1, β des feuillées ayant les droites a_1, b pour supports. Les droites $d \equiv \alpha\beta \equiv \beta_1\beta$, $d_1 \equiv \alpha_1\beta_1 \equiv \alpha_1\alpha$ sont donc, à la fois, des droites homologues des gerbes P, P_1 et des droites de la congruence $G_{1,2}$ passant respectivement par les points P, P_1 dans le plan $\alpha \equiv \beta_1$. Lorsque ce plan tourne autour de la droite $PP_1 \equiv a \equiv b_1$, les plans α_1, β tournent autour des droites a_1, b et, en vertu de la collinéation donnée entre les gerbes P, P_1, on a les couples de feuillées projectives

$$(1) \qquad a(\alpha)\,\pi\, a_1(\alpha_1) \qquad\qquad b(\beta)\,\pi\, b_1(\beta_1).$$

La feuillée $a(\alpha)$ étant identique à la feuillée $b_1(\beta_1)$, on a aussi

$$(2) \qquad a(\alpha)\,\pi\, b(\beta), \qquad\qquad a_1(\alpha_1)\,\pi\, b_1(\beta_1)$$

et la propriété résulte maintenant de ce que le plan θ est un feuillet uni dans chacune des projectivités (1) et (2).

2) Corollaire. Les droites d, d_1 se coupent en un point D de la droite $p \equiv \omega\omega_1$; cette droite p est une droite de la congruence $G_{1,2}$, elle est gauche à la droite PP_1 et elle rencontre le plan θ en un point $R \equiv p\theta \equiv \omega\omega_1\theta$ de la conique C^2.

Le point $R \equiv p\theta \equiv \omega\omega_1\theta$ est un point de la conique C^2 parce que les droites $r \equiv \omega\theta$, $r_1 \equiv \omega_1\theta$ sont des droites homologues des gerbes P, P_1 dans le plan θ.

N.B. Les droites r, r_1 sont les seules droites des faisceaux ayant les points P, P_1 pour supports dans les plans ω, ω_1 qui n'appartiennent pas à la congruence $G_{1,2}$; elles sont dans le plan uni θ des gerbes P, P_1 et aucune des deux n'est l'intersection de deux plans homologues distincts.

4° 1) Théorème. Toute droite de la congruence $G_{1,2}$ doit s'appuyer sur la droite p et sur la conique C^2.

a. Si la droite considérée d passe par le point P, elle coupe la conique C^2 en ce point et elle coupe la droite p en un point D différent du point P, parce qu'elle est dans le plan ω qui passe par la droite p et que la droite p ne passe pas par le point P. Si la droite d coïncide avec la droite r, le point D devient le point R.

b. Si la droite considérée d_1 passe par le point P_1, elle coupe la conique C^2 en ce point et la droite p en un point différent D lequel est le point R quand la droite d_1 est la droite r_1.

c. Si la droite considérée m ne passe ni par le point P ni par le point P_1, elle est l'intersection des plans $\mu \equiv Pm$, $\mu_1 \equiv P_1m$ qui sont des plans homologues des gerbes P, P_1. Ces plans coupent le plan θ suivant des droites x, x_1 qui sont des droites homologues des gerbes P, P_1 dans le plan uni θ et dont le point d'intersection X est donc le point de la conique C^2 commun à celle-ci et à la droite m. Si le point X coïncide avec le point R, la droite rencontre également la droite p en ce point. Si le point X est différent du point R, les plans μ, μ_1 coupent les plans ω, ω_1 suivant les droites homologues d, d_1 des gerbes P, P_1; les droites d, d_1 appartiennent à la congruence $G_{1,2}$ et coupent la droite p au point D (3°, 2) qui, dans ce cas est le point où la droite m s'appuie sur la droite p.

2) Corollaire. Toute droite qui s'appuie sur la conique C^2 est sur la droite p en des

points différents du point R, est une droite de la congruence $G_{1,2}$; tout point D différent du point R sur la droite p est un point singulier de la congruence $G_{1,2}$ dont les droites issues du point considéré D sont les génératrices rectilignes du cône du second ordre Γ^2 projetant la conique C^2 du point D ; tout point X différent du point R sur la conique Γ^2 est un point singulier de la congruence $G_{1,2}$ dont les droites issues du point X sont les droites du faisceau ayant le point X pour support dans le plan $\xi \equiv Xp$ à l'exception de la droite $XR \equiv \xi\theta$.

3) **Théorème.** Les droites de la congruence $G_{1,2}$ issues du point R sont les droites du faisceau ayant ce point pour support dans le plan σ déterminé par la droite p et la tangente t à la conique C^2 au point R, à l'exception de la droite t.

Si λ, λ_1 sont des plans homologues des gerbes P, P_1 menés par les droites homologues $r \equiv PR$, $r_1 \equiv P_1R$, la droite $l \equiv \lambda\lambda_1$ est une des droites de la congruence $G_{1,2}$ passant par le point R. Les feuillées projectives engendrées par les plans λ, λ_1 en tournant autour des droites r, r_1 ont le plan θ comme plan uni ; elles sont donc perspectives et leur plan de perspectivité σ passe par la droite p, les plans ω, ω_1 étant des positions correspondantes des plans λ, λ_1 et la droite $p \equiv \omega\omega_1$ une position de la droite $l \equiv \lambda\lambda_1$. D'autre part, si le plan σ ne passait pas par la droite t, il recouperait la conique C^2 en un point N différent du point R et il contiendrait un second faisceau de droites de la congruence $G_{1,2}$, les droites projetant du point N les points de la droite p ; chaque point du plan σ serait l'intersection de deux droites de la congruence $G_{1,2}$ et, par suite, de deux droites homologues des gerbes P, P_1 ; ces gerbes seraient donc perspectives, ce qui est contraire à l'hypothèse. Le plan σ est donc déterminé par les droites t et p.

4) **Corollaires.** a.- Les droites de la congruence $G_{1,2}$ sont les droites du faisceau de support R dans le plan σ et celles projetant la conique C^2 des points différents du point R sur la droite p.

b.- Tout point différent des points singuliers et extérieur au plan θ n'appartient qu'à une seule droite de la congruence $G_{1,2}$ et c'est pour cette raison que cette congruence est dite du premier ordre.

c.- Tout plan différent du plan θ et des plans singuliers (les plans passant par la droite p) ne contient que deux droites de la congruence $G_{1,2}$ et c'est pour cette raison que cette congruence est dite de la seconde classe.

5° 1) **Théorème.** Toute gerbe projetant les droites de la congruence $G_{1,2}$ d'un point P_2 différent du point R sur la conique C^2 est collinéaire aux gerbes collinéaires données P, P_1.

Soient X, D des points arbitraires différents du point R sur la conique C^2 et sur la droite p. La droite $m \equiv XD$ est une droite quelconque de la congruence $G_{1,2}$ et la collinéation entre les gerbes P, P_2 est assurée par les faisceaux projectifs $P(X)$, $P_2(X)$, les faisceaux projectifs $P(D)$, $P_2(D)$ et la condition que les droites $r \equiv PR$, $r_2 \equiv P_2R$ sont des droites homologues dans les deux projectivités.

2) **Corollaire.** - Si une droite p extérieure au plan de la conique C^2 rencontre celle-ci en un point R, les droites qui coupent la conique C^2 et la droite p en des points différents du point R et celles issues de ce point dans le plan σ de la droite p et de la tangente t à la conique C^2 au point R, sont, à l'exception de la droite t, les droites d'une congruence $G_{1,2}$ du premier ordre et de la seconde classe.

70. **Détermination analytique de la congruence $G_{1,2}$.** - 1° Rapportons la congruence $G_{1,2}$ définie par les gerbes collinéaires P, P_1 (n° 69) à des coordonnées quaternaires dont les éléments fondamentaux $(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$ sont placés de telle façon que les points P, P_1 et les droites a, a_1, b, b_1 coïncident avec les points A_1, A_2 et avec les droites A_1A_2, A_2A_3, A_1A_3, A_2A_1 ; on peut en outre supposer que les droites A_1A_4 et A_2A_4, A_1A_5 et A_2A_5 sont des droites homologues

des deux gerbes ou des droites de la congruence $G_{1,2}$, tout plan passant par les droites $PP_1 \equiv A_1 A_2$ et différent du plan $\theta \equiv A_1 A_2 A_3$ contenant deux telles droites.

2° - En mettant les équations des droites passant par les points A_1, A_2 sous la forme

(1) $$X_2 : m_1 = X_3 : m_2 = X_4 : m_3 , \qquad X_1 : m'_1 = X_3 : m'_2 = X_4 : m'_3 ,$$

les nombres m_1, m_2, m_3 et m'_1, m'_2, m'_3 sont les coordonnées ternaires de ces droites dans les gerbes $A_1 \equiv P$, $A_2 \equiv P_1$ rapportées aux éléments fondamentaux $A_1(A_2, A_3, A_4, A_5)$, $A_2(A_1, A_3, A_4, A_5)$. Les équations générales des collinéations entre les deux gerbes sont

$$m'_1 = a_{11} m_1 + a_{12} m_2 + a_{13} m_3 , \qquad m'_2 = a_{21} m_1 + a_{22} m_2 + a_{23} m_3 , \qquad m'_3 = a_{13} m_1 + a_{23} m_2 + a_{33} m_3 ;$$

en tenant compte des hypothèses, elles se réduisent à

(2) $$m'_1 = m_2 \qquad m'_2 = m_1 , \qquad m'_3 = m_3 .$$

3° - Si k_1, k_2, k_3 et k'_1, k'_2, k'_3 sont les coordonnées de deux plans homologues, on a donc

(3) $$k_1 = k'_2 , \qquad k_2 = k'_1 , \qquad k_3 = k'_3$$

les équations quaternaires de ces plans sont

(4) $$k_1 X_2 + k_2 X_3 + k_3 X_4 = 0 , \qquad k_2 X_1 + k_1 X_3 + k_3 X_4 = 0$$

et leurs coordonnées quaternaires sont $(0, k_1, k_2, k_3)$, $(k_2, 0, k_1, k_3)$.

4° Lorsque $k_1 = k_2 = 0$, les plans (4) coïncident avec le plan $\theta \equiv A_1 A_2 A_3$ et cette hypothèse doit être écartée.

5° Lorsque k_1 ou $k_2 \neq 0$, les plans (4) diffèrent du plan $\theta \equiv A_1 A_2 A_3$ et se coupent suivant une droite de la congruence $G_{1,2}$ ayant pour coordonnées les six quantités ξ_{ij} définies par les relations

(5) $$\xi_{12} = k_1 k_2 , \quad \xi_{13} = k_2^2 , \quad \xi_{14} = k_2 k_3 , \quad \xi_{34} = k_1 k_3 - k_2 k_3 , \quad \xi_{42} = k_1 k_3 , \quad \xi_{23} = - k_1^2$$

et on a ξ_{13} ou $\xi_{23} \neq 0$; de plus, le point A_4 étant un point quelconque, on peut supposer, sans troubler la généralité des raisonnements, que les plans (4) ne passent pas par ce point et que $a_3 \neq 0$; on a donc aussi ξ_{14} ou $\xi_{42} \neq 0$.

6° Ayant ξ_{13} ou $\xi_{23} \neq 0$, il résulte des deux premières et de la dernière des relations (5) que toutes les droites de la congruence $G_{1,2}$ font partie du complexe quadratique C^2 d'équations

(6) $$\xi_{13} \xi_{23} + \xi_{12}^2 = 0 \quad \text{ou} \quad X_{42} X_{14} + X_{34}^2 = 0 . \qquad (7)$$

or les coordonnées X_{14}, X_{24}, X_{34} d'une droite quelconque sont les coordonnées ternaires X_1, X_2, X_3 dans le triangle $A_1 A_2 A_3$ du point où la droite coupe le plan de ce triangle ; le complexe quadratique C^2 est donc composé des droites s'appuyant sur la conique dont l'équation dans le plan $A_1 A_2 A_3$ est

(8) $$X_1 X_2 - X_3^2 = 0 ;$$

cette conique est tangente aux droites $A_1 A_3 \equiv b$, $A_2 A_3 \equiv a_1$ aux points $A_1 \equiv P$, $A_2 \equiv P_1$; et, en vertu des équations (1) et (2), elle est la conique C^2, lieu des points d'intersection des droites homologues des gerbes P, P_1 dans le plan $\theta \equiv A_1 A_2 A_3$.

7° D'autre part, pour que les droites (5) appartiennent au complexe linéaire d'équation

(9) $$A_{12} \xi_{12} + A_{13} \xi_{13} + A_{14} \xi_{14} + A_{34} \xi_{34} + A_{42} \xi_{42} + A_{23} \xi_{23} = 0 ,$$

il est nécessaire et suffisant qu'on ait

(10) $$A_{12} k_1 k_2 + A_{13} k_2^2 + \left[(A_{14} - A_{34}) k_2 + (A_{34} + A_{42}) k_1 \right] k_3 - A_{23} k_1^2 = 0 .$$

Deux cas sont à distinguer selon qu'on a

(11) $\mu_1 + \mu_2 \neq 0$ avec $\mu_3 \neq 0$ et $\mu_1 + \mu_2 = 0$ avec $\mu_3 \neq 0$ (12)

ou suivant que les droites cherchées ne passent pas ou passent par le point $R\,(1,1,1,0)$ où la droite $p \equiv A_4 A_5$ coupe la conique C^2.

1) Dans le premier cas, pour que la condition (10) soit remplie, il faut et il suffit qu'on ait

(13) $$A_{12} = A_{13} = A_{23} = 0\,, \qquad A_{14} = A_{34} = -A_{42} = 1.$$

Les droites dont il s'agit maintenant s'appuient donc sur la droite de coordonnées ponctuelles

(14) $$0,\ 0,\ 1,\ 1,\ -1,\ 0$$

ou sur la droite $p \equiv A_4 A_5$.

On voit ainsi que les droites de la congruence $G_{1,2}$ qui ne passent pas par le point R rencontrent la conique C^2 et la droite p en des points différents du point R ou appartiennent à la fois au complexe quadratique c^2 et au complexe linéaire c' d'équations tangentielles

(15) $$\xi_{13}\,\xi_{23} + \xi_{12}^2 = 0, \qquad \xi_{14} + \xi_{34} - \xi_{42} = 0$$

ou d'équations ponctuelles

(16) $$X_{42} X_{14} + X_{34}^2 = 0, \qquad X_{23} + X_{12} - X_{13} = 0;$$

ces droites sont les génératrices rectilignes des cônes du second degré Γ^2 projetant la conique C^2 des points différents du point R sur la droite p.

2) Dans le second cas, pour que la condition (10) soit remplie, il faut et il suffit qu'on ait

(17) $$-A_{12} + A_{13} - A_{23} = 0 \quad \text{et} \quad A_{14} - A_{34} = A_{34} + A_{42}.$$

Or, les conditions (12) expriment que les plans (4) et, par suite, les droites considérées de la congruence $G_{1,2}$ passent par le point R. Les coordonnées ponctuelles d'une droite quelconque passant par le point R se tirent du tableau

(18) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \end{vmatrix}$$

les coordonnées tangentielles d'une telle droite sont donc

(19) $$-X_4,\quad X_4,\quad X_2 - X_3,\quad X_1 - X_2,\quad X_1 - X_3,\quad -X_4.$$

En exprimant que ces nombres vérifient la condition (10), on a

(20) $$(A_{34}+A_{42})\,X_1 + (A_{14}-A_{34})\,X_2 - (A_{14}+A_{42})\,X_3 - (A_{12}-A_{13}+A_{23})\,X_4 = 0,$$

ou

(21) $$X_1 + X_2 - 2X_3 = 0,$$

en vertu des conditions (17) dont la seconde donne

(22) $$A_{14} - A_{34} = A_{34} + A_{42} = \frac{1}{2}\,(A_{14} + A_{42}).$$

L'équation (21) représente le plan σ déterminé par la droite $p \equiv A_4 A_5$ et la tangente t à la conique C^2 au point R; les droites de la congruence $G_{1,2}$ qui passent par le point R sont donc les droites du faisceau ayant ce point comme support dans le plan σ, et on a ainsi retrouvé les résultats obtenus dans le numéro précédent (69).

8° N.B. – En faisant $\mu_3 = 0$, la condition (10) est remplie si on a

(23) $$A_{12} = A_{13} = A_{23} = 0,$$

quels que soient A_{14}, A_{34}, A_{42}; l'équation (9) se réduit à

ϖ

(24) $$A_{14}\xi_{14} + A_{34}\xi_{34} + A_{42}\xi_{42} = 0;$$

elle exprime que les droites cherchées appartiennent à tous les complexes linéaires spéciaux dont l'axe passe par le point A_4; cela n'ajoute donc rien à la détermination de ces droites, la condition $\mu_3 = 0$ exprimant la même propriété; ces droites joignent donc le point A_4 aux points de la conique C^2, à cause du 6°, et on voit bien que les résultats du premier cas du 7° leur sont applicables.

C. Congruence $G_{2,1}$.

71. Les propriétés de la congruence $G_{2,1}$ se déduisent, par réciprocité, de celles de la congruence $G_{1,2}$. Si la droite p est dans le plan tangent P à un cône du second degré Γ^2 qu'elle touche en un point S différent du sommet T du cône, les droites qui passent par le point S dans le plan P et les tangentes aux coniques C^2 suivant lesquelles les plans P passant par la droite p et différents du plan P coupent le cône Γ^2, sont les droites d'une congruence $G_{2,1}$ du second ordre et de la première classe. Les plans singuliers sont les plans tangents au cône Γ^2 et ceux passant par la droite p; les points singuliers sont les points de la droite p. La congruence $G_{2,1}$ est du second ordre, parce que tout point non singulier est sur deux droites de la congruence; elle est de la première classe, parceque tout plan non singulier n'en contient qu'une droite. Les plans tangents au cône Γ^2 et différents du plan P coupent les droites de la congruence $G_{2,1}$ suivant des systèmes plans collinéaires dont le point T est le seul élément uni._

§ III._ Congruence $G_{1,3}$ du premier ordre et de la troisième classe, et congruence $G_{3,1}$ du troisième ordre et de la première classe.

A._ La cubique gauche C^3 lieu des points singuliers de la congruence $G_{1,3}$.

N.B. On ne s'occupera d'abord que des éléments réels; on trouvera ainsi une cubique gauche C^3 et les droites d'une congruence $G_{1,3}$ rencontrant cette courbe en des points réels; on considérera ensuite les droites réelles ou imaginaires qui coupent la courbe C^3 en des points imaginaires conjugués ou non.

Cela permettra de faire une classification des bisécantes d'une cubique gauche réelle, déduite du mode de génération de la courbe dans ses relations avec la congruence $G_{1,3}$. Toutefois, à l'exception de cette classification, les raisonnements et les résultats sont applicables quand on ne fait aucune hypothèse sur la réalité ou la non réalité des éléments.

72. 1° Préliminaires. _1) On considère la congruence $G_{1,3}$, du premier ordre et de la troisième classe, formée des droites d'intersection des plans homologues de deux gerbes collinéaires de supports différents P, P_1, les deux gerbes n'ayant aucun élément uni.

2) D'une manière générale, on désignera par ξ et ξ_1, x et x_1 des plans et des droites homologues des deux gerbes.

3) Les gerbes collinéaires P, P_1 n'ayant aucun élément uni, les droites a_1, b qui correspondent aux droites a, b_1 confondues avec la droite PP_1, sont des droites distinctes l'une de l'autre et de la droite PP_1, les plans homologues $\varpi \equiv ab$, $\varpi_1 \equiv a_1b_1$ sont différents l'un de l'autre et les droites a_1, b sont gauches. Les plans ϖ, ϖ_1 étant des plans homologues des deux gerbes P, P_1, la droite PP_1, suivant laquelle ils se coupent, est une droite de la congruence $G_{1,3}$.

4) Les plans $\rho_1 \equiv \varpi$, $\sigma \equiv \varpi_1$ passant par la droite $PP_1 \equiv a \equiv b_1$, les plans ρ, σ_1 passent respectivement par les droites b, a_1; ces droites $b \equiv \varpi\rho \equiv \rho_1\rho$, $a_1 \equiv \varpi_1\sigma_1 \equiv \sigma\sigma_1$ sont donc des droites de la congruence $G_{1,3}$. De plus, les plans ρ, σ_1 étant les seuls plans des gerbes P, P_1 correspondant aux plans ρ_1, σ des gerbes P_1, P, les droites P_1P et b, PP_1 et a_1 sont les seules droites de la congruence $G_{1,3}$ situées dans les plans $\varpi \equiv \rho_1$, $\varpi_1 \equiv \sigma$.

2° 1) Théorème. Tout plan différent des plans ϖ, ϖ_1 menés par la droite PP_1, contient

deux droites de la congruence $G_{1,3}$ distinctes de la droite PP_1 et issues respectivement des points P, P_1; ces droites sont des droites homologues des gerbes P, P_1 et, quand le plan tourne autour de la droite PP_1, elles engendrent des cônes du second degré Γ_P^2, $\Gamma_{P_1}^2$ qui se correspondent dans la collinéation entre les gerbes P, P_1; ces cônes sont respectivement tangents aux plans $\sigma \equiv \varpi_1$ et ρ, σ_1 et $\rho_1 \equiv \varpi$ suivant les génératrices rectilignes $a \equiv PP_1$ et b, a_1 et $b_1 \equiv P_1P$.
Ayant mené un plan différent des plans ϖ, ϖ_1 par la droite $PP_1 \equiv a \equiv b_1$, on le désigne par α ou β_1 selon qu'on le considère comme appartenant à la gerbe P et à la feuillée ayant la droite a pour support, ou à la gerbe P_1 et à la feuillée ayant la droite b_1 pour support. Les plans α_1, β qui leur correspondent appartiennent aux feuillées ayant les droites a_1, b pour supports.
Les droites $d \equiv \alpha\beta \equiv \beta_1\beta$, $d_1 \equiv \alpha_1\beta_1 \equiv \alpha_1\alpha$ sont des droites homologues des gerbes P, P_1 et des droites de la congruence $G_{1,3}$ issues des points P, P_1 dans le plan $\alpha \equiv \beta_1$. Lorsque ce plan tourne autour de la droite $PP_1 \equiv a \equiv b_1$, les plans α_1, β tournent autour des droites a_1, b et, en vertu de la collinéation donnée entre les gerbes P, P_1, on a les couples de feuillées projectives.

(1) $$a(\alpha)\,\pi\, a_1(\alpha_1), \qquad b(\beta)\,\pi\, b_1(\beta_1).$$

la feuillée $a(\alpha)$ étant identique à la feuillée $b_1(\beta_1)$, on a aussi

(2) $$a(\alpha)\,\pi\, b(\beta), \qquad a_1(\alpha_1)\,\pi\, b_1(\beta_1);$$

le théorème résulte maintenant de ce que, les plans ϖ et ϖ_1, ρ et $\rho_1 \equiv \varpi$, $\sigma \equiv \varpi_1$ et σ_1 étant des couples de plans correspondants des gerbes collinéaires P, P_1, les relations de projectivité précédentes (2) sont telles qu'on a

$$a(\alpha, \varpi_1, \varpi)\,\pi\, b(\beta, \varpi, \rho) \qquad \text{et} \qquad a_1(\alpha_1, \varpi_1, \sigma)\,\pi\, b_1(\beta_1, \varpi, \varpi_1).$$

2) Remarques. – a. – Les droites d, d_1, PP_1 sont les seules droites de la congruence $G_{1,3}$ dans le plan $\alpha \equiv \beta_1$.
b. – Quand le plan $\alpha \equiv \beta_1$ en tournant autour de la droite $PP_1 \equiv a \equiv b_1$ devient le plan $\varpi \equiv \rho_1$, les plans α_1, β deviennent les plans ϖ_1, ρ et les droites $d \equiv \alpha\beta$, $d_1 \equiv \alpha_1\beta_1$ deviennent les droites $\varpi\rho \equiv b$, $\varpi_1\rho_1 \equiv b_1$ ou PP_1; on est donc amené à dire que le plan ϖ contient trois droites de la congruence $G_{1,3}$, deux droites confondues avec la droite PP_1 et la droite b.
c. – On dira de même que le plan ϖ_1 contient trois droites de la congruence $G_{1,3}$, deux droites confondues avec la droite PP_1 et la droite a_1.
3) Théorème. L'intersection des cônes $\Gamma_P^2, \Gamma_{P_1}^2$ est formée de la droite $PP_1 \equiv a \equiv b_1$ et d'une cubique gauche C^3, lieu du point $D \equiv d\,d_1$ lorsque le plan $\alpha \equiv \beta_1$ tourne autour de la droite $PP_1 \equiv a \equiv b_1$; la courbe C^3 passe par les points P, P_1 où elle est tangente aux droites b, a_1.
Les points de la droite $PP_1 \equiv a \equiv b_1$ et le point D sont les seuls points communs aux deux cônes dans le plan $\alpha \equiv \beta_1$. Les deux cônes ayant des plans tangents différents ϖ_1, ϖ le long de la génératrice rectiligne commune PP_1, un plan ω mené arbitrairement par le point D et un point quelconque E de la droite PP_1, les coupe suivant des coniques qui, ayant des tangentes distinctes au point commun E, ont encore en commun trois autres points dont l'un est le point D et dont les deux autres sont réels ou imaginaires conjugués. Donc, lorsque le plan $\alpha \equiv \beta_1$ tourne d'une manière continue autour de la droite PP_1, le point D décrit une courbe gauche de troisième ordre ou une cubique gauche C^3, formant avec la droite PP_1 l'intersection des deux cônes. On dit que la cubique C^3 est la partie principale et la droite d, la partie complémentaire de l'intersection. Lorsque le plan $\alpha \equiv \beta_1$ se rapproche indéfiniment du plan $\varpi \equiv \rho_1$, la droite d_1 tend à se confondre avec la droite P_1P, la droite d avec la droite b et le point D avec le point P; la courbe C^3 passe donc par le point P et y est tangente à la droite b. En amenant le plan $\alpha \equiv \beta_1$ sur le plan $\sigma \equiv \varpi_1$, on trouve de même qu'elle passe par le point P_1 et y est tangente à la droite a_1.

4) Remarque. – Les points différents du point E communs aux coniques (ω, Γ^2_P), $(\omega, \Gamma^2_{P_1})$ sont les points doubles ou unis des systèmes plans superposés suivant lesquels les gerbes P, P_1 coupent le plan ω.

5) Théorème. Le point D appartient à une infinité de droites de la congruence $G_{1,3}$; ces droites sont les génératrices rectilignes d'un cône du second degré Γ^2_D projetant la cubique gauche C^3 du point D et la tangente t_D en ce point à la courbe C^3 est une de ces droites.

Une seconde position $\alpha' \equiv \beta'_1$ du plan $\alpha \equiv \beta_1$ par la droite $PP_1 \equiv a \equiv b_1$ coupe les cônes $\Gamma^2_P, \Gamma^2_{P_1}$ suivant des génératrices rectilignes d', d'_1 qui sont des droites homologues des gerbes P, P_1 et des droites de la congruence $G_{1,3}$; ces droites se coupent en un point D' de la cubique gauche C^3; les plans $\mu \equiv d\,d'$, $\mu_1 \equiv d_1\,d'_1$ sont des plans homologues des gerbes P, P_1 et leur intersection $m \equiv \mu\mu_1 \equiv DD'$ est une des droites de la congruence $G_{1,3}$ issues du point D et répondant à la question. Lorsque les plans μ, μ_1 tournent autour des droites d, d_1; ils engendrent des feuillées projectives et non perspectives, le plan $d\,d_1 \equiv \alpha \equiv \beta_1$ n'étant pas un plan uni des gerbes P, P_1; leur intersection $m \equiv \mu\mu_1 \equiv DD'$ engendre un cône du second degré Γ^2_D; le point D' décrit la cubique gauche C^3 et la tangente t_D à celle-ci au point D est une génératrice rectiligne du cône Γ^2_D et une droite de la congruence $G_{1,3}$, les plans tangents θ_d, θ_{d_1} aux cônes $\Gamma^2_P, \Gamma^2_{P_1}$ étant des positions correspondantes des plans μ, μ_1.

6) Remarque. – a. – Les droites d, d', m et d_1, d'_1, m sont les droites de la congruence $G_{1,3}$ dans les plans μ, μ_1.

b. – Les droites homologues x, x_1 des gerbes P, P_1 dans les plans μ, μ_1 engendrent des faisceaux projectifs et tracent sur la droite $m \equiv \mu\mu_1 \equiv DD'$ des ponctuelles projectives $m(X) \,\overline{\wedge}\, m(X_1)$ dont les points D, D' sont les points unis.

c. – Les droites homologues y, y_1 des gerbes P, P_1 dans les plans θ_d, θ_{d_1} engendrent des faisceaux projectifs et tracent sur la droite $t_D \equiv \theta_d\,\theta_{d_1}$ des ponctuelles projectives dont le point D est le seul point uni

d. – Les droites de la congruence $G_{1,3}$ déterminés jusqu'ici sont les cordes joignant les points réels et les tangentes aux points réels de la cubique gauche C^3, dont les points réels sont donc des points singuliers de la congruence $G_{1,3}$. Mais si on n'avait pas fait l'hypothèse de ne considérer d'abord que des éléments réels, on aurait obtenu toutes les droites de la congruence $G_{1,3}$ et tous ses points singuliers.

3° Éléments imaginaires. – 1) Si le plan $\alpha \equiv \beta_1$ mené par la droite $PP_1 \equiv a \equiv b_1$ est imaginaire, il en est de même des plans α_1, β; les droites $d \equiv \alpha\beta \equiv \beta_1\beta$, $d_1 \equiv \alpha_1\beta_1 \equiv \alpha_1\alpha$ sont des droites imaginaires de première espèce; elles sont des droites homologues des gerbes P, P_1, des droites de la congruence $G_{1,3}$ et des génératrices rectilignes des cônes $\Gamma^2_P, \Gamma^2_{P_1}$; le point D où elles se coupent est un point imaginaire de la cubique gauche C^3.

2) Si les plans $\alpha \equiv \beta_1$, $\alpha' \equiv \beta'_1$ menés par la droite $PP_1 \equiv a \equiv b_1$ sont des plans imaginaires conjugués, il en est de même des droites d et d', d_1 et d'_1; les points $D \equiv d\,d_1$, $D' \equiv d'd'_1$ sont des points imaginaires conjugués de la cubique gauche C^3; les plans $\mu \equiv d\,d'$, $\mu_1 \equiv d_1\,d'_1$ sont réels et il en est de même de la droite $m \equiv \mu\mu_1 \equiv DD'$ de la congruence $G_{1,3}$ suivant laquelle ils se coupent et sur laquelle sont les points D, D'.

3) La tangente t_D à la cubique gauche C^3 au point imaginaire D est l'intersection des plans imaginaires θ_d, θ_{d_1} tangents aux cônes $\Gamma^2_P, \Gamma^2_{P_1}$ suivant les génératrices imaginaires d, d_1; cette droite est une droite imaginaire de seconde espèce.

4) Les feuillets homologues des feuillées projectives engendrées par les plans homologues des gerbes P, P_1 passant par les droites homologues imaginaires d, d_1 se coupent suivant les droites de la congruence $G_{1,3}$ issues du point imaginaire D; ces droites sont les génératrices rectilignes du cône du second degré Γ^2_D projetant les points réels et imaginaires de la cubique gauche C^3 du point imaginaire D de cette courbe; l'une d'elle est réelle, elle joint le point D au point imaginaire conjugué D'; les autres sont des droites imaginaires de première ou de seconde espèce selon qu'elles joignent le point D aux points réels ou aux points imaginaires de la cubique gauche C^3.

La tangente t_D est une de ces droites.

4° Définitions. 1) La tangente en un point de la cubique gauche C^3 est considérée comme joignant le point de contact au point infiniment voisin de la courbe; on dit aussi qu'elle coupe celle-ci en deux points confondus avec le point de contact.

2) Une bisécante de la cubique gauche C^3 est toute droite joignant deux points de la courbe; elle est réelle, si elle joint deux points réels ou deux points imaginaires conjugués; elle est une droite imaginaire de première espèce, si elle joint un point réel et un point imaginaire; elle est une droite imaginaire de seconde espèce, si elle joint deux points imaginaires non conjugués.

3) Une unisécante de la cubique gauche C^3 est une droite qui n'a qu'un point commun avec la courbe; elle n'est pas une génératrice rectiligne du cône du second degré projetant la courbe du point considéré sur celle-ci.

5° 1) Théorème. Tout point réel ou imaginaire, extérieur à la cubique gauche C^3, n'appartient qu'à une seule droite de la congruence $G_{1,3}$ et cette droite est une bisécante de la cubique gauche C^3; c'est pour cette raison que la congruence $G_{1,3}$ est dite du premier ordre.

Si le point A n'est pas un point de la cubique gauche C^3, les droites $z \equiv PA$, $u_1 \equiv P_1A$ ne sont pas toutes deux des génératrices rectilignes des cônes Γ^2_P, $\Gamma^2_{P_1}$ et ne sont pas des droites homologues des gerbes P, P_1; si z_1, u sont des droites homologues dans les gerbes P_1, P, la seule droite de la congruence $G_{1,3}$ passant par le point A est l'intersection des plans $\mu \equiv z\,u$, $\mu_1 \equiv z_1 u_1$. Ces plans coupent les cônes Γ^2_P, $\Gamma^2_{P_1}$ suivant des génératrices rectilignes d et d', d_1 et d'_1; les droites d et d_1, d' et d'_1 sont des droites homologues des gerbes P, P_1; elles se coupent en des points D, D' qui sont les points communs à la droite m et à la cubique gauche C^3 dont la droite m est donc bisécante.

2) Remarque. — a. — Si les points D, D' sont différents des points P, P_1, qu'ils soient ou ne soient pas l'un et l'autre des points réels, ils sont les points doubles des ponctuelles projectives tracées sur la droite $m \equiv \mu\mu_1$ par les droites homologues x, x_1 des gerbes P, P_1 dans les plans μ, μ_1; ils sont confondus, en même temps que les droites d et d', d_1 et d'_1, et les plans μ, μ_1 sont tangents aux cônes Γ^2_P, $\Gamma^2_{P_1}$ suivant les droites $d \equiv d'$, $d_1 \equiv d'_1$, si la droite m est tangente à la cubique gauche C^3 en un point réel ou imaginaire $D \equiv D'$.

b. — Les droites u, z_1 coupent la droite m en des points qui sont les points homologues du point $A \equiv u_1 m \equiv zm$ dans la projectivité déterminée sur la droite $m \equiv \mu\mu_1$ par les droites x, x_1; ces points sont différents ou confondus, suivant que la projectivité tracée sur la droite m n'est pas ou est une involution.

3) Théorème. Un plan quelconque, réel ou imaginaire, contient trois droites de la congruence $G_{1,3}$ et ces droites sont des bisécantes de la cubique gauche C^3; c'est pour cette raison que la congruence $G_{1,3}$ est dite de la troisième classe.

Les droites répondant à la question joignent deux à deux les points où le plan considéré ω coupe la cubique gauche C^3; ces points sont les points unis des systèmes plans collinéaires suivant lesquels les gerbes collinéaires P, P_1 coupent le plan ω.

4) Remarque — Soient D, D', D'' trois points réels ou imaginaires de la cubique gauche C^3; t_D la tangente à celle-ci au point D; Γ^2_D le cône du second degré projetant la courbe du point D et dont les droites t_D, DD', DD'' sont donc trois génératrices rectilignes. Les droites $D'D''$, $D''D$, DD' sont les trois droites de la congruence $G_{1,3}$ dans le plan $\delta \equiv DD'D''$. Si ce plan tourne autour de la droite DD' et se confond avec le plan $\delta' \equiv (DD', t_D)$, les droites DD'', $D'D''$ se confondent avec les droites t_D, $D'D$ et les trois droites de la congruence $G_{1,3}$ dans le plan δ' sont la droite t_D et deux droites confondues avec la droite DD'. Si le plan δ' tourne autour de la droite t_D et devient le plan δ'' tangent au cône Γ^2_D suivant cette droite, la droite DD' se confond avec la droite t_D; on dira donc que le plan δ'' tangent au cône Γ^2_D suivant la droite t_D contient trois droites de la congruence $G_{1,3}$ confondues avec la droite t_D; le plan δ'' est le plan osculateur à la cubique gauche C^3 au point D. Les trois cas relatifs aux plans $\delta, \delta', \delta''$ correspondent aux cas où l'équation en k dans la recherche des points doubles de deux systèmes plans collinéaires superposés a trois racines simples, une racine simple et une racine double, ou une racine triple, et que le nombre

des points doubles est égal à trois, à deux ou à un.

6° 1) Conclusion. La cubique gauche C^3 est le lieu des points singuliers réels ou imaginaires de la congruence $G_{1,3}$; celle-ci n'a aucun plan singulier et ses droites sont les bisécantes de la cubique gauche C^3, ou les génératrices rectilignes des cônes du second degré projetant cette courbe de ses points réels ou imaginaires.

2) Remarque. – On arriverait à la même conclusion, si les éléments par lesquels on définit la collinéation entre les gerbes P, P_1 n'étaient pas tous réels.

7° 1) Théorème. Les droites de la congruence $G_{1,3}$ sont projetées d'un point singulier quelconque, réel ou imaginaire, suivant une gerbe collinéaire aux gerbes collinéaires données P, P_1.

Soient D, D', D'', P_2 quatre points arbitraires, réels ou imaginaires, de la cubique gauche C^3 ; t_{P_2} la tangente au point P_2 ; $\Gamma^2_{P_2}$ le cône du second degré projetant de ce point la cubique gauche C^3. La droite t_{P_2} est dans le plan tangent au cône Γ^2_P suivant la génératrice rectiligne PP_2 et est une génératrice rectiligne du cône $\Gamma^2_{P_2}$; la tangente t à la cubique gauche au point P est dans le plan tangent au cône Γ_{P_2} suivant la génératrice rectiligne P_2P et est une génératrice rectiligne du cône Γ^2_P ; les cônes Γ^2_P, $\Gamma^2_{P_2}$ ont donc des plans tangents distincts suivant la génératrice rectiligne commune PP_2 et la cubique gauche C^3 forme, avec cette droite PP_2, l'intersection des deux cônes. Si les points P, P_2, D, D' étaient fixes, le point D'' passant par la cubique gauche C^3, on a les couples de feuillées projectives

$$PD\,(D'')\ \pi\ P_2D\,(D''), \qquad PD'\,(D'')\ \pi\ P_2D'\,(D''),$$

et dans ces deux projectivités, le plan PDD' des feuillées $PD\,(D'')$, $PD'\,(D'')$ a pour homologues le plan P_2DD' des feuillées $P_2D\,(D'')$, $P_2D'\,(D'')$; ces projectivités établissent donc une collinéation entre les gerbes P, P_2 dans laquelle les deux gerbes n'ont aucun élément uni, les droites homologues de la droite PP_2 étant les droites gauches t_{P_2}, t. De plus, la cubique gauche C^3 formant la partie principale de l'intersection des cônes Γ^2_P, $\Gamma^2_{P_2}$, les gerbes collinéaires P, P_2 déterminent la même congruence $G_{1,3}$ que les gerbes P, P_1 et la collinéation établie entre les gerbes P, P_2 répond à la question.

2) Corollaire. Lorsque deux cônes du second degré, réels ou imaginaires, de sommets différents, ont une génératrice rectiligne commune le long de laquelle ils ne sont pas tangents, la partie principale de leur intersection est une cubique gauche dont les bisécantes sont les droites d'une congruence $G_{1,3}$ et sont projetées des points de la cubique gauche suivant des gerbes collinéaires.

73. Détermination analytique des droites de la congruence $G_{1,3}$ déterminée par des gerbes collinéaires, réelles ou imaginaires, et de la cubique gauche lieu des points singuliers de cette congruence. 1° Rapportons la congruence $G_{1,3}$ définie par les gerbes collinéaires P, P_1 (n° 72) à des coordonnées quaternaires dont les éléments fondamentaux $(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$ sont placés de telle façon que les points P, P_1, les droites a, a_1, b, b_1 et les plans p, σ_1 coïncident avec les points A_1, A_2, avec les droites A_1A_2, A_2A_4, A_1A_3, A_2A_1 et avec les plans $A_1A_3A_4$, $A_2A_3A_4$; on peut, en outre, supposer que les droites A_1A_5, A_2A_5 sont des droites homologues des deux gerbes et des droites de la congruence $G_{1,3}$.

2° En mettant les équations des droites et des plans passant par les points A_1, A_2 sous la forme

$$(1)\qquad X_1 : m_1 = X_3 : m_2 = X_4 : m_3 \qquad\qquad X_1 : m'_1 = X_3 : m'_2 = X_4 : m'_3,$$

$$(2)\qquad \mu_1X_2 + \mu_2X_3 + \mu_3X_4 = 0, \qquad\qquad \mu'_1X_1 + \mu'_2X_3 + \mu'_3X_4 = 0,$$

les nombres (m_1, m_2, m_3), (m'_1, m'_2, m'_3), (μ_1, μ_2, μ_3), (μ'_1, μ'_2, μ'_3) sont les coordonnées ternaires de ces droites et de ces plans dans les gerbes $A_1 \equiv P$, $A_2 \equiv P_2$ rapportés aux éléments fondamentaux $A_1\,(A_2, A_3, A_4, A_5)$, $A_2\,(A_1, A_3, A_4, A_5)$. Les équations générales des collinéations entre les deux gerbes sont

$m'_1 = a_{11} m_1 + a_{12} m_2 + a_{13} m_3$, $\quad m'_2 = a_{21} m_1 + a_{22} m_2 + a_{23} m_3$, $\quad m'_3 = a_{31} m_1 + a_{32} m_2 + a_{33} m_3$,

$\mu_1 = a_{11} \mu'_1 + a_{21} \mu'_2 + a_{31} \mu'_3$, $\quad \mu_2 = a_{12} \mu'_1 + a_{22} \mu'_2 + a_{32} \mu'_3$, $\quad \mu_3 = a_{13} \mu'_1 + a_{23} \mu'_2 + a_{33} \mu'_3$.

En tenant compte des hypothèses, elles se réduisent à

(3) $$m'_1 = m_2, \qquad m'_2 = m_3, \qquad m'_3 = m_1,$$

(4) $$\mu_1 = \mu'_3, \qquad \mu_2 = \mu'_1, \qquad \mu_3 = \mu'_2.$$

3° Les équations (1) et (2) deviennent

(5) $$X_2 : m_1 = X_3 : m_2 = X_4 : m_3, \qquad X_1 : m_2 = X_3 : m_3 = X_4 : m_1,$$

(6) $$\mu_1 X_2 + \mu_2 X_3 + \mu_3 X_4 = 0, \qquad \mu_2 X_1 + \mu_3 X_3 + \mu_1 X_4 = 0.$$

4° Pour que les droites homologues (5) des gerbes $P \equiv A_1$, $P_1 \equiv A_2$ se coupent, il faut et il suffit qu'on ait

(7) $$m_1 m_2 = m_3^2.$$

Celles de ces droites qui sont issues respectivement des points $P \equiv A_1$, $P_1 \equiv A_2$ sont donc les génératrices rectilignes des cônes du second degré $\Gamma^2_P \equiv \Gamma^2_{A_1}$, $\Gamma^2_{P_1} \equiv \Gamma^2_{A_2}$ d'équations

(8) $$X_2 X_3 = X_4^2, \qquad X_1 X_4 = X_3^2;$$

la droite $PP_1 \equiv A_1 A_2$ est une génératrice rectiligne commune aux deux cônes; le premier est tangent aux plans $\varpi_1 \equiv A_1 A_2 A_4$, $\rho \equiv A_1 A_3 A_4$ suivant les droites $a \equiv A_1 A_2$, $b \equiv A_1 A_3$; le second est tangent aux plans $\varpi \equiv A_1 A_2 A_3$, $\sigma_1 \equiv A_2 A_3 A_4$ suivant les droites $b_1 \equiv A_2 A_1$, $a_1 \equiv A_2 A_4$; ils passent respectivement par les droites $A_1 A_5$, $A_2 A_5$.

5° La cubique gauche C^3 lieu des points d'intersection des droites (5) lorsque la condition (7) est remplie, a pour équations paramétriques

(9) $$X_1 : m_3^3 = X_2 : m_1^3 = X_3 : m_1 m_3^2 = X_4 : m_1^2 m_3$$

ou

(10) $$X_1 : 1 = X_2 : t^3 = X_3 : t = X_4 : t^2.$$

On observe que ces valeurs de X_1, X_2, X_3, X_4 vérifient les équations (8) et qu'ainsi la cubique gauche C^3 forme, avec les droites $A_1 A_2 \equiv PP_1$, l'intersection des cônes représentés par les équations (8). En faisant $m_1 = 0$ ou $t = 0$, $m_3 = 0$ ou $t = \infty$ dans les équations (9) ou (10), on trouve que la cubique gauche C^3 passe par les points $A_1 \equiv P$, $A_2 \equiv P_1$, et on reconnait sans peine que les tangentes en ces points sont les droites $A_1 A_3 \equiv b$, $A_2 A_4 \equiv a_1$

6° Les coordonnées ponctuelles de la droite de la congruence $G_{1,3}$ joignant les points t, t' de la cubique gauche C^3 sont

(11) $$X_{12} = t^2 + tt' + t'^2, \quad X_{13} = 1, \quad X_{14} = t + t', \quad X_{34} = tt', \quad X_{42} = t^2 t'^2, \quad X_{23} = -tt'(t + t').$$

les droites de la congruence $G_{1,3}$ appartiennent donc aux complexes quadratiques

(12) $$X_{34}^2 - X_{13} X_{42} = 0, \qquad (X_{12} + X_{34}) X_{13} - X_{14}^2 = 0.$$

Or les coordonnées ponctuelles d'une droite quelconque passant par le point t de la cubique gauche C^3 sont

(13) $$X_2 - t^3 X_1, \quad X_3 - t X_1, \quad X_4 - t^2 X_1, \quad t X_4 - t^2 X_3, \quad t^2 X_2 - t^3 X_4, \quad t^3 X_3 - t X_2.$$

En exprimant qu'elles vérifient l'une ou l'autre des équations (12), on trouve l'équation

$$(14)\qquad t^2x_3^2+x_4^2+tx_1x_2-t^2x_1x_4-x_2x_3-tx_3x_4=0$$

du cône du second degré Γ_t^2 projetant la cubique gauche C^3 du point t de la courbe.
On reconnait aisément que le cône Γ_t^2 passe par le point $(1, t^3+3t^2, t+1, t^2+2t)$ de la tangente au point t de la cubique gauche C^3; cette tangente est donc une génératrice rectiligne du cône Γ_t^2; de plus, le plan tangent correspondant

$$(15)\qquad t^3x_1-x_2-3t^2x_3-3tx_4=0$$

est le plan des points

$$(16)\qquad (1,t^3,t,t^2),\ (1,t^3+3t^2,t+1,t^2+2t),\ (1,t^3+3t^2+6t,t+1,t^2+2t+2)$$

ou le plan osculateur de la cubique gauche C^3 au point t. (Cette équation étant du troisième degré par rapport au paramètre t, on en déduit qu'il passe trois plans osculateurs de la cubique gauche C^3 par un point quelconque de l'espace)
7° En faisant $t'=t$, les nombres (11) deviennent les coordonnées ponctuelles

$$(17)\qquad x_{12}=3t^2,\quad x_{13}=1,\quad x_{14}=2t,\quad x_{34}=t^2,\quad x_{42}=t^4,\quad x_{23}=-2t^3$$

des tangentes à la cubique gauche C^3; ces tangentes appartiennent donc au complexe linéaire

$$(18)\qquad x_{12}-3x_{34}=0$$

et le plan (15), osculateur à la cubique gauche C^3 au point t, est le plan focal du même point dans ce complexe linéaire. (On retrouvera cette propriété dans l'étude géométrique de la cubique gauche C^3 et de la congruence $G_{1,3}$.)

B. La feuillée du troisième ordre φ^3 des plans singuliers de la congruence $G_{3,1}$

74. 1° La congruence $G_{3,1}$ est la forme réciproque de la congruence $G_{1,3}$. Elle est formée des droites joignant les points homologues de deux systèmes plans collinéaires ϖ, ϖ_1, de supports différents, n'ayant aucun élément uni.
En général, on désigne par X et X_1, x et x_1 des points et des droites homologues des deux systèmes plans.
2° Les systèmes plans ϖ, ϖ_1 n'ayant aucun élément uni, les droites a_1, b qui correspondent aux droites a, b_1 confondues avec la droite $\varpi\varpi_1$, sont distinctes l'une de l'autre et de la droite $\varpi\varpi_1$, les points homologues $P\equiv ab$, $P_1\equiv a_1b_1$ sont différents et les droites a_1, b sont gauches. La droite $\varpi\varpi_1\equiv PP_1$ joignant les points homologues P, P_1 est une droite de la congruence $G_{3,1}$.
3° Tout point $A\equiv B_1$ différent des points P, P_1 sur la droite $\varpi\varpi_1\equiv a\equiv b_1$ est l'intersection des droites $d\equiv AB\equiv B_1B$, $d_1\equiv A_1B_1\equiv A_1A$ qui sont à la fois des droites homologues des systèmes plans ϖ, ϖ_1 et des droites de la congruence $G_{3,1}$.
4° Lorsque le point $A\equiv B_1$ parcourt la droite $\varpi\varpi_1\equiv a\equiv b_1$, les ponctuelles $a(A)$, $a_1(A_1)$, $b(B)$, $b_1(B_1)$ sont projectives et les droites $d\equiv AB\equiv BB_1$, $d_1\equiv A_1B_1\equiv A_1A$ qui sont des droites homologues des systèmes plans ϖ, ϖ_1 et des droites de la congruence $G_{3,1}$ engendrent des faisceaux du second ordre $\varphi^2_\varpi, \varphi^2_{\varpi_1}$, lesquels sont des formes homologues dans la colliniation donnée entre les systèmes plans ϖ, ϖ_1.
5° Si R, S_1 sont les points homologues des points $R_1\equiv P$, $S\equiv P_1$, les coniques C^2_ϖ, $C^2_{\varpi_1}$ supports des faisceaux φ^2_ϖ, $\varphi^2_{\varpi_1}$ sont tangents aux droites $a\equiv PP_1$ et b, a_1 et $b_1\equiv P_1P$ aux points $S\equiv P_1$ et R, S_1 et $R_1\equiv P$.
6° Les droites d, d_1, PP_1 sont les seules droites de la congruence $G_{3,1}$ passant par le point $A\equiv B_1$.
7° Lorsque le point $A\equiv B_1$ devient le point $P\equiv R_1$, la droite d devient la droite b et la droite d_1 se confond avec la droite PP_1; lorsque le point $A\equiv B_1$ devient le point $P_1\equiv S$, la droite d se confond

avec la droite P_1P et la droite d_1 devient la droite a_1.

8° Le plan $\delta \equiv dd_1$ est tangent aux coniques C^2_{ϖ}, $C^2_{\varpi_1}$ en des points homologues C_d, C_{d_1} des systèmes plans ϖ, ϖ_1; la droite $t_\delta \equiv C^2_{\varpi} C^2_{\varpi_1}$ est une droite de la congruence $G_{3,1}$. Le plan $\delta \equiv dd_1$ se confond avec le plan $\varpi \equiv bb_1$ et avec le plan $\varpi_1 \equiv aa_1$ lorsque le point $A \equiv B_1$ devient le point $P \equiv R_1$ ou le point $P_1 \equiv S$.

9° Si le point $A' \equiv B'_1$ est une seconde position du point $A \equiv B_1$ sur la droite $\varpi\varpi_1 \equiv a \equiv b_1$ et si A'_1, B', $d' \equiv A'B'$, $d'_1 \equiv A'_1B'_1$, $\delta' \equiv d'd'_1$, $C_{d'}$, $C_{d'_1}$, $t_{\delta'}$ sont les positions correspondantes des autres éléments, les points $M \equiv dd'$, $M_1 \equiv d_1d'_1$, sont des points homologues des systèmes plans ϖ, ϖ_1, il en est de même des points $C_{d'}$, $C_{d'_1}$ des coniques C^2_{ϖ}, $C^2_{\varpi_1}$ et les droites $m \equiv MM_1$, $t_{\delta'} \equiv C_{d'} C_{d'_1}$ sont des droites de la congruence $G_{3,1}$. Les plans $\delta \equiv dd_1$, $\delta' \equiv d'd'_1$ sont les plans des feuillées projectives ayant la droite m pour support commun et dont les feuillées homologues sont les plans mx, mx_1 passant par les droites homologues x, x_1 des systèmes plans ϖ, ϖ_1 par M et M_1.

10° Lorsque le point $A' \equiv B'_1$ parcourt la droite $\varpi\varpi_1$, les points M, M_1 décrivent des ponctuelles projectives, non perspectives, sur les droites d, d_1 et la droite $m \equiv MM_1$ engendre un faisceau du second degré φ^2_δ dans le plan $\delta \equiv dd_1$ ayant pour support une conique C^2_δ tangente aux droites d, d_1 aux points B, A_1 et tangente à la droite $t_\delta \equiv C_d C_{d_1}$ qui est la position limite de la droite m lorsque le plan δ' se confond avec le plan δ.

11° A trois points $A \equiv B_1$, $A' \equiv B'_1$, $A'' \equiv B''_1$ de la droite $\varpi\varpi_1 \equiv a \equiv b_1$ correspondent trois plans $\delta \equiv dd_1$, $\delta' \equiv d'd'_1$, $\delta'' \equiv d''d''_1$; les droites $\delta'\delta''$, $\delta''\delta$, $\delta\delta'$ sont les seules droites de la congruence $G_{3,1}$ passant par le sommet $D \equiv \delta\delta'\delta''$ du trièdre ayant pour faces les plans δ, δ', δ''. Ces trois droites sont les droites unies des gerbes colliniaires projetant du point $D \equiv \delta\delta'\delta''$ les systèmes plans colliniaires ϖ, ϖ_1; elles joignent les sommets homologues des triangles $dd'd''$, $d_1d'_1d''_1$.

12° Si le point $A'' \equiv B''_1$ se confond avec le point $A \equiv B_1$, le plan δ'' se confond avec le plan δ, la droite $\delta\delta''$ avec la droite t_δ et la droite $\delta'\delta''$ avec la droite $\delta\delta'$; les droites de la congruence $G_{3,1}$ issues du point $D' \equiv (\delta\delta', t_\delta)$ sont donc la droite t_δ et deux droites confondues avec la droite $\delta\delta'$.

13° Si le point $A' \equiv B'_1$ se confond aussi avec le point $A \equiv B_1$, les deux droites déjà confondues avec la droite $\delta\delta'$ se confondent avec la droite t_δ et le point D' devient un certain point D_δ de la droite t_δ et ce point est le seul point du plan δ tel que les trois droites de la congruence $G_{3,1}$ issues de ce point se confondent en une seule, la droite t_δ; il est le point de contact de cette droite avec la conique C^2_δ.

14° Les plans δ sont les seuls plans singuliers de la congruence $G_{3,1}$. Tout autre plan ω coupe les plans ϖ, ϖ_1 suivant des droites non homologues z, u_1 et la seule droite de la congruence $G_{3,1}$ située dans le plan ω est la droite joignant les points zu, z_1u_1; c'est pour cette raison que la congruence $G_{3,1}$ est dite du premier ordre.

15° On a vu, ci-dessus (11°), que tout point D appartient à trois droites de la congruence $G_{3,1}$ et c'est pour cette raison que cette congruence est dite de la troisième classe.

16° Les plans δ correspondant aux diverses positions du point $A \equiv B_1$ sur la droite $\varpi\varpi_1 \equiv a \equiv b_1$ sont tangentes aux coniques C^2_{ϖ}, $C^2_{\varpi_1}$ et ils enveloppent la surface développable circonscrite à ces deux coniques. Cette surface est décomposable en deux parties; une partie secondaire réduite à la droite $\varpi\varpi_1 \equiv a \equiv b_1$ considérée comme support de la feuillée des plans tangents aux deux coniques aux points $P \equiv R_1$, $P_1 \equiv S$; une partie principale Δ^3 de la troisième classe, enveloppe des plans δ tangents en des points dont un au moins est différent de ces deux points. Les droites t_δ sont les génératrices rectilignes de la surface Δ^3 dont l'arête de rebroussement est le lieu du point D_δ. On dit que l'ensemble des plans δ tangents à la surface Δ^3 est une feuillée de troisième ordre φ^3, figure réciproque de la cubique gauche C^3 considérée comme lieu de points. La droite t_δ est appelée la droite de contact du plan δ et le point D_δ le point d'osculation de ce plan dans la feuillée φ^3.

17° Les droites de contact et les points d'osculations des plans ϖ, ϖ_1 sont les droites b, a_1 et les points R_1, S_1.

18° Les coniques C^2_{ϖ}, $C^2_{\varpi_1}$, C^2_{δ} sont tangentes aux plans δ et on dit qu'elles sont inscrites à la feuillée φ^3.

19° En considérant la droite de contact t_δ du plan δ comme l'intersection du plan δ par le plan infiniment voisin dans la feuillée du troisième ordre φ^3, on peut donc dire que celle-ci est le lieu des plans singuliers de la congruence $G_{3,1}$ dont les droites sont les intersections des plans de la feuillée φ^3, celles d'entre ces droites qui sont dans un même plan enveloppent une conique inscrite dans la feuillée. On démontre, par le raisonnement corrélatif de celui qu'on a fait dans le cas de la congruence $G_{1,3}$, que les plans de la feuillée φ^3 sont coupés par les droites de la congruence $G_{3,1}$ suivant des systèmes plans collinéaires aux systèmes plans collinéaires donnés ϖ, ϖ_1. On en déduit que deux coniques situées dans des plans différents et tangentes en des points distincts à l'intersection des deux plans, sont inscrites à une feuillée de troisième ordre φ^3 dont les plans se coupent suivant les droites d'une congruence $G_{3,1}$.

20° Toute droite de la congruence $G_{3,1}$ étant l'intersection de deux plans, distincts ou confondus, de la feuillée φ^3 est dite une biplanaire de la feuillée; une droite qui n'est que dans un seul plan de la feuillée est dite une uniplanaire elle n'est pas une des droites du faisceau de second degré des droites de la congruence $G_{3,1}$ dans le plan considéré et elle n'est pas tangente à la conique support de ces droites.

75. Remarque. - L'étude analytique de la congruence $G_{3,1}$ se ferait par des calculs corrélatifs de ceux employés dans le cas de la congruence $G_{1,3}$. La comparaison des équations écrites dans les deux cas conduirait à cette conséquence que la cubique gauche C^3 des points singuliers d'une congruence $G_{3,1}$ est l'arête de rebroussement d'une surface développable dont les plans tangents, ou les plans osculateurs de la courbe C^3, sont les plans d'une feuillée φ^3 du troisième ordre dont les biplanaires sont les droites d'une congruence $G_{3,1}$, et réciproquement. On retrouvera cette propriété par les considérations géométriques qui suivent.

C. Systèmes réglés formés de bisécantes de la cubique gauche C^3 ou de bisécantes de la congruence $G_{1,3}$ et systèmes réglés formés de biplanaires de la feuillée φ^3 ou de droites de la congruence $G_{3,1}$.

76. 1° Soient u, u_1 deux droites homologues gauches de deux gerbes collinéaires P, P_1 définissant la congruence $G_{1,3}$; ξ, ξ_1 deux quelconques des plans homologues passant par les droites u, u_1 dans les gerbes P, P_1; $x \equiv \xi\xi_1$ la droite de la congruence $G_{1,3}$ suivant laquelle se coupent les plans ξ, ξ_1. Lorsque le plan ξ tourne autour de la droite u, le plan ξ_1 tourne autour de la droite u_1, les feuillées $u(\xi)$, $u_1(\xi_1)$ sont projectives et, leurs supports u, u_1 étant gauches, la droite x engendre un système réglé Σ dont les droites u, u_1 sont deux directrices.

2° Si A est un point quelconque de la cubique gauche C^3 des points singuliers de la congruence $G_{1,3}$, les droites PA, P_1A sont des droites homologues des gerbes P, P_1, les plans uA, u_1A sont des plans homologues des deux gerbes ou des positions correspondantes des plans ξ, ξ_1. Il existe donc une position de la droite x qui passe par le point A, de sorte que tous les points de la cubique C^3 sont sur le système réglé Σ et toutes les génératrices rectilignes de celui-ci sont des bisécantes de la cubique C^3 ou des droites de la congruence $G_{1,3}$

3° On en déduit que toutes les directrices du système réglé Σ ou les génératrices rectilignes du système réglé complémentaire Σ' sont des unisécantes de la cubique gauche C^3.

77. Si u, u_1 sont des droites homologues gauches des systèmes plans collinéaires ϖ, ϖ_1 définissant la congruence $G_{3,1}$, les droites de celle-ci ou les biplanaires de la feuillée φ^3 des plans singuliers de la congruence, qui s'appuient sur les droites u, u_1 sont les génératrices rectilignes d'un système réglé inscrit à la feuillée φ^3 et ayant pour directrices des uniplanaires de cette feuillée.

78. 1° Théorème. La cubique gauche C^3 est projetée de deux bisécantes quelconques sui-

vant des feuillées projectives.

a.- Si les bisécantes considérées a, b sont issues d'un même point A de la cubique gauche C^3, toute droite joignant le point A à un point B de la courbe est une génératrice rectiligne du cône du second degré Γ^2_A projetant la courbe du point A ; les plans aB, bB projettent donc la génératrice rectiligne AB du cône Γ^2_A des deux génératrices rectilignes a, b et les feuillées qu'ils engendrent lorsque le point B décrit la cubique gauche C^3 sont donc projectives.

b.- Si les bisécantes considérées a, b sont gauches, les plans Pa et $P_1 a$, Pb et $P_1 b$ sont des plans homologues des gerbes collinéaires P, P_1 dont les supports peuvent être supposés différents des points où les droites a, b s'appuient sur la cubique gauche C^3 ; les droites $u \equiv (Pa, Pb)$, $u_1 \equiv (P_1 a, P_1 b)$ sont des droites homologues des deux gerbes ; les feuillées homologues de supports u, u_1 engendrent un système réglé Σ dont les droites a, b sont deux génératrices rectilignes ; le système réglé Σ passe par la cubique gauche C^3 et il passe, par chaque point M de celle-ci une directrice m du système réglé ; cette directrice s'appuie sur les droites a, b ; les feuillées a(M), b(M) projetant la cubique gauche C^3 des droites a, b, se confondent avec les feuillées a(m), b(m) projetant les directrices m de Σ des génératrices rectilignes a, b, elles sont donc projectives.

2° Remarque.- Si la droite a est tangente à la cubique gauche C^3 au point A, la limite du plan aM, lorsque le point M se rapproche indéfiniment du point A, est le plan osculateur à la courbe au point A ; ce plan osculateur est donc, dans la feuillée a, le plan homologue du plan bA de la feuillée b.

3° Rapport anharmonique de quatre points de la cubique gauche C^3.- Le rapport anharmonique de quatre points de la cubique gauche C^3 est, par définition, le rapport anharmonique des plans projetant les quatre points d'une bisécante quelconque de la courbe. Il est aussi, par définition, le quotient des coordonnées binaires du quatrième point dans le système ayant les trois premiers points comme points fondamentaux. Une cubique gauche devient ainsi une forme de première espèce et on peut établir des relations de projectivité entre cette nouvelle forme et toutes celles déjà définies précédemment.

4° Théorème. Toute unisécante de la cubique gauche C^3 détermine une quadrique passant par la courbe, les systèmes réglés dont cette quadrique est le support sont formés respectivement de bisécantes et d'unisécantes de la courbe.

Si la droite u est une unisécante qui coupe la cubique gauche C^3 au point P, deux plans α, β menés arbitrairement par cette droite recoupent la cubique en des points A, A' et B, B' de deux bisécantes $a \equiv AA'$, $b \equiv BB'$ qui s'appuient sur la droite u en des points A", B". Les feuillées projectives qui projettent la cubique gauche C^3 des bisécantes a, b engendrent un système réglé dont la droite u est une génératrice rectiligne et dont toutes les génératrices rectilignes sont des unisécantes de la courbe C^3 ; un plan quelconque mené par la droite u devant recouper la courbe C^3 en deux points autres que le point D, le système réglé complémentaire est formé de bisécantes et la quadrique, support des deux systèmes réglés, est la seule quadrique pouvant passer à la fois par la droite u et la cubique gauche C^3.

5° Remarque.- La propriété précédente donne le moyen de construire la bisécante qui passe par un point donné non situé sur la cubique gauche C^3.

79.- Les propriétés précédentes s'appliquent, par réciprocité, à la congruence $G_{3,1}$ et à la feuillée du troisième ordre φ^3 de ses plans singuliers.

1° La feuillée φ^3 est donc coupée par deux biplanaires quelconques suivant deux ponctuelles projectives, ce qui permet de définir le rapport anharmonique de quatre plans de la

W

feuillée φ^3 et les coordonnées linaires d'un plan de cette feuillée dans le système ayant trois plans quelconques de la feuillée pour éléments fondamentaux ; la feuillée φ^3 devient ainsi une forme de première espèce et elle peut être mise en relation de projectivité avec les autres formes de cette espèce.
2° Toute uniplanaire détermine une quadrique inscrite à la feuillée φ^3 ; cette quadrique est le support de deux systèmes réglés formés respectivement d'uniplanaires et de biplanaires ; d'où on déduit aussi le moyen de

D. Détermination des cubiques gauches et des feuillées du troisième ordre.

80. 1° Une cubique gauche C^3 est déterminée en même temps que la collinéation entre les gerbes qui la projettent de deux de ses points. Or cette collinéation est déterminée par la connaissance de deux angles solides homologues à quatre arêtes ou à quatre faces, par celles de deux trièdres homologues et de deux droites homologues ou de deux plans homologues, les trièdres pouvant être considérés comme définis par leurs faces ou par leurs arêtes. Dès lors une cubique gauche C^3 est déterminée 1) par six points 2) par cinq points et une bisécante, 3) par trois points et trois bisécantes, 4) par deux points et quatre bisécantes.
2° Par réciprocité, une feuillée du troisième ordre φ^3 est déterminée 1) par six plans, 2) par cinq plans et une biplanaire, 3) par trois plans et trois biplanaires, 4) par deux plans et quatre biplanaires.
3°. _ N.B. _ 1) Il est bien entendu que les éléments donnés ne déterminent une cubique gauche ou une feuillée du troisième ordre que s'ils sont indépendants les uns des autres, voulant dire par là qu'il doit être possible de les faire servir, dans le premier cas, à la détermination d'une collinéation entre deux gerbes de supports différents n'ayant aucun élément uni, et, dans le second cas, à la détermination d'une collinéation entre deux systèmes plans n'ayant aucun élément uni.
2) Quatre points et deux bisécantes ne déterminent pas une cubique gauche. Tout d'abord, pour que quatre points A, B, C, D et deux droites x, y puissent être quatre points et deux bisécantes d'une cubique gauche C^3, il faut, en vertu du théorème du n° 78, 1°, que l'on ait

$$x\,(A, B, C, D)\ \overline{\wedge}\ y\,(A, B, C, D)$$

ou ce qui revient au même que les six éléments considérés appartiennent à une même quadrique. Mais on démontrera bientôt (3°, 4) que cette condition n'est pas suffisante et que, si elle est remplie, il y a une infinité de cubique gauche passant par les points A, B, C, D et admettant les droites x, y comme bisécantes.
3) Corrélativement, une feuillée du troisième ordre n'est pas déterminée par quatre plans et deux biplanaires.
81. 1° Théorème. *Le lieu du point de rencontre des feuillets homologues de trois feuillées projectives est, en général, une cubique gauche dont les supports des trois feuillées sont trois bisécantes.*
Soient x, y, z les supports des trois feuillées et A, B, C les points où se coupent trois ternes de plans homologues. Si ces six éléments assurent une collinéation entre deux gerbes de supports différents n'ayant aucun élément uni, ils déterminent une cubique gauche C^3 passant par les points A, B, C et admettant les droites x, y, z pour bisécantes. Cette cubique gauche répond à la question, car elle est projetée des bisécantes x, y, z suivant trois feuillées projectives qui se confondent avec les feuillées données, une projectivité entre deux formes de première espèce étant déterminée par trois couples d'éléments homologues.
2) Théorème. *Le lieu des plans passant par les points homologues de trois ponctuelles*

W

projectives ont, en général, une feuillée du troisième ordre dont trois biplanaires sont les supports des trois ponctuelles.
Ce théorème est le théorème corrélatif du précédent.
3) Corollaires. a.– Une cubique gauche déterminée par six points est le lieu des points de rencontre des plans homologues de trois feuillées projectives dont les supports sont les côtés d'un triangle ayant trois des six points pour sommets.
b.– Une feuillée du troisième ordre déterminée par six plans est l'ensemble des plans passant par les points homologues de trois ponctuelles projectives dont les supports sont les arêtes d'un trièdre ayant trois des six plans pour faces.
2° 1) Théorème. Quand un système réglé est projectif à une feuillée du premier degré, le lieu des points de rencontre des éléments homologues est, en général, une cubique gauche dont des bisécantes sont le support de la feuillée et les directrices du système réglé.
Soient d_1, d_2 deux directrices arbitraires du système réglé Σ et d_3 le support de la feuillée du premier degré φ_1 projective au système réglé Σ. La génératrice rectiligne x du système réglé Σ et le plan homologue ξ de la feuillée φ^1 se coupent en un point X commun aux trois plans d_1x, d_2x, ξ et la propriété résulte de ce que ces trois plans engendrent des feuillées projectives ayant les droites d_1, d_2, d_3 pour supports
2) Quand un système réglé est projectif à une ponctuelle du premier degré, le lieu des plans déterminés par les éléments homologues est, en général, une feuillée du troisième ordre dont des biplanaires sont le support de la ponctuelle et les directrices du système réglé.
Ce théorème est le théorème corrélatif du précédent.
3) Remarques. a.– Le premier théorème reste vrai quand on remplace le système réglé Σ par un cône du second degré Γ^2 dont les droites d_1, d_2 deviennent deux génératrices rectilignes arbitraires; on doit supposer que le support d_3 de la feuillée φ^1 ne contient pas le sommet S du cône Γ^2. Le plan d_3S de la feuillée φ^1 coupe au point S la génératrice homologue du cône Γ^2 et la cubique gauche trouvée C^3 passe par ce point. D'ailleurs, si une cubique gauche C^3 tracée sur un cône du second degré Γ^2 ne passait pas par le sommet S du cône, chacune des faces du trièdre $Sabc$ déterminé par trois génératrices rectilignes du cône devant couper la courbe C^3 en trois points et ces trois points devant se trouver sur les droites a et b, a et c, les droites b et c seraient deux unisécantes ou deux bisécantes de la cubique gauche C^3 et leur plan couperait cette courbe en deux ou quatre points, ce qui est absurde.
b.– Corrélativement, le second théorème subsiste lorsque le système réglé est remplacé par un faisceau du second degré ayant pour support une conique dont le plan ne contient pas le support de la ponctuelle du premier degré considérée dans le théorème.
3° 1) Théorème. Si A, B, C sont trois points d'une quadrique Q et x une droite extérieure à cette quadrique, il existe, en général, deux cubiques gauches qui passent par les points A, B, C, ont la droite x pour bisécante et sont situées sur la quadrique.
Soient a, b, c trois génératrices rectilignes d'un même mode menées par les points A, B, C sur la quadrique Q. En associant ces trois droites aux plans xA, xB, xC, on établit une projectivité entre la feuillée x et le système réglé Σ auquel appartiennent les droites a, b, c sur la quadrique Q; cette projectivité définit une des deux cubiques gauches répondant à la question; la seconde s'obtient par la considération des génératrices rectilignes de l'autre mode de la quadrique Q.
2) Remarque. – Si la quadrique Q dégénère en un cône du second degré Γ^2, la démonstration reste applicable lorsque le sommet S du cône n'est ni un des points A, B, C ni un des

W

points de la droite x; il n'y a plus alors qu'une seule cubique gauche passant par les points A, B, C ayant la droite x comme bisécante et située sur le cône Γ^2 dont elle contient en outre, le sommet S. La démonstration est encore applicable et fournit une seule solution, lorsque l'un des points A, B, C devient le sommet S du cône Γ^2, si on donne aussi celle des génératrices rectilignes du cône Γ^2 qui doit être tangente en ce point à la cubique gauche.

3) Théorème. Si α, β, γ sont trois plans tangents à une quadrique Q et x une droite extérieure à cette quadrique, il y a, en général, deux feuillées du troisième ordre auxquelles appartiennent les plans α, β, γ ayant la droite x comme biplanaire et circonscrites à la quadrique.

Ce théorème est le théorème corrélatif du précédent.

4) Remarque. Lorsque la quadrique Q dégénère en une conique C^2 dont le plan σ est différent des plans α, β, γ et ne contient pas la droite x, il n'y a plus qu'une feuillée du troisième ordre ayant la droite x pour biplanaire, circonscrite à la conique C^2 et contenant les plans α, β, γ, mais elle contient en outre le plan σ de la conique C^2. On ne trouve aussi qu'une seule feuillée du troisième ordre lorsque l'un des plans α, β, γ devient le plan σ de la conique C^2, si on donne la tangente de la conique qui doit être la biplanaire de contact de ce plan.

5) Corollaires. a.– Par cinq points donnés sur une quadrique, passent, en général, deux cubiques gauches situées sur la quadrique; chacune d'elles admet les génératrices rectilignes d'un mode pour bisécantes et celles de l'autre mode comme unisécantes, avec la condition que les génératrices rectilignes bisécantes de l'une des deux courbes sont des unisécantes de l'autre.– Si la quadrique dégénère en un cône du second degré n'ayant pas un des cinq points donnés pour sommet, il n'y a plus qu'une cubique gauche située sur le cône et passant par les cinq points donnés, mais elle passe en outre par le sommet du cône; il y a aussi une seule cubique gauche, lorsque l'un des cinq points donnés devient le sommet du cône, si on donne, en outre, celle des génératrices rectilignes tangentes en ce point à la courbe.

b.– Cinq plans tangents d'une quadrique sont, en général, cinq plans de deux feuillées de troisième ordre circonscrites à la quadrique; chacune de ces feuillées a les génératrices rectilignes d'un mode de la quadrique comme biplanaires et celles de l'autre mode comme uniplanaires, avec la condition que les génératrices rectilignes biplanaires de l'une sont des uniplanaires de l'autre.– Si la quadrique dégénère en une conique dont le plan n'est pas un des cinq plans donnés, il n'y a plus qu'une feuillée du troisième ordre circonscrite à la conique et contenant les cinq plans donnés, mais elle contient en outre le plan de la conique; il y a aussi une seule feuillée de troisième ordre lorsque l'un des cinq plans donnés devient le plan de la conique, si on donne, en outre, celle des tangentes à la conique qui doit être la biplanaire de contact de ce plan.

6) Autres corollaires.– c.– Il existe deux infinités simples de cubiques gauches situées sur une quadrique et passant par quatre points arbitrairement donnés de la quadrique.

Si A, B, C, D sont les quatre points donnés et X un point quelconque d'une génératrice rectiligne g de la quadrique, il existe une cubique gauche située sur la quadrique, passant par les points A, B, C, D, X et ayant la droite g pour unisécante, lorsque le point X décrit la droite g, on obtient ainsi une première infinité simple de cubiques gauches répondant à la question; on en obtient une seconde en remplaçant la génératrice rectiligne g par une génératrice rectiligne de l'autre mode.

Remarque.– Si on remplace la quadrique par un cône du second degré, il n'y a plus

qu'une infinité simple de cubiques gauches passant par quatre points donnés du cône, situées sur celui-ci et passant par son sommet, supposé différent des quatre points donnés ou confondu avec un de ces points, si on donne, en outre, la tangente correspondante.

d.- Il existe deux infinités simples de feuillées du troisième ordre circonscrites à une quadrique et contenant quatre plans tangents donnés arbitrairement de la quadrique.

Remarque.- Si on remplace la quadrique par une conique, il n'y a plus qu'une infinité simple de feuillées du troisième ordre, contenant quatre plans tangents donnés de la conique et circonscrites à celle-ci, dont elles contiennent le plan, supposé différent des quatre plans donnés ou confondu avec un de ces plans, si on donne, en outre, la biplanaire de contact correspondante.

4° 1) Théorème. Quand deux quadriques se coupent suivant une génératrice rectiligne commune g, leur intersection est, en général, complétée par une cubique gauche dont la droite g est une bisécante.

En effet, chacune des deux quadriques peut être engendrée par deux feuillées projectives dont l'une a la droite g pour support. L'intersection des deux surfaces est donc complétée, en général, par la cubique gauche lieu des points de rencontre des plans homologues de trois feuillées projectives.

N.B.-a.- Cette propriété résulte aussi des résultats obtenus dans l'étude des faisceaux ponctuels de quadriques (n° 56, p. 71); il résulte en outre de cette étude que la cubique gauche peut dégénérer en une conique et une droite, ou en trois droites.

b- La propriété subsiste si on remplace l'une ou l'autre des deux quadriques par un cône du second degré et la cubique gauche passe par le sommet de ce cône; quand on remplace à la fois les deux quadriques par des cônes du second degré, ces cônes doivent avoir des sommets différents.

2) Théorème. Quand deux quadriques se coupent suivant une génératrice rectiligne commune g, les plans tangents communs forment, en général, la feuillée du premier ordre ayant la droite g pour support et une feuillée du troisième ordre dont cette droite est une biplanaire.

Ce théorème est le théorème corrélatif du précédent; il subsiste quand on remplace l'une des quadriques par une conique ou les deux quadriques par des coniques situées dans des plans différents.

3). Théorème. Quand deux quadriques ont en commun une cubique gauche, leur intersection est complétée par une bisécante de cette courbe.

Un plan quelconque ϖ coupe les quadriques considérées Q_1, Q_2 suivant deux coniques C_1^2, C_2^2 dont trois des quatre points communs sont sur la cubique gauche C^3 faisant partie de l'intersection des deux quadriques; la bisécante de cette courbe menée par le quatrième a déjà ainsi trois points communs avec chacune des deux quadriques, elle est donc une génératrice rectiligne commune aux deux quadriques et répond à la question.

N.B. La propriété est encore vraie quand une des quadriques est remplacée par un cône du second degré et quand les deux quadriques sont remplacées par des cônes du second degré de sommets nécessairement différents.

4) Théorème. Quand deux quadriques sont inscrites à une feuillée du troisième ordre, elles ont en commun une biplanaire de cette feuillée et les plans tangents communs aux deux quadriques forment la feuillée du premier ordre ayant la biplanaire pour support et la feuillée du troisième ordre donnée.

Ce théorème est le théorème corrélatif du précédent; il subsiste quand on remplace une des

quadriques par une conique et quand on fait ce changement pour les deux quadriques.

5° 1) Théorème. Deux cubiques gauches situées sur une quadrique se coupent en cinq points ou en quatre points, selon qu'elles n'ont pas ou qu'elles ont les mêmes génératrices rectilignes de la quadrique pour bisécantes.

a.- Soient C^3, C'^3 deux cubiques gauches tracées sur la quadrique Q_1 et n'admettant pas les mêmes génératrices rectilignes de celle-ci comme bisécantes; a la droite joignant un point arbitraire A de la courbe C^3 à un point arbitraire A' de la courbe C'^3 de telle manière que cette droite ne soit pas une génératrice rectiligne de la quadrique Q_1; Q, Q' les quadriques formées des bisécantes respectives des deux courbes s'appuyant sur l'unisécante commune a; b, b'_1 C''^3 les bisécantes des cubiques gauches C^3, C'^3 et la cubique gauche complétant les intersections des quadriques Q_1 et Q, Q_1 et Q', Q et Q'. Ces trois quadriques ont huit points communs qui sont les points où se coupent les intersections (b, C^3), (b', C'^3) de la quadrique Q_1 par les quadriques Q, Q'; trois de ces points étant les points (b, C'^3), (b', C^3), (b, b'), les cinq autres, répondant à la question, sont les points d'intersection des cubiques gauches C^3, C'^3.

b.- La construction se fait de la même manière lorsque les cubiques gauches C^3, C'^3 ont les mêmes génératrices rectilignes de la quadrique Q_1 pour bisécantes; mais, dans ce cas, quatre des huit points communs aux quadriques Q_1, Q, Q' sont les deux points (b, C'^3) et les deux points (b', C^3); les quatre autres, répondant à la question, sont les points d'intersection des cubiques gauches C^3, C'^3.

2) Théorème. Deux feuillées du troisième ordre circonscrites à une quadrique ont cinq ou quatre plans communs, selon qu'elle n'ont pas ou qu'elles ont les mêmes génératrices de la quadrique pour biplanaires.

Ce théorème est le théorème corrélatif du précédent.

3) Remarque. a. Lorsque la quadrique dégénère en un cône du second degré ou en une conique, les deux cubiques gauches ont cinq points communs dont un est le sommet du cône et les deux feuillées du troisième ordre ont cinq plans communs dont un est le plan de la conique.

b.- Deux des points communs ou deux des plans tangents communs peuvent se confondre en un seul avec la même tangente pour les deux cubiques ou la même biplanaire de contact dans les deux feuillées du troisième ordre; quand trois des points communs se confondent, les cubiques ont, en outre, le même plan osculateur et quand trois plans se confondent, les deux feuillées du troisième ordre ont, en outre, le même point d'osculation (voir, ci-dessous, le n° 82).-

4) Corollaires. -a- Etant données quatre feuillées projectives du premier degré, il y a, en général, quatre points où viennent se couper des plans homologues des quatre feuillées.

b.- Etant données quatre ponctuelles projectives du premier degré il y a, en général, quatre plans passant par des points homologues des quatre ponctuelles.

82. 1° Théorème. Une cubique gauche est déterminée 1) par six points, 2) par cinq points et la tangente en un de ces points, 3) par quatre points et les tangentes en deux de ces points, 4) par trois points et les tangentes en ces points.

Une cubique gauche est projetée de chacun de ses points suivant un cône du second degré dont une génératrice rectiligne est la tangente au point considéré et dont les plans tangents projettent les tangentes de la courbe. Dès lors, le théorème résulte de ce que, dans chaque cas, les données permettent de construire deux cônes du second degré qui se coupent suivant une génératrice rectiligne commune et dont la cubique gauche répondant à la question complète l'intersection.

2° Théorème. Une feuillée du troisième ordre est déterminée 1) par six plans, 2)

par cinq plans et la biplanaire de contact de l'un de ces plans, 3) par quatre plans et les biplanaires de contact de deux de ces plans, 4) par trois plans et les biplanaires de contact de ces plans.
Ce théorème est le théorème corrélatif du précédent.

3° 1) Problème. Construire une cubique gauche dont on donne deux points P, P_1 et deux couples de bisécantes gauches a et a', b et b'.–
Par les points P, P_1, on mène respectivement les droites x et y, x_1 et y_1 qui coupent les droites a et a', b et b'. Les droites x et x_1, y et y_1 sont deux couples de droites homologues des gerbes collinéaires projetant la cubique gauche cherchée C^3 des points P, P_1. Les plans xy, x_1y_1 sont des plans homologues des deux gerbes et leur intersection z est une nouvelle bisécante de la cubique gauche C^3. Cette droite z est aussi une génératrice rectiligne commune aux deux quadriques engendrées par les feuillées projectives ayant les droites x et x_1, y et y_1 pour supports dans les deux gerbes. Si un plan quelconque ω, mené par la droite z, coupe les droites a et a', b et b' en des points A et A', B et B', les droites AA', BB' sont des génératrices rectilignes des deux quadriques et leur point de rencontre M est un point de la cubique gauche C^3; celle-ci est donc le lieu du point M lorsque le plan ω pivote autour de la droite z; cette droite z est une bisécante de la cubique gauche C^3 et elle coupe toutes les unisécantes qui rencontrent a et a' ou b et b'.

2) Corollaire. Si a et a', b et b' sont deux couples de bisécantes gauches et P, P_1, M trois points d'une cubique gauche C^3; et si on construit les six droites issues des trois points qui coupent a et a' ou b et b', ces six droites sont des unisécantes de la cubique gauche C^3 et elles sont coupées par une droite z qui est une bisécante de cette courbe.

3) N.B.– Quand les droites a et a', b et b' sont deux couples de côtés opposés d'un tétraèdre, la cubique gauche est circonscrite au tétraèdre; on le reconnait en faisant passer le plan ω par l'un ou l'autre des sommets du tétraèdre. La construction est donc applicable à une cubique gauche dont on donne six points.

4) Théorème sur sept points d'une cubique gauche. Un triangle et un tétraèdre inscrits à une cubique gauche sont circonscrits à une même conique.
Les sommets de deux triangles $\Delta \equiv ABC$, $\Delta' \equiv A'B'C'$ inscrits à une cubique gauche C^3 sont projetés de tout septième point D de la courbe suivant deux trièdres dont les arêtes sont six génératrices rectilignes d'un cône du second degré Γ^2 et dont les faces sont donc six plans tangents d'un second cône du second degré Γ_1^2. Tout plan ne passant pas par le point D coupe les deux trièdres suivant deux triangles circonscrits à la conique formant l'intersection du cône Γ_1^2 et du plan considéré. Si ce plan est le plan ϖ' du triangle Δ' et si on considère les trièdres $DABC$ et $DA'B'C'$, $ADBC$ et $AA'B'C'$, on obtient deux coniques (D), (A) inscrites toutes deux au triangle Δ' et dont chacune est tangente à trois des côtés du quadrilatère suivant lequel le plan ϖ' coupe le tétraèdre $ABCD$; ces deux coniques ont donc cinq tangentes communes et elles coïncident, ce qui démontre le théorème.

5) Corollaire. Quand un heptagone est inscrit à une cubique gauche, ses côtés coupent les faces opposées en des points qui sont les sommets d'un second heptagone à la fois inscrit et circonscrit au premier.
Soit 1234567 l'heptagone donné. En projetant les sommets 1 à 6 du sommet 7, on a un angle solide à six arêtes inscrit au cône du second degré projetant la cubique gauche du point 7. Il résulte du théorème de Pascal appliqué à cet angle solide que les droites 23, 34, 45 coupent les plans 756, 761, 712 en trois points d'un plan passant par le point 7, ce qui

justifie la propriété anoncée.

83. 1° Points communs à une cubique gauche et à une quadrique ou un cône du second degré. 1) Théorème. *Une cubique gauche peut avoir six points communs avec une quadrique ou avec un cône du second degré et ne pas être sur la quadrique ou sur le cône.*

Par cinq points A, B, C, D, E donnés arbitrairement sur une quadrique Q, on peut, en général, faire passer deux cubiques gauches C^3, C'^3 situées sur la quadrique; un sixième point F marqué sur la quadrique Q en dehors des cubiques gauches C^3, C'^3 détermine donc avec les cinq points A, B, C, D, E une cubique gauche répondant à la question. – Lorsque la quadrique Q dégénère en un cône du second degré Γ^2, ayant pour sommet un point S différent des points A, B, C, D, E, il n'y a plus qu'une cubique gauche C^3 passant par ces cinq points et située sur le cône Γ^2; cette courbe passe par le point S et toute cubique gauche répondant à la question est déterminée par les cinq points A, B, C, D, E et un sixième point F pris arbitrairement sur le cône, à l'exclusion des points de la cubique gauche C^3; la cubique gauche qu'on trouve ainsi ne passe pas par le sommet du cône. On aurait pu déterminer d'abord sur le cône Γ^2 une cubique gauche C^3 par la condition de passer par quatre points arbitraires A, B, C, D et par le sommet S du cône, et d'être tangente en ce cinquième point à une génératrice rectiligne déterminée du cône; toute cubique gauche répondant à la question serait déterminée par la condition de passer par les points A, B, C, D, S et d'être tangente au point S à une droite qui n'est pas une génératrice rectiligne du cône Γ^2; cette cubique aurait six points communs avec le cône, le point S devant compter pour deux points communs puisqu'il est un point double du cône.

2) Théorème. *Une cubique gauche C^3 et une quadrique Q ou un cône du second degré Γ^2 ne contenant pas cette courbe ont six points communs.*

Ayant mené deux unisécantes arbitraires a_1, a_2 de la cubique gauche C^3 par un point quelconque A de cette courbe, les bisécantes de la cubique gauche qui les rencontrent respectivement engendrent deux quadriques Q_1, Q_2 dont l'intersection est formée de la cubique gauche C^3 et de la bisécante b joignant les points où le plan a_1a_2 recoupe la courbe. Les quadriques Q_1, Q_2 ont en commun, avec la quadrique Q ou avec le cône Γ^2, huit points dont deux sont les points où la droite b coupe la quadrique Q ou le cône Γ^2 et dont les six autres, répondant à la question, sont les six points communs à la cubique C^3 et à la quadrique Q ou au cône Γ^2.

3) Remarque. Lorsque les équations paramétriques de la cubique gauche C^3 sont mises sous la forme (n° 73, 5°, p. 123)

$$(1)\qquad x_1 : 1 = x_2 : t^3 = x_3 : t = x_4 : t^2,$$

les points communs à la courbe et à la surface du second ordre d'équation

$$(2)\qquad F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

correspondent aux valeurs de t vérifiant l'équation

$$(3)\qquad F(1, t^3, t, t^2) = 0,$$

et la propriété résulte de ce que cette équation est du sixième degré en t.

3) Corollaire. *Une cubique gauche C^3 qui a sept points communs avec une quadrique ou avec un cône du second degré, est tout entière sur la quadrique ou sur le cône.*

2° Plans d'une feuillée du troisième ordre tangents à une quadrique ou à une conique. Propriétés corrélatives des précédentes.

E. - Propriétés projectives des cubiques gauches et des feuillées du troisième ordre; superpositions des deux formes.

84. 1° Théorèmes. 1) Deux cubiques gauches projectives sont des formes homologues de deux espaces collinéaires dont la projectivité est déterminée par celle donnée entre les deux cubiques gauches. 2) Deux feuillées projectives du troisième ordre sont des formes homologues de deux espaces collinéaires dont la projectivité est déterminée par celle donnée entre les deux feuillées du troisième ordre. 3) Une feuillée du troisième ordre et une cubique gauche projectives l'une à l'autre sont des formes homologues de deux espaces réciproques dont la projectivité est déterminée par celle donnée entre la feuillée du troisième ordre et la cubique gauche.

Il suffit de démontrer le premier théorème. Soient A et A', B et B', C et C', D et D', E et E' cinq couples arbitraires de points homologues de deux cubiques gauches projectives C^3, C'^3. Ces cinq couples de points déterminent une collinéation entre les espaces $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ contenant les deux courbes. Si F est un point quelconque de la cubique gauche C^3, au plan ABF de l'espace $\mathcal{E}$, correspond, dans l'espace $\mathcal{E}'$, le plan homologue dans la projectivité $AB(CDE)\,\pi\,A'B'(C'D'E')$ ou le plan A'B'F', si le point F' est, sur la cubique gauche C'^3, le point homologue du point F dans la projectivité donnée entre les deux courbes. La considération des plans ACF et A'C'F', BCF et B'C'F prouve que le point F' est l'homologue du point F dans la collinéation établie entre les deux espaces $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$. La projectivité donnée entre les cubiques gauches C^3, C'^3 est donc contenue dans la collinéation établie entre les espaces $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ et celle-ci reste la même, si on remplace les cinq couples de points homologues considérés d'abord sur les deux courbes par d'autres couples de points homologues de ces courbes.

2° Remarques. - 1) A toute droite et à tout plan déterminés dans l'espace $\mathcal{E}$ par deux ou trois points de la cubique gauche C^3 correspondent, dans l'espace $\mathcal{E}'$, la droite et le plan déterminés par les points homologues de la cubique gauche C'^3; à la tangente et au plan osculateur en un point quelconque M de la courbe C^3, correspondent donc, dans la collinéation entre les espaces $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ la tangente et le plan osculateur au point homologue de la courbe C'^3; plus généralement, à toute forme composée de bisécantes de la courbe C^3, correspond la forme projective de même nom, cône du second degré, système réglé, congruence $G_{1,3}$, composée des bisécantes homologues de la courbe C'^3. Ajoutons que des cônes projetant les courbes C^3, C'^3 de points arbitraires de ces courbes sont projectifs et qu'il en est de même des feuillées projetant les deux courbes de deux quelconques de leurs bisécantes.

2) Rapportons les cubiques gauches C^3, C'^3 et les espaces $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ à des coordonnées quaternaires dans lesquelles les équations paramétriques des deux courbes sont (voir n° 73, 5°, p. 123),

$$(1)\qquad X_1 : 1 = X_2 : t^3 = X_3 : t = X_4 : t^2, \qquad X'_1 : 1 = X'_2 : t'^3 = X'_3 : t' = X'_4 : t'^2 \qquad (2)$$

et supposons la projectivité entre les courbes définie par les trois couples de points fondamentaux des coordonnées quaternaires A_1 et A'_1, A_2 et A'_2, A_5 et A'_5 situés respectivement sur ces courbes. Ces points, dans l'ordre $A_2 A_1 A_5$, $A'_2 A'_1 A'_5$, correspondent aux valeurs ∞, 0, 1 des paramètres t, t'; ils sont ainsi les points fondamentaux des coordonnées binaires sur les deux courbes et l'équation de la projectivité donnée entre ces courbes se réduit à

$$(3)\qquad t = t'.$$

Dès lors, il résulte des équations (1) et (2) que les cubiques gauches C^3, C'_3 sont des formes

W

homologues dans la collinéation définie par les équations

(4) $$X_1 : X'_1 = X_2 : X'_2 = X_3 : X'_3 = X_4 : X'_4$$

entre les espaces ε, ε' qui les contiennent.

Les propriétés énoncées dans la remarque précédente sont donc également des conséquences des équations (11) à (13) écrites à l'endroit déjà rappelé plus haut (n°73, 5°, p. 123).

3) Si on effectue une transformation de coordonnées quaternaires, les équations (1) sont remplacées par d'autres où les coordonnées X_1, X_2, X_3, X_4 des points de la cubique gauche C^3 sont proportionnelles à des fonctions cubiques du paramètre t. Donc, si on prend comme tétraèdre fondamental le tétraèdre dont les sommets A_1, A_2, A_3, A_4 sont les points correspondant aux valeurs ∞, 0, 1, θ de t, sur la cubique gauche C^3, les équations paramétriques de celle-ci sont

(5) $$X_1 : a_1 t(t-1)(t-\theta) = X_2 : a_2 (t-1)(t-\theta) = X_3 : a_3 t(t-\theta) = X_4 : a_4 t(t-1);$$

si on rapporte la cubique gauche C'^3 à des coordonnées quaternaires dont les quatre premiers points fondamentaux sont les points homologues A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 des points A_1, A_2, A_3, A_4, les équations paramétriques de cette courbe sont

(6) $$X'_1 : a'_1 t(t-1)(t-\theta) = X'_2 : a'_2 (t-1)(t-\theta) = X'_3 : a'_3 t(t-\theta) = X'_4 : a'_4 t(t-1);$$

et les équations de la collinéation établie par les cubiques gauches C^3, C'^3 entre les espaces ε, ε' contenant les deux courbes deviennent

(7) $$a'_1 X_1 : a_1 X'_1 = a'_2 X_2 : a_2 X'_2 = a'_3 X_3 : a_3 X_3 = a'_4 X_4 : a_4 X'_4.$$

4) a.– Supposons les espaces ε, ε' superposés et les tétraèdres $A_1A_2A_3A_4$, $A'_1A'_2A'_3A'_4$ confondus ainsi que les cinquièmes points fondamentaux A_5, A'_5 des coordonnées quaternaires. Les deux espaces sont donc rapportés aux mêmes coordonnées quaternaires, et les sommets A_1, A_2, A_3, A_4 du tétraèdre fondamental sont, à la fois, des points unis des cubiques gauches projectives C^3, C'^3 et des points unis des espaces collinéaires ε, ε'.

b.– On peut donner au point A_5 une position telle que les équations (6) de la cubique gauche C'^3 et les équations (7) de la collinéation entre les espaces ε, ε' s'écrivent

(8) $$X_1 : t(t-1)(t-\theta) = X_2 : (t-1)(t-\theta) = X_3 : t(t-\theta) = X_4 : t(t-1)$$

et

(9) $$X_1 : a_1 X'_1 = X_2 : a_2 X'_2 = X_3 : a_3 X'_3 = X_4 : a_4 X'_4.$$

c.– Pour que les cubiques gauches C^3, C'^3 aient un cinquième point uni, il faut et il suffit, en vertu des équations (5) et (8), qu'on ait

(10) $$a_1 = a_2 = a_3 = a_4;$$

lorsque cette condition est remplie, les équations (9) se réduisent à

(11) $$X_1 : X'_1 = X_2 : X'_2 = X_3 : X'_3 = X_4 : X'_4$$

tandis que les équations (5) et (8) deviennent identiques. Donc, si deux cubiques gauches projectives C^3, C'^3, appartenant à des espaces superposés ε, ε', ont cinq points unis, elles sont confondues et les relations de projectivité entre les deux courbes et entre les deux espaces se réduisent, l'une et l'autre, à des transformations identiques et cette propriété est ainsi une conséquence de celle de la collinéation entre deux espaces superposés de se réduire à la transformation identique lorsque les deux espaces ont cinq points unis pouvant servir d'élé-

ments fondamentaux à des coordonnées quaternaires

D'ailleurs, les équations aux points unis de la collinéation (9) sont

(12) $(k - a_1) X_1 = 0, \quad (k - a_2) X_2 = 0, \quad (k - a_3) X_3 = 0, \quad (k - a_4) X_4 = 0,$

dans lesquelles k doit être remplacé par l'une ou l'autre des racines de l'équation

(13) $$(k - a_1)(k - a_2)(k - a_3)(k - a_4) = 0.$$

Le cas de la transformation identique se produit quand cette dernière équation a une racine quadruple.

(14) $$k = a_1 = a_2 = a_3 = a_4.$$

Quatre autres cas sont à considérer selon que l'équation a une racine triple et une racine simple, deux racines doubles, une racine double et deux racines simples, ou quatre racines simples.

d. Premier cas : $a_1 = a_2 = a_3 \neq a_4$. La collinéation (9) entre les espaces $\varepsilon, \varepsilon'$ est une perspectivité dont le centre et le plan sont le point A_4 et le plan $A_1 A_2 A_3$. Les droites joignant les points homologues des cubiques gauches C^3, C'^3 passent toutes par le point A_4 ; les deux courbes sont sur le cône du second degré Γ^2 d'équation

(15) $$X_2 X_3 - X_3 X_1 + X_1 X_2 = 0,$$

et elles ont au point A_4 la même tangente et le même plan osculateur, qui sont la génératrice rectiligne du cône Γ^2 et le plan tangent correspondant dont les équations sont

(16) $X_1 = \theta X_2 = (\theta - 1) X_3, \qquad X_1 - \theta^2 X_2 + (\theta - 1)^2 X_3 = 0;$ (17)

les deux courbes n'ont donc aucun point commun différent des points unis A_1, A_2, A_3, A_4.

e. Second cas : $a_1 = a_2 \neq a_3 = a_4$. Les espaces collinéaires $\varepsilon, \varepsilon'$ ont, pour points unis, les points des droites $A_1 A_2$, $A_3 A_4$ qui sont donc les directrices de la congruence linéaire G_1 des droites unies des deux espaces et les droites joignant les points homologues des cubiques gauches C^3, C'^3 s'appuient sur ces deux droites ; celles-ci étant des bisécantes gauches des deux courbes, les droites des points homologues des deux courbes sont des unisécantes et engendrent un système réglé dont le système réglé complémentaire est formé de bisécantes communes aux deux courbes ; l'équation de la quadrique support des deux systèmes réglés est

(17) bis. $$X_1 X_3 - X_1 X_4 - X_2 X_3 + \theta X_2 X_4 = 0$$

et les quatre points A_1, A_2, A_3, A_4 sont encore les seuls points d'intersection des courbes C^3, C'^3.

f. Troisième cas : $a_1 = a_2 \neq a_3 \neq a_4 \neq a_1$. Les points unis des espaces collinéaires $\varepsilon, \varepsilon'$ sont les points de la droite $A_1 A_2$, le point A_3 et le point A_4 ; les plans passant par la droite $A_3 A_4$ sont des plans unis et il en résulte déjà que cette droite rencontre toutes celles joignant les points homologues des courbes C^3, C'^3. D'autre part, les coordonnées de ces dernières droites sont

(18) $0, \ (a_1 - a_3) t (t - \theta), \ (a_1 - a_4) t (t - 1), \ (a_3 - a_4) t, \ (a_4 - a_1)(t - 1), \ (a_1 - a_3)(t - \theta);$

pour que toutes ces droites coupent une même droite a, il faut et il suffit que les coordonnées de celle-ci vérifient les équations

(19) $A_{42} (a_1 - a_3) + A_{23} (a_1 - a_4) = 0, \qquad A_{13} (a_1 - a_4) - A_{14} (a_1 - a_3) \theta = 0,$

(20) $A_{42} (a_1 - a_3) \theta + A_{13} (a_1 - a_4) - A_{12} (a_3 - a_4) + A_{13} (a_1 - a_4) - A_{14} (a_1 - a_3) = 0,$

et la condition générale

(21) $$A_{12}A_{34} + A_{13}A_{42} + A_{14}A_{23} = 0.$$

La droite a reste la même lorsque u et v varient proportionnellement; mais on reconnait sans peine qu'on donnant à u et v deux systèmes de valeurs non proportionnelles, les positions correspondantes de la droite a sont gauches; d'autre part, lorsque $u = v = 0$, la droite a coïncide avec la droite A_3A_4 qui est une bisécante des deux courbes C^3, C'^3; les droites aux points homologues de ces courbes s'appuient donc sur une infinité de droites gauches deux à deux, dont l'une, A_3A_4, est une bisécante commune aux deux courbes; par suite, les droites des points homologues de ces courbes sont des unisécantes pour l'une comme pour l'autre et elles engendrent un système réglé dont le système complémentaire est formé de bisécantes communes aux deux courbes; les points A_1, A_2, A_3, A_4 sont donc les seuls points d'intersection de ces courbes

g. Quatrième cas: les nombres a_1, a_2, a_3, a_4 sont inégaux deux à deux. – Les sommets, les faces et les arêtes du tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ sont les seuls éléments unis des espaces collinéaires $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$. – Pour que les cubiques gauches C^3, C'^3 aient un point commun S différent des points A_1, A_2, A_3, A_4, il est nécessaire et suffisant qu'il existe des valeurs de t et de t' vérifiant les équations.

(23) $$a_1t - a_2t' = 0, \qquad a_1t - a_3t' + a_3 - a_1 = 0, \qquad a_1t - a_4t' + (a_4 - a_1)\theta = 0;$$

il est donc nécessaire et suffisant que la valeur de θ soit telle qu'on ait

(24) $$(a_1 - a_4)(a_2 - a_3)\theta - (a_1 - a_3)(a_2 - a_4) = 0.$$

Lorsque cette condition est remplie, les cônes projectifs du second degré qui projettent les deux cubiques gauches C^3, C'^3 du cinquième point commun S ont quatre droites unies, les droites SA_1, SA_2, SA_3, SA_4; les deux cônes sont donc confondus et, dans ce cas, les droites joignant les points homologues des deux courbes passent toutes par le point S.

Si la condition (24) n'est pas remplie, les points A_1, A_2, A_3, A_4 sont les seuls points communs aux courbes C^3, C'^3 et on va démontrer que les droites des points homologues des deux courbes sont des unisécantes de chacune de ces courbes et qu'elles engendrent un système réglé dont le système réglé complémentaire est formé de bisécantes communes aux deux courbes. Tout d'abord, la droite joignant deux points homologues distincts B, B' ne peut recouper les deux courbes en d'autres points homologues, les seules droites unies des espaces collinéaires $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ étant les arêtes du tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$. Si la droite BB' recoupait les deux courbes, ce serait donc en des points non homologues C, D' et si D était l'homologue de D', la droite DD' serait une unisécante de la cubique gauche C^3, le plan des droites BB', DD' ne pouvant couper cette courbe en quatre points. On peut donc supposer que la droite BB' est une unisécante de la courbe C^3 et qu'ainsi elle est une directrice d'un système réglé Σ formé de bisécantes de cette courbe, le système réglé complémentaire Σ' est le lieu des intersections des plans homologues des feuillées projectives projetant la cubique gauche C^3 des génératrices rectilignes du système réglé Σ; ces feuillées étant projectives à la cubique gauche C^3, sont projectives à la cubique gauche C'^3 et, cinq feuillets de chacune d'elles passant par les points homologues A_1, A_2, A_3, A_4, B' de la courbe, celle-ci est perspective aux feuillées (n°81, 5°, 4, a), les génératrices rectilignes du système réglé Σ' joignent les points homologues des deux courbes dont elles sont des unisécantes, tandis que les génératrices rectilignes du système réglé Σ sont des bisécantes communes aux deux courbes.

h. Conclusion. On démontre sans peine que les réciproques des propriétés trouvées dans la discussion précédente pour les droites joignant les points homologues des cubiques gauches projectives C^3, C'^3 sont vraies. On peut donc énoncer le théorème suivant:

Lorsque deux cubiques gauches projectives distinctes ont quatre points unis, si elles sont

tangentes en un de ces points, ce point est le sommet d'un cône du second degré dont les génératrices rectilignes joignent les points homologues des deux courbes; si elles se recoupent en un cinquième point différent des points unis, ce point est le sommet d'un cône du second degré dont les génératrices rectilignes joignent encore les points homologues des deux courbes; dans tout autre cas, les droites joignant ces points homologues sont les génératrices rectilignes d'un système réglé perspectif aux deux courbes et dont le système réglé complémentaire est formé de bisécantes communes à ces courbes; et réciproquement.

N.B. Les propriétés corrélatives s'appliquent à deux feuillées du troisième ordre, projectives et distinctes, ayant quatre feuillets unis.

85. 1° Théorèmes. 1) Les bisécantes joignant les points conjugués d'une cubique gauche involutive sont les génératrices rectilignes d'un système réglé dont le système réglé complémentaire, formé d'unisécantes de la cubique gauche, est involutif dans une involution perspective à celle donnée sur la courbe

2) Les biplanaires suivant lesquelles se coupent les feuillets conjugués d'une feuillée involutive du troisième degré sont les génératrices rectilignes d'un système réglé dont le système réglé complémentaire, formé d'uniplanaires de la feuillée du troisième ordre, est involutif dans une involution perspective à celle donnée dans la feuillée.

Il suffit de démontrer le premier théorème. Une cubique gauche involutive C^3 est projetée de l'un quelconque P de ses points suivant un cône involutif du second degré Γ^2_P; les plans déterminés par les couples de génératrices rectilignes conjuguées du cône se coupent suivant une droite p, la polaire de l'involution dont le cône est le support; la droite p passe par le point P et est extérieure au cône elle est donc une unisécante de la cubique gauche C^3 et la première partie du théorème résulte de ce que les bisécantes joignant les points conjugués de l'involution donnée sur la courbe, s'appuient sur la droite p et sont donc les génératrices rectilignes d'un système réglé Σ. Le système réglé complémentaire Σ' est formé des polaires des cônes involutifs du second degré projetant l'involution donnée sur la cubique gauche C^3 des points de cette courbe; la seconde partie du théorème résulte de ce que l'involution donnée sur la courbe C^3 est projetée de chacune des génératrices rectilignes du système réglé Σ, suivant une feuillée involutive du premier degré.

2° Remarque. – 1) L'involution donnée sur la cubique gauche C^3 étant perspective et, par suite, projective à celle obtenue sur le cône Γ^2_P, est projective à la feuillée du premier degré qui la projette de la droite p et aux ponctuelles du premier degré que les génératrices rectilignes du système réglé Σ tracent sur celles du système réglé Σ'.

2) Soient E et F, A et A', B et B', C et C', ... les points doubles ou unis et des couples de points conjugués de l'involution donnée sur la cubique gauche C^3; e et f, a et a', b et b', c et c', ... les positions correspondantes de la droite p, ou les droites unies et les couples de droites conjuguées du système réglé involutif Σ'. Les points A et A', B et B', C et C', ... sont conjugués harmoniques sur les droites AA', BB', CC', ... par rapport aux points où ces droites coupent les droites e, f; la cubique gauche C^3 est donc analagmatique dans l'espace involutif gauche ε ayant les droites e, f pour directrices et déterminé, en vertu de ce qui précède, ou aussi, en vertu du théorème 1° (1) du n° 84, par l'involution donnée sur la cubique gauche C^3.

3) Les droites PE, PF sont les droites unies de l'involution trouvée sur le cône Γ^2_P; la droite p est donc l'intersection des plans tangents au cône suivant ces deux droites et il en résulte qu'elle coupe les tangentes t_E, t_F à la cubique gauche aux points E, F. Lorsque le point P coïncide avec le point E, la droite p devient la droite e qui est donc l'intersection du plan

ϖ

osculateur au point E et du plan déterminé par ce point et la tangente t_F au point F, ou de la droite joignant le point E au point où la tangente t_F coupe le plan osculateur ϖ_E du point E. De même, la droite f joint le point F au point où la tangente t_E coupe le plan osculateur ϖ_F.

4) Le plan $\overset{F}{E}AA'$ passant par la droite e, on retrouve la propriété précédente de cette droite, en faisant coïncider les deux points A, A', d'abord avec le point E, puis avec le point F. La remarque s'applique à la droite f.

5) Les cônes du second degré $\Gamma^2_A \equiv A(A, A'; B, B'; C, C'; \ldots\ldots)$, $\Gamma^2_{A'} \equiv A'(A', A; B', B; C', C; \ldots\ldots)$ sont conjugués dans l'espace involutif gauche ε; il en est donc de même des tangentes $t_A, t_{A'}$ et des plans osculateurs $\varpi_A, \varpi_{A'}$; les droites e, f, t_A, $t_{A'}$ appartiennent donc à un système réglé sur lequel elles forment un groupe harmonique; les plans ϖ_A, $\varpi_{A'}$ se coupent suivant une droite d_A qui s'appuie sur les droites e, f et détermine avec celle-ci deux plans $e\,d_A$, $f\,d_A$ formant un groupe harmonique avec les plans $\varpi_A, \varpi_{A'}$, les points A, A' étant conjugués harmoniques par rapport aux points où la droite AA' coupe les droites e, f.

6) On peut retrouver la propriété de la droite d_A et des plans $\varpi_A, \varpi_{A'}$, en considérant ceux-ci comme les limites des plans ABC, A'B'C' quand les points B et C, B' et C' se confondent avec les points A et A'.

7) Lorsque les équations paramétriques de la cubique gauche C^3 sont mises sous la forme

$$(1) \qquad X_1 : 1 = X_2 : t^3 = X_3 : t = X_4 : t^2$$

et que les points unis de l'involution sont les points fondamentaux $E \equiv A_1$, $F \equiv A_2$ pour lesquels $t = 0$ et ∞, l'équation de l'involution est $t = -t'$ et les équations de l'involution dans l'espace involutif gauche ε sont

$$(2) \qquad X_1 : X'_1 = X_2 : -X'_2 = X_3 : -X'_3 = X_4 : X'_4 .$$

Les coordonnées de la droite AA' joignant les points conjugués $A(t)$, $A'(-t)$ sont $t^2, 1, 0, -t^2, t^4, 0$; en faisant $t = 0$ ou ∞, on en déduit que les tangentes aux points $E \equiv A_1$, $F \equiv A_2$ sont les droites $t_E \equiv A_1A_3$, $t_F \equiv A_2A_4$; toutes les droites telles que AA' s'appuient sur les droites de coordonnées 0, 0, 1, 0, 0, 0 et 0, 0, 0, 0, 0, 1 ces droites sont donc les droites $e \equiv A_1A_4$, $f \equiv A_2A_3$; l'équation de la quadrique support des systèmes réglés Σ, Σ' est

$$(3) \qquad X_1X_2 - X_3X_4 = 0$$

car cette quadrique doit contenir les côtés du quadrilatère gauche $A_1A_3A_2A_4$.

Les équations des plans osculateurs aux points $A(t)$, $A'(-t)$ sont (p. 124 équation (15))

$$(4) \qquad t^3X_1 - X_2 - 3t^2X_3 + 3tX_4 = 0, \qquad t^3X_1 + X_2 + 3t^2X_3 + 3tX_4 = 0, \qquad (5)$$

ces plans se coupent suivant la même droite que les plans

$$(5) \qquad t^2X_1 + 3X_4 = 0, \qquad X_2 + 3t^2X_4 = 0$$

passant par les droites $f \equiv A_2A_3$, $e \equiv A_1A_4$, ce qui prouve bien que cette droite est une droite de la congruence linéaire G_1 ayant les droites e, f pour directrices.

L'équation du plan ϖ passant par les points $P(\theta)$, $A(t)$, $A'(-t)$ est

$$(6) \qquad \theta t^2X_1 + X_2 - t^2X_3 - \theta X_4 = 0;$$

lorsque θ est constant et que t varie, on en déduit les équations

$$(7) \qquad \theta X_1 - X_3 = 0, \qquad X_2 - \theta X_4 = 0$$

de la droite p autour de laquelle tourne le plan ϖ et on reconnait que cette droite est la polaire du plan PEF ou PA_1A_2 pour le cône du second degré Γ_P^2 d'équation

$$(8) \qquad \theta^2 X_3^2 + X_4^2 + \theta X_1 X_2 - \theta^2 X_1 X_4 - X_2 X_3 - \theta X_3 X_4 = 0$$

projetant la cubique gauche C^3 du point P (équation (14), p. 124); on voit que cette droite s'appuie sur les tangentes $t_E \equiv A_1 A_3$, $t_F \equiv A_3 A_4$ aux points $E \equiv A_1$, $F \equiv A_2$ de la courbe C^3, et est une génératrice rectiligne de la quadrique (3).

3° Corollaires. 1) Les plans osculateurs en trois points d'une cubique gauche se coupent en un point du plan des points de contact.

2) Les points d'osculation de trois points d'une feuillée de troisième ordre déterminent un plan passant par le point commun aux trois plans.

Il suffit de démontrer la première propriété. Elle est une conséquence immédiate de la précédente (2°, 5 ou 6). En effet, les points E, A, A' peuvent être pris arbitrairement sur la cubique gauche C^3 pour définir l'involution considérée sur cette courbe. La propriété résulte donc de ce que la droite e qui coupe l'intersection d_A des plans osculateurs ϖ_A, $\varpi_{A'}$ des points A, A', est elle-même l'intersection du plan osculateur ϖ_E du point E et du plan E A A'; le point ed_A est à la fois dans les quatre plans E A A', ϖ_E, ϖ_A, $\varpi_{A'}$.

N.B. Pour démontrer la propriété par le calcul, on peut considérer les trois points A_1, A_2, A_5 de la cubique gauche définie par les équations (1), les équations du plan de ces trois points et des plans osculateurs aux mêmes points sont

$$(9) \qquad X_2 = 0, \qquad X_1 = 0, \qquad X_1 - X_2 - 3X_3 + 3X_4 = 0, \qquad X_3 - X_4 = 0;$$

ces quatre plans se coupent au point 0, 0, 1, 1.

3) Quatre points d'une cubique gauche sont les sommets d'un tétraèdre inscrit et circonscrit au tétraèdre des plans osculateurs en ces points.

4) Quatre plans d'une feuillée du troisième ordre sont les faces d'un tétraèdre circonscrit et inscrit au tétraèdre des points d'osculation de ces plans.

5) D'un point quelconque, on ne peut mener plus de trois plans osculateurs à une cubique gauche.

6) Un plan quelconque ne peut contenir plus de trois points d'osculation d'une feuillée du troisième ordre.

En effet si les plans osculateurs en quatre points d'une cubique gauche se coupaient en un même point, celui-ci serait à la fois dans les quatre faces du tétraèdre ayant les quatre points pour sommets.

N.B. La propriété résulte aussi de ce que l'équation (4) du plan osculateur au point A(t) est du troisième degré en t (voir page 124.).

7) Par une droite quelconque, on ne peut mener plus de deux plans osculateurs à une cubique gauche.

8) Une droite quelconque ne peut passer par plus de deux points d'osculation d'une feuillée du troisième ordre.

Si la droite x appartenait aux plans osculateurs en trois points A, B, C, un plan quelconque ω mené par la droite AB recouperait la cubique gauche en un point D dont le plan osculateur passerait par le point ωx et il y aurait quatre plans osculateurs passant par un même point.

86. 1° Lemme. Un espace focal est déterminé par les sommets d'un triangle et leurs plans focaux, ceux-ci formant les faces d'un trièdre dont le sommet est dans le plan

du triangle et est le foyer de ce plan.
Soient ϖ, A, B, C le plan et les sommets du triangle ; α, β, γ les plans focaux des points A, B, C ; P le foyer du plan ϖ où se coupent les plans α, β, γ ; x une droite différente de la droite CP, menée arbitrairement par le point C dans le plan γ. Il existe un espace focal déterminé par les droites conjuguées AB, $\alpha\beta$ et la droite double x. La propriété résulte de ce que ces données assurent la connaissance de tous les éléments de la figure définie dans l'énoncé du théorème et doivent satisfaire aux conditions indiquées dans tout espace focal pouvant répondre à la question.

2° Théorèmes. 1) Les points d'une cubique gauche et leurs plans osculateurs sont associés dans un espace focal, de telle manière que chaque point de la courbe est le foyer du plan osculateur correspondant.

2) Les plans d'une feuillée du troisième ordre et leurs points d'osculation sont associés dans un espace focal, de telle manière que chaque plan de la feuillée est le plan focal de son point d'osculation.

Il suffit de démontrer le premier théorème. Soient A, B, C les points où un plan arbitraire ϖ coupe une cubique gauche C^3 ; P le point du plan ϖ où se coupent les plans osculateurs. α, β, γ des points A, B, C. Ces éléments définissent un espace focal dans lequel les droites AB et $\alpha\beta$, BC et $\beta\gamma$, CA et $\gamma\alpha$ sont trois couples de droites conjuguées ; de plus, si les droites x, y issues d'un point D coupent les droites AB et $\alpha\beta$, BC et $\beta\gamma$, leur plan δ est le plan focal du point D et contient aussi la droite z issue du point D et s'appuyant sur les droites CA et $\gamma\alpha$. Mais si D est un point de la cubique gauche C^3, ce plan δ est aussi le plan osculateur du point D. La propriété résulte donc de ce que les droites AB et $\alpha\beta$, BC et $\beta\gamma$, définies comme on l'a fait, doivent être deux couples de droites conjuguées de tout espace focal pouvant répondre à la question, la démonstration étant ainsi indépendante de la position particulière du plan ϖ.

N.B. La propriété peut se déduire de l'équation (4) du plan osculateur ϖ_A au point A(t). En vertu de cette équation, les coordonnées du plan ϖ_A sont

$$(10) \qquad \xi_1 = t^3, \qquad \xi_2 = -1, \qquad \xi_3 = -3t^2, \qquad \xi_4 = 3t.$$

Dès lors, il résulte des équations (1) de la cubique gauche C^3 que le plan ϖ_A est le plan focal du point A dans l'espace focal déterminé par les équations

$$(11) \qquad \xi_1 = X_2, \qquad \xi_2 = -X_1, \qquad \xi_3 = -3X_4, \qquad \xi_4 = 3X_3$$

à déterminant symétrique gauche (voir page 124).

3° Définition. On dit que la cubique gauche C^3 est une courbe directrice de l'espace focal qu'elle détermine en vertu du théorème précédent.

4° Corollaires. – Une réciprocité transformant une cubique gauche en une feuillée du troisième ordre, on a : 1) Les plans osculateurs d'une cubique gauche sont les plans d'une feuillée du troisième ordre dont les points de la courbe sont les points d'osculation.

2) Les points d'osculation d'une feuillée du troisième ordre sont les points d'une cubique gauche dont les plans de la feuillée sont les plans osculateurs.

5° Autres corollaires. 3) Les tangentes d'une cubique gauche sont projetées d'un point de la courbe suivant une feuillée du second degré et sont coupées par tout plan osculateur suivant une conique.

4) Les biplanaires d'une feuillée du troisième ordre coupent un plan de la feuillée suivant une conique et sont projetées de tout point d'osculation suivant un cône

du second degré.

Une réciprocité entre deux espaces transforme la première propriété en la seconde et inversement. Deux points arbitraires P, P_1 d'une cubique gauche C^3 sont les supports de deux gerbes collinéaires dans lesquelles les droites projetant les points de la courbe se correspondent, de même que les plans projetant les bisécantes de la courbe. Dans l'espace focal déterminé par la cubique gauche C^3, ces gerbes ont pour formes homologues, deux systèmes plans collinéaires l'un à l'autre, dont les supports sont les plans osculateurs ϖ, ϖ_1 aux points P, P_1. La cubique gauche C^3 a pour forme homologue, une feuillée du troisième ordre φ^3 dont chaque feuillet coupe les systèmes plans ϖ, ϖ_1 suivant des droites homologues et dont chaque biplanaire coupe les mêmes systèmes plans en des points homologues. A toute bisécante de C^3 correspond une biplanaire de φ^3; les deux droites sont distinctes ou confondues selon que la première coupe la cubique C^3 en des points distincts ou confondus, ou suivant que les plans de la feuillée φ^3 menés par la seconde sont distincts ou confondus. Les tangentes de la cubique gauche C^3 coïncident avec les biplanaires de contact des plans de la feuillée du troisième ordre φ^3 et appartiennent à la fois à la congruence $G_{1,3}$ des bisécantes de la courbe et à la congruence $G_{3,1}$ des biplanaires de la feuillée; appartenant à la congruence $G_{1,3}$, elles sont projetées d'un point quelconque de la courbe C^3 suivant les plans tangents du cône du second degré qui projette la courbe du point considéré; appartenant à la congruence $G_{3,1}$ elles coupent un plan quelconque de la feuillée φ^3 suivant les points de contact du faisceau du second degré suivant lequel le plan considéré est coupé par les autres plans de la feuillée.

6° Remarque. Aux considérations précédentes, il convient d'ajouter les deux propriétés corrélatives suivantes:

1) Les feuillées projetant les points d'une cubique gauche de ses bisécantes sont projectives; si une bisécante coupe la courbe en des points distincts, les plans projetant ces points de la bisécante passent par les tangentes correspondantes, et si une bisécante est tangente, le plan projetant le point de contact de cette tangente est le plan osculateur en ce point.

2) Les ponctuelles tracées par les plans osculateurs d'une cubique gauche sur les biplanaires sont projectives; si une biplanaire est l'intersection de deux plans osculateurs distincts, les points correspondant à ces plans sur la biplanaire sont les points d'intersection avec les biplanaires de contact des deux plans, c'est-à-dire avec les tangentes à la cubique gauche aux points d'osculation de ces plans, et si une biplanaire est tangente à la courbe, le point correspondant au seul plan osculateur dans lequel elle se trouve, est le point de contact.

7° Théorème. Une cubique gauche est déterminée par deux points, leurs tangentes et leurs plans osculateurs, si on donne aussi un troisième plan osculateur ou un troisième point de la courbe.

Les deux parties du théorème étant corrélatives, il suffit de démontrer la première. Soit à construire une cubique gauche passant par les trois points donnés A, B, C tangente aux droites a, b issues des points A, B et osculatrice en ces points aux plans α, β menés par les droites a, b. Cette cubique gauche est bien déterminée, les données faisant connaître les cônes qui la projettent des points A, B et se coupent déjà suivant la génératrice rectiligne commune AB.

8° Remarque. Les plans osculateurs d'une cubique gauche se confondant avec ceux d'une feuillée du troisième ordre, et le lieu des points d'osculation d'une telle feuillée étant les points d'une cubique gauche, les propriétés énoncées précédemment sur la détermination d'une

cubique gauche ou d'une feuillée du troisième ordre permettent de dire: Une cubique gauche est déterminée 1) par six plans osculateurs; 2) par cinq plans osculateurs et la tangente dans l'un d'eux; 3) par trois plans osculateurs et les tangentes correspondantes; 4) par deux plans osculateurs et quatre biplanaires du système des plans osculateurs; 5) par trois plans osculateurs et trois biplanaires; par cinq plans osculateurs et une biplanaire.

F. Classification des cubiques gauches réelles (Cremona).-

87. 1° Le plan de l'infini d'un espace réel et toute cubique gauche réelle de cet espace ont en commun trois points réels ou un point réel et deux points imaginaires conjugués. La tangente en chacun de ces points est une asymptote et le plan osculateur correspondant un plan asymptote de la courbe. Celle-ci est projetée de chacun de ses points à l'infini suivant un cylindre du second degré dont l'asymptote et le plan asymptote correspondant sont une génératrice rectiligne et le plan tangent correspondant.

2° On distingue quatre sortes de cubiques gauches réelles.

1) L'hyperbole gauche a trois points réels distincts à l'infini, et par suite trois asymptotes et trois plans asymptotes à distance finie. Elle est projetée des points à l'infini suivant trois cylindres hyperboliques dont les six plans asymptotes sont parallèles par couples et se coupent suivant les trois bisécantes à l'infini. Elle est dite équilatère lorsque ses asymptotes sont parallèles aux arêtes d'un trièdre trirectangle.

2) L'ellipse gauche n'a qu'un point réel à l'infini, une seule asymptote réelle et un seul plan asymptote réel, tous deux à distance finie. Elle n'appartient qu'à un seul cylindre réel du second degré et ce cylindre est elliptique.

3) L'hyperbole parabolique gauche a deux points réels distincts à l'infini en l'un desquels elle est tangente au plan de l'infini. Elle a une asymptote à l'infini, une seconde asymptote et deux plans asymptotes à distance finie. Le cylindre du second degré qui la projette du point où elle est sécante au plan de l'infini est tangent à ce plan et est un cylindre parabolique. Le cylindre du second degré qui la projette du point où elle est tangente au plan de l'infini coupe ce plan suivant deux droites réelles distinctes et est un cylindre hyperbolique.

4) La parabole gauche est osculatrice au plan de l'infini. Elle a une seule asymptote, mais cette asymptote est dans le plan de l'infini qui est le seul plan asymptote de la courbe; celle-ci n'appartient qu'à un seul cylindre et ce cylindre est un cylindre parabolique.

3° Propriétés de la parabole gauche.- Des propriétés générales déjà connues des cubiques gauches, on déduit les propriétés particulières suivantes de la parabole gauche:

1) Les tangentes à une parabole gauche sont parallèles aux génératrices rectilignes d'un cône du second degré. - En effet, le plan de l'infini étant osculateur, les tangentes à la courbe coupent le plan de l'infini suivant une conique C^2_∞ et sont parallèles aux génératrices rectilignes de tout cône du second degré Γ^2 projetant cette conique d'un point propre.

2) Les plans osculateurs sont parallèles aux plans tangents à un cône du second degré. En effet, le plan de l'infini étant un plan osculateur, est coupé par les autres plans osculateurs suivant les tangentes à la conique C^2_∞; ces plans sont donc parallèles aux plans tangents du cône du second degré Γ^2.

3) Les plans osculateurs forment une feuillée (parabolique) du troisième ordre et sont coupés par les biplanaires de la feuillée suivant des systèmes plans alliés. On sait que deux plans quelconques d'une feuillée du troisième ordre sont coupés par les biplanaires de la feuillée en des points homologues de deux systèmes plans collinéaires; lorsque la feuillée du troisième ordre est celle des plans osculateurs d'une parabole gauche, le plan de l'infini est un des plans de la feuillée, les droites impropres de deux plans quelconques

sont des éléments homologues des systèmes plans collinéaires dont ces deux plans sont les supports et la collinéation est une affinité.

4) La feuillée des plans osculateurs coupe ses biplanaires suivant des ponctuelles semblables. Ses ponctuelles sont projectives en vertu d'une propriété générale des feuillées du troisième ordre, elles sont semblables parce que les points impropres sont des points homologues.

6. Points conjugués et plans conjugués par rapport à une cubique gauche ou par rapport à une feuillée du troisième ordre.

88. 1° Théorèmes. 1) Les plans polaires d'un même point arbitraire, par rapport aux quadriques et aux cônes du second degré que l'on peut mener par une cubique gauche, passent par un même point et les deux points sont sur une bisécante de la cubique gauche. – 2) Les pôles d'un même plan arbitraire, par rapport aux quadriques et aux coniques inscrites à une feuillée du troisième ordre, sont dans un même plan et les deux plans passent par une biplanaire de la feuillée du troisième ordre. (Le pôle d'un plan par rapport à une conique considérée comme une quadrique de la seconde classe est le pôle, par rapport à la conique, de la droite suivant laquelle le plan donné coupe le plan de la conique avec lequel on suppose qu'il n'est pas confondu.)

Il suffit de démontrer le premier théorème. Soit A le point dont on considère les plans polaires (ϖ) par rapport aux quadriques (Q) et aux cônes du second degré (Γ^2) passant par la cubique gauche C^3. Deux cas sont à considérer.

a. Le point A n'est pas sur la cubique gauche C^3 et n'appartient donc qu'à une seule bisécante BC de celle-ci. Il existe une infinité de quadriques (Q) et de cônes (Γ^2) dont la droite BC n'est pas une génératrice rectiligne et le point répondant à la question est alors le conjugué harmonique A' du point A par rapport aux points B, C sur la droite BC. Dès lors, la propriété résulte de ce que la droite BC est l'intersection des plans polaires du point A pour toute quadrique (Q) et tout cône du second degré (Γ^2) dont elle est une génératrice rectiligne.

N.B. Si la bisécante BC issue du point A est tangente à la cubique gauche C^3, les points B, C, A' sont confondus avec le point de contact.

b. – Lorsque le point A est sur la cubique gauche C^3, ses plans polaires pour les quadriques (Q) et les cônes (Γ^2) passent tous par la tangente t_A au point A et le point A' est tout point de cette droite.

N.B. – Il convient d'observer que le plan polaire du point A pour le cône Γ^2_A projetant la cubique gauche C^3 de ce point est indéterminé, mais le plan polaire du point A pour le cône Γ^2_B dont le sommet est un autre point B de la courbe, est le plan Bt_A qui devient le plan osculateur ϖ_A du point A de la cubique gauche C^3 lorsque le point B vient se confondre avec le point A; on peut, dans le cas précédent, convenir de dire que le plan osculateur ϖ_A est le plan polaire du point A pour le cône Γ^2_A projetant la cubique gauche C^3 de ce point.

2° Définitions – 1) Les points A, A' sont dits conjugués par la cubique gauche C^3; donc, deux points sont conjugués pour une cubique gauche, lorsque chacun d'eux est conjugué de l'autre pour toutes les quadriques et tous les cônes du second degré passant par la courbe.

2) Par corrélation, deux plans sont conjugués pour une feuillée du troisième ordre, lorsque chacun d'eux est conjugué de l'autre pour toutes les quadriques et toutes les coniques tangentes aux plans de la feuillée.

N.B. – Toute feuillée du troisième ordre étant formée des plans osculateurs d'une cubique gauche, on dira aussi que deux plans conjugués pour une feuillée du troisième ordre sont conjugués pour la cubique gauche des points d'osculation des plans de la feuillée.

3° Remarque. Le point A' étant unique lorsque le point A n'est pas sur la cubique gauche C^3 (voir 1°, a), on en déduit que les droites polaires d'une même droite pour les quadriques (Q) et les cônes (Γ^2) passant par la

cubique gauche C^3 ne sont jamais confondues en une seule droite.

4° Corollaires. – 1) Les couples de points conjugués pour une cubique gauche sur une même bisécante de la courbe sont en involution et il en est de même des couples de plans conjugués passant par une biplanaire.

N.B. Ces involutions dégénèrent en involutions singulières, lorsque la bisécante et la biplanaire sont tangentes à la cubique gauche.

2) Dans l'espace focal ayant la cubique gauche C^3 pour courbe directrice, deux points conjugués ont pour homologues deux plans conjugués.

5° Théorèmes. 1) Si la bisécante joignant deux points conjugués n'est pas tangente à la cubique gauche, à tout plan mené par l'un de ces points correspond une quadrique ou un cône du second degré passant par la courbe et ayant le plan considéré comme plan polaire de l'autre point donné.

2) Si la biplanaire suivant laquelle se coupent deux plans conjugués n'est pas tangente à la cubique gauche à tout point pris dans un des plans correspond une quadrique ou une conique inscrite à la feuillée des plans osculateurs et ayant le point considéré comme pôle de l'autre plan donné.

Il suffit de démontrer le premier théorème. Soient A, A' deux points conjugués pour la cubique gauche C^3 et α un plan mené par le point A'. Différents cas sont à envisager.

a. – Le plan α ne passe pas par la bisécante AA'. Soient B, C deux points quelconques de la cubique gauche C^3, différents des points où cette courbe coupe le plan α et la droite AA'; B_1, C_1 leurs conjugués harmoniques sur les droites AB, AC par rapport aux points A et (AB, α), A et (AC, α). Les points B_1, C_1 ne sont pas sur la cubique gauche et la seule quadrique Q répondant à la question est le support du système réglé engendré par les feuillées projetant la cubique gauche des bisécantes passant par les points B_1, C_1.

b. – Le plan α passe par la bisécante AA' et par la tangente en un des points A_1, A_2 où cette droite coupe la courbe, par exemple, par la tangente t_{A_1} au point A_1. La quadrique répondant à la question est le cône $\Gamma^2_{A_2}$ projetant la courbe du point A_2.

c. – Le plan α passe par la bisécante AA' et recoupe la courbe en un point A_3 différent des points A_1, A_2. La quadrique support du système réglé des bisécantes s'appuyant sur l'unisécante AA_3 est tangente au plan α au point A et répond à la question.

6° Corollaires. 1) Si la bisécante joignant deux points conjugués n'est pas tangente à la cubique gauche, les plans polaires de chacun de ces deux points pour les quadriques et pour les cônes du second degré passant par la courbe forment la gerbe dont l'autre point est le support.

2) Si la biplanaire commune à deux plans conjugués n'est pas tangente à la cubique gauche les pôles de chacun de ces plans pour les quadriques et les coniques inscrites à la feuillée des plans osculateurs forment le système plan dont l'autre plan est le support.

7° Remarques relatives au cas où la bisécante joignant deux points conjugués et la biplanaire commune à deux plans conjugués sont tangentes à la cubique gauche. Il suffit de considérer le cas des points conjugués.

Différentes hypothèses sont à considérer.

a. – La bisécante AA' (5°) est tangente à la cubique gauche C^3 au point A' et est dans le plan α: Si ce plan est le plan osculateur $\varpi_{A'}$ au point A', il est le plan polaire du point A pour le cône $\Gamma^2_{A'}$ projetant la courbe du point A'. Si le plan α recoupe la courbe au point B différent du point A', il est le plan polaire du point A pour la quadrique support du système réglé des bisécantes s'appuyant sur l'unisécante AB.

b.- Si la bisécante A A' est tangente à la courbe au point A' et n'est pas dans le plan α, la démonstration faite au 5° (a) est applicable.
c.- Si la bisécante A A' est tangente à la courbe au point A et est dans le plan α, toute quadrique support d'un système réglé de bisécantes s'appuyant sur une unisécante issue du point A dans le plan α, est tangente en ce point au plan α; celui-ci est donc le plan polaire du point A pour une infinité de quadriques passant par la courbe C^3.
d.- Si la bisécante A A' est tangente à la courbe au point A et n'est pas dans le plan α, la démonstration faite au 5° (a) est encore applicable et conduit au cône Γ^2_A projetant la courbe du point A, et on peut considérer le plan α comme le plan polaire du point A pour ce cône.
8° Démonstration analytique.- 1) On considère la cubique gauche C^3 définie par les équations paramétriques (p. 123)

(1) $$x_1 : 1 = x_2 : t^3 = x_3 : t = x_4 : t^2.$$

Elle appartient aux trois quadriques

(2) $$x_1 x_2 - x_3 x_4 = 0, \quad x_2 x_3 - x_4^2 = 0, \quad x_1 x_4 - x_3^2 = 0$$

et forme, avec trois de ses bisécantes distinctes, les intersections de ces quadriques prises deux à deux. L'équation générale des quadriques sur lesquelles elle se trouve, est donc

(3) $$\lambda_1 (x_1 x_2 - x_3 x_4) + \lambda_2 (x_2 x_3 - x_4^2) + \lambda_3 (x_1 x_4 - x_3^2) = 0.$$

2) Les sommets A_1 (1,0,0,0), A_2 (0,1,0,0) du tétraèdre de référence sont des points de la cubique gauche C^3; la droite $A_1 A_2$ est donc une bisécante qui coupe la courbe en des points distincts. L'équation des plans polaires (α) du point A ($x'_1, x'_2, 0, 0$) de cette droite pour les quadriques (3) est

(4) $$\lambda_1 (x'_2 x_1 + x'_1 x_2) + \lambda_2 x'_2 x_3 + \lambda_3 x'_1 x_4 = 0,$$

et les propriétés relatives à ce cas, établies dans ce qui précède, résultent de ce que cette équation est l'équation générale des plans passant par le conjugué harmonique A' ($x'_1, -x'_2, 0, 0$) du point A sur le segment rectiligne $A_1 A_2$.
3) Lorsque le point A est le point ($x'_1, 0, x'_3, 0$) différent du point A_1 sur la tangente $A_1 A_3$ à la courbe au point A_1, l'équation des plans (α) est

(5) $$\lambda_1 (x'_1 x_2 - x'_3 x_4) + \lambda_2 x'_3 x_4 + \lambda_3 (x'_1 x_4 - 2 x'_3 x_3) = 0,$$

et comme x'_3 n'est pas nul, cette équation est aussi l'équation générale des plans passant par le point A_1.
4) Lorsque le point A coïncide avec le point A_1 (1,0,0,0) de la cubique gauche C^3, l'équation des plans (α) se réduit à

(6) $$\lambda_1 x_2 + \lambda_3 x_4 = 0;$$

elle se réduit à une identité pour $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$, auquel cas, l'équation (3) représente le cône $\Gamma^2_{A_1} \equiv \Gamma^2_A$ projetant la courbe du point $A_1 \equiv A$; pour les autres valeurs de λ_1 et λ_3, elle représente un quelconque des plans passant par la tangente $A_1 A_3$ et ce plan reste le même, lorsque λ_1 et λ_3 conservant les mêmes valeurs, λ_2 varie; un plan α passant la droite $A_1 A_3$ est donc le plan polaire du point $A_1 \equiv A$ pour une infinité de quadriques passant par la cubique gauche C^3.
89. Problèmes.- 1) Lieu des points conjugués des points d'une droite, et 2) lieu des plans conjugués des plans passant par une droite.
Il suffit de résoudre le premier problème et il y a trois cas à considérer d'après le nombre des

ϖ

points communs à la droite considérée d et à la cubique gauche donnée C^3.

1° La droite d est une bisécante de la cubique gauche C^3. – 1) Si la droite d coupe la courbe en des points distincts A, B, le lieu cherché est formé de la droite d et des tangentes t_A, t_B aux points A, B. – 2) Lorsque la droite d est tangente au point A, le lieu se réduit à la droite d avec laquelle se confondent les droites t_A, t_B.

2° La droite d est une unisécante de la cubique gauche C^3. Soient A, t_A, ϖ_A le point commun à la droite d et à la courbe, la tangente et le plan osculateur en ce point. Deux hypothèses sont à envisager selon que la droite d n'est pas ou est dans le plan ϖ_A.

1) La droite d n'est pas dans le plan ϖ_A. – Le lieu cherché comprend d'abord la tangente t_A comme lieu des conjugués du point A de la droite d. Un plan quelconque ϖ, différent du plan dt_A, mené par la droite d coupe la cubique gauche C^3 au point A et en deux autres points B, C qui sont conjugués dans une involution dont deux autres points conjugués sont le point A et le point différent du point A où le plan dt_A coupe la courbe; les points doubles de cette involution sont deux points E, F, différents du point A, dont les tangentes t_E, t_F rencontrent la droite d, ou tels que les plans dE, dF sont les plans tangents à la courbe par la droite d et distincts du plan dt_A. La bisécante $u \equiv BC$ coupe la droite d en un point D dont le conjugué harmonique D' sur le segment rectiligne BC est le point courant de la seconde partie du lieu. Lorsque le plan ϖ tourne autour de la droite d, la droite u engendre un système réglé Σ dont le système réglé complémentaire Σ' est formé d'unisécantes b', c' passant par les points B, C; la génératrice rectiligne d' du système réglé Σ' menée par le point D' est conjuguée harmonique de la génératrice rectiligne d par rapport aux génératrices rectilignes b', c' et coupe la cubique gauche C^3 au conjugué harmonique D'' du point A par rapport aux points B, C. Lorsque le plan ϖ devient le plan dt_A, un seul des points B, C se confond avec le point A, une seule des droites b', c' avec la droite d, et le point D' avec le point A, qui est donc une des positions du point D' ou un point de la seconde partie du lieu. Le système réglé $\Sigma'(d')$ est projectif au système réglé involutif $\Sigma'(b', c')$, et, par suite, à la ponctuelle $d(D)$ et au système réglé $\Sigma(u)$; le lieu du point D' est donc une conique $C^2(D')$ située sur la quadrique $Q(\Sigma, \Sigma')$ et passant par les points A, E, F.

D'autre part, les points D, D' conjugués pour la cubique gauche C^3 sont conjugués pour le cône du second degré Γ_A^2 projetant la courbe du point A et la conique $C^2(D')$ est dans le plan polaire δ de la droite d pour ce cône.

Donc, quand une unisécante d n'est pas dans le plan osculateur ϖ_A du point de rencontre A avec la cubique gauche C^3 le lieu des points conjugués de ses points est formé de la tangente t_A au point A et de la conique C^2 suivant laquelle le plan polaire δ de la droite d pour le cône Γ_A^2 coupe la quadrique Q des bisécantes s'appuyant sur cette droite.

Corrélativement, si une uniplanaire d ne passe pas par le point d'osculation A du plan osculateur ϖ_A dans lequel elle se trouve, les plans conjugués des plans qui la contiennent forment la feuillée ayant pour support la tangente t_A au point A et la feuillée du second degré φ^2 dont le sommet est le pôle D de la droite d par rapport à la conique C_A^2 enveloppe des intersections du plan ϖ_A par les autres plans osculateurs de la cubique gauche; cette feuillée du second degré projette du point D les biplanaires qui coupent la droite d.

N.B. La ponctuelle du second degré $C^2(D')$ est projective aux systèmes réglés $\Sigma(u), \Sigma'(d')$, à la ponctuelle $d(D)$ et au système réglé involutif $\Sigma'(b', c')$.

2) La droite d est dans le plan ϖ_A. – Les raisonnements précédents sont applicables. Le plan dt_A étant confondu avec le plan ϖ_A, l'un des points doubles E, F de l'involution $C^3(B, C)$

coïncide avec le point A; si c'est le point F, le point D'' coïncide constamment avec le point E; les droites d, d' sont les éléments unis de l'involution Σ' (b', e'); les plans dt_A ou ϖ_A et dE sont les plans tangents au cône Γ^2_A par la droite d et le plan polaire δ de la droite d pour ce cône est le plan Et_A; les droites t_A, d' forment l'intersection du plan δ et de la quadrique $Q(\Sigma, \Sigma')$ ou la seconde partie du lieu du point D' et elles se coupent au point où leur plan δ est tangent à la quadrique $Q(\Sigma, \Sigma')$. Inversement la droite d fait partie du lieu des points conjugués D des points D' de la droite d', une autre partie du lieu étant la tangente t_E comme lieu des conjugués du point E; cette tangente t_E est dans le plan tangent au cône Γ^2_A le long de la droite AE du plan δ et coupe donc la droite d; le plan osculateur ϖ_E est la position limite du plan EBC, lorsque, les points B, C se confondant avec le point E, la bisécante BC devient la tangente t_E au point E, alors que la droite d' du plan EBC est fixe. Donc, le lieu des points conjugués des points d'une unisécante d située dans le plan osculateur ϖ_A du point commun A avec la cubique gauche C^3, est formé de deux fois la tangente t_A au point A et d'une unisécante d' située dans le plan osculateur ϖ_E du point $E \equiv d'C^3$ commun à cette unisécante et à la cubique gauche C^3; en même temps, le lieu des points conjugués des points de la droite d' est formé de deux fois la tangente t_E au point E et de la droite d; la droite d joint le point A au point où la tangente t_E au point E coupe le plan osculateur ϖ_A du point A et la droite d' joint le point E au point où la tangente t_A au point A coupe le plan osculateur ϖ_E du point E; les bisécantes de la cubique gauche C^3 qui s'appuient sur la droite d, s'appuient aussi sur la droite d' et déterminent sur la courbe C^3 une involution dont les points A, E sont les points doubles; cette involution et, par suite, la courbe C^3 sont anallagmatiques dans l'espace involutif gauche ayant les droites d, d' pour directrices.
La propriété corrélative s'applique aux plans conjugués des plans passant par une uniplanaire menée par le point d'osculation du plan osculateur dans lequel elle se trouve; les droites associées par cette propriété sont les droites d, d' déjà associées par la propriété précédente.
3° La droite d ne rencontre pas la cubique gauche C^3. – Soient d_1, d_2, d_3 les droites polaires de la droite d pour trois quadriques Q_1, Q_2, Q_3 menées arbitrairement par la cubique gauche C^3 et pouvant être remplacées par des cônes du second degré passant par cette courbe; α_1, α_2, α_3 les plans polaires d'un point quelconque A de la droite d pour les mêmes quadriques. Les droites d_1, d_2, d_3 sont distinctes deux à deux (n° 88, 3°) et sont les supports des feuillées projectives engendrées par les plans α_1, α_2, α_3 lorsque le point A décrit la droite d. Même si deux de ces trois droites se coupent, les feuillées dont elles sont les supports ne sont pas perspectives; en effet, la droite d_1 coupant la droite d_2, si les feuillées $d_1(\alpha_1)$, $d_2(\alpha_2)$ étaient perspectives, le plan d_1d_2 serait le plan polaire d'un point A de la droite d pour les deux quadriques Q_1, Q_2; le plan polaire α_3 de ce point pour la quadrique Q_3 couperait le plan d_1d_2 suivant une droite dont tous les points seraient conjugués du point A pour les trois quadriques et, par suite, pour la cubique C^3, ce qui est absurde, le point considéré A n'appartenant pas à la courbe. Les plans α_1, α_2, α_3 sont donc les faces d'un trièdre dont le sommet A' est le conjugué du point A pour la cubique gauche C^3 et dont le lieu est une cubique gauche C^3_d admettant les droites d_1, d_2, d_3 comme bisécantes et projective à la ponctuelle d(A). Donc, le lieu des points conjugués A' des points A d'une droite d qui ne rencontre pas la cubique gauche C^3, est une cubique gauche C^3_d (A') projective à la ponctuelle d(A) et dont les bisécantes sont les droites polaires de la droite d pour les quadriques et les cônes du second degré passant par la cubique gauche C^3.
La propriété corrélative s'applique aux plans conjugués des plans passant par une droite

extérieure aux plans osculateurs de la cubique gauche C^3.
N.B. - 1) Si la droite d_1 coupe les droites d_2, d_3 en des points distincts, ces points sont aussi ceux où elle coupe la cubique gauche C^3_d. Si la droite d_1 coupe la droite d_2 et est gauche à la droite d_3, elle coupe la cubique gauche C^3_d au point $d_1 d_2$ et au même point que le plan polaire α_3 pour la quadrique Q_3 du pôle A du plan $\alpha_2 \equiv d_1 d_2$ pour la quadrique Q_2. Si la droite d_1 est gauche aux droites d_2, d_3, elle rencontre la cubique gauche C^3_d aux points unis des ponctuelles projectives suivant lesquelles elle coupe les feuillées $d_2 (\alpha_2)$, $d_3 (\alpha_3)$.
2) L'involution gauche qui a les droites d, d_1 pour directrices transforme la quadrique Q_1 en elle-même et remplace la cubique gauche C^3 par une autre C'^3 ayant les mêmes génératrices rectilignes de la quadrique Q_1 pour bisécantes; ces cubiques gauches C^3, C^3_d se coupent donc en quatre points distincts ou confondus par couples, et déterminent deux génératrices rectilignes distinctes ou confondues de la quadrique Q_1; ces génératrices rectilignes coupent la droite d_1 aux points où celle-ci rencontre la cubique gauche C^3_d.
3) Soient $p, p', p'', \ldots$ les droites polaires de la droite $a \equiv AA'$ ou des plans Pa, $P'a$, $P''a$, ... pour les cônes du second degré Γ^2_P, $\Gamma'^2_{P'}$, $\Gamma'^2_{P''}$, ... projetant la cubique gauche C^3 de ses différents points P, P', P''..... et $\alpha \equiv pA'$, $\alpha' \equiv p'A'$, $\alpha'' \equiv p''A'$, ... les plans polaires du point A pour les mêmes cônes. Les cônes, les plans Pa, $P'a$, $P''a$, ... et les droites p, p', p'', ... sont des éléments homologues des gerbes collinéaires projetant les bisécantes de la cubique gauche C^3 des points P, P', P''...... Les droites p, p', p'', ... sont les génératrices rectilignes d'un système réglé $\Sigma (p)$ passant par la cubique gauche C^3 et dont le système réglé complémentaire $\Sigma' (g)$ est formé de l'ensemble des droites g suivant lesquelles se coupent des plans homologues menés par les droites p, p', p'', ... dans les gerbes P, P', P'', ... Les plans $\alpha, \alpha', \alpha''$, ... projetant du point A les génératrices rectilignes du système réglé $\Sigma (p)$ enveloppent le cône du second degré de sommet A' circonscrit à la quadrique support de ce système réglé. Donc, les plans polaires d'un point quelconque A pour les cônes du second degré passant par la cubique gauche C^3 sont les plans d'une feuillée du second degré φ^2 ayant pour support un cône du second degré dont le sommet est le conjugué A' du point A et qui est circonscrit à la quadrique $Q (\Sigma, \Sigma')$ lieu des polaires de la bisécante $a \equiv AA'$ pour les cônes du second degré que l'on a menés par la cubique gauche C^3; si le point A se déplace sur la droite a, le cône du second degré support de la feuillée φ^2 reste circonscrit à la quadrique $Q(\Sigma, \Sigma')$ et le plan de la conique de contact tourne autour de la droite polaire de la droite a pour cette quadrique, c'est-à-dire, autour de l'intersection des plans tangents à la quadrique aux points où la droite a coupe la cubique gauche C^3.
Par corrélation, les pôles d'un plan quelconque α pour les coniques inscrites à la feuillée des plans osculateurs de la cubique gauche C^3 sont les points d'une ponctuelle du second degré C^2 dont le plan est le conjugué α' du plan α et qui appartient à la quadrique Q lieu des polaires de la biplanaire $a \equiv \alpha\alpha'$ pour les coniques inscrites à la feuillée des plans osculateurs de la cubique gauche C^3; (de même, que la polaire d'une droite quelconque pour un cône du second degré est la polaire pour ce cône du plan de la droite et du sommet du cône, la polaire d'une droite quelconque pour une conique est la polaire pour cette conique du point où la droite coupe le plan de la conique).
90. Problèmes. - 1) Lieu des points conjugués des points d'un plan quelconque, et 2) lieu des plans conjugués des plans passant par un point quelconque.
Il suffit de résoudre le premier problème. On supposera d'abord que le plan donné ϖ coupe la cubique gauche C^3 en trois points distincts, on indiquera ensuite comment les résultats

se modifient lorsque le plan ϖ occupe une position particulière par rapport à la courbe.

1° Soient A' le conjugué d'un point quelconque A du plan ϖ ou le point courant du lieu; $A_1, A_2, A_3, t_{A_1}, t_{A_2}, t_{A_3}, \varpi_{A_1}, \varpi_{A_2}, \varpi_{A_3}$ les points où le plan ϖ coupe la cubique gauche C^3, les tangentes et les plans osculateurs en ces points; B le point du plan ϖ où se coupent les plans $\varpi_{A_1}, \varpi_{A_2}, \varpi_{A_3}$; Q_1, Q_2, Q_3 trois quadriques ou cônes du second degré quelconques passant par la cubique gauche C^3; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ les plans polaires du point A et P_1, P_2, P_3 les pôles du plan ϖ pour les trois quadriques. Les gerbes $P_1(\alpha_1)$, $P_2(\alpha_2)$, $P_3(\alpha_3)$ sont réciproques au système plan $\varpi(A)$ et le lieu du point de rencontre A' des feuillets homologues $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ est une certaine surface dont il s'agit d'étudier les propriétés.

1) Les positions du point A' sur une droite donnée u sont les conjugués des points A communs au plan ϖ et au lieu des conjugués des points de la droite u. Si cette droite ne rencontre pas la cubique gauche C^3, le lieu des conjugués de ses points est une cubique gauche C^3_u ayant trois points communs avec le plan ϖ. Donc, toute droite qui ne rencontre pas la cubique gauche C^3 a trois points communs avec la surface lieu du point A' et cette surface est du troisième ordre; on la désignera par la notation S^3_ϖ.

2) La surface S^3_ϖ est aussi le lieu des pôles du plan ϖ pour les quadriques et les cônes du second degré passant par la cubique gauche C^3; en effet, si A' est le pôle du plan ϖ pour une de ces quadriques ou pour un de ces cônes, tout point A conjugué du point A' ou tout point commun aux plans polaires du points A' pour toutes les quadriques et tous les cônes passant par la courbe C^3 est nécessairement dans le plan ϖ et le point A' est un point de la surface S^3_ϖ.

3) En particulier, les polaires p_1, p_2, p_3 du plan ϖ pour les cônes $\Gamma^2_{A_1}, \Gamma^2_{A_2}, \Gamma^2_{A_3}$ sont sur la surface S^3_ϖ; donc, les trois droites p_1, p_2, p_3 issues des points A_1, A_2, A_3 et s'appuyant sur les tangentes t_{A_2} et t_{A_3}, t_{A_3} et t_{A_1}, t_{A_1} et t_{A_2} appartiennent à la surface S^3_ϖ

4) La surface S^3_ϖ passe par la cubique gauche C^3, car les points de cette courbe sont les pôles du plan ϖ pour les cônes du second degré projetant la courbe de ces points; on peut dire aussi que toute tangente à la courbe C^3 coupe le plan ϖ en un point conjugué du point de contact.

5) La surface S^3_ϖ passe par les droites $t_{A_1}, t_{A_2}, t_{A_3}$ qui sont les lieux des points conjugués des points A_1, A_2, A_3.

6) La surface S^3_ϖ étant le lieu des points conjugués des points du plan ϖ peut aussi être définie comme le lieu des points conjugués des points des droites du plan ϖ. Or le lieu des points conjugués des points d'une droite dépend du nombre des points communs à la droite et à la cubique gauche C^3. Si on considère d'abord les droites du plan ϖ ne passant par aucun des points A_1, A_2, A_3, de la courbe C^3 dans le plan ϖ, on peut dire que, la surface S^3_ϖ passe par les cubiques gauches C^3_d lieux des points conjugués des points des droites du plan ϖ ne passant par aucun des sommets du triangle $A_1 A_2 A_3$; chacune des cubiques gauches C^3_d coupe les côtés du triangle $A_1 A_2 A_3$ aux sommets d'un triangle homologique au triangle $A_1 A_2 A_3$; l'axe et le centre d'homologie sont la droite correspondante d et le pôle de cette droite pour le triangle $A_1 A_2 A_3$.

7) Le lieu des points conjugués des points d'une bisécante telle que $A_2 A_3$ étant formé de la bisécante et des tangentes t_{A_2}, t_{A_3} aux points d'intersection avec la cubique gauche, on en déduit que les côtés du triangle $A_1 A_2 A_3$ forment l'intersection de la surface S^3_ϖ et du plan ϖ.

8) Si on considère ensuite une droite d menée par le point A_1 dans le plan ϖ et ne passant ni par les autres sommets A_2, A_3 du triangle $A_1 A_2 A_3$, ni par le point B, on trouve que la sur-

ϖ

face S^3_{ϖ} passe par la conique C^2_d suivant laquelle le plan polaire δ de la droite d pour le cône $\Gamma^2_{A_i}$ coupe la quadrique des bisécantes qui s'appuient sur la droite d; le plan δ passe par la polaire p_i du plan ϖ pour le cône $\Gamma^2_{A_i}$, $(i = 1, 2, 3)$.
1) Enfin si la droite coïncide avec une des droites $A_i B$, $(i = 1, 2, 3)$, la surface S^3_{ϖ} passe par l'unisécante a'_i formant avec la droite t_{A_i} l'intersection du plan polaire δ de la droite $A_i B$ pour le cône $\Gamma^2_{A_i}$ et de la quadrique des bisécantes s'appuyant sur la droite $A_i B$; la droite a'_i est dans le plan osculateur $\varpi_{C'_i}$ du point où elle rencontre la courbe C^3; le point C'_i est le conjugué du point C_i du plan ϖ où la tangente $t_{C'_i}$ coupe la droite $A_i B$; la droite a'_i coupe la tangente t_{A_i} en un point A'_i dont le conjugué est le point A_i elle passe par le conjugué B' du point B.

10) Propriétés réciproques des triangles $A_1 A_2 A_3$, $C'_1 C'_2 C'_3$, et des points B, B'.-

a.- Les points B, B' sont les foyers des plans $\varpi \equiv A_1 A_2 A_3$, $\varpi' \equiv C'_1 C'_2 C'_3$ dans l'espace focal $\mathcal{E}$ ayant la cubique gauche C^3 pour courbe directrice. Ces points étant conjugués pour la cubique gauche C^3, les plans ϖ, ϖ' sont conjugués pour la feuillée φ^3 des plans osculateurs de cette courbe, la feuillée φ^3 étant la forme homologue de la courbe C^3 dans l'espace focal $\mathcal{E}$. Les droites BB', ϖ, ϖ' sont des droites conjuguées dans $\mathcal{E}$, la première est une bisécante de la cubique gauche C^3, la seconde est une biplanaire de la feuillée du troisième ordre φ^3, les points de la droite BB' sont conjugués deux par deux pour la courbe C^3 et les plans passant par la droite $\varpi\varpi'$ sont conjugués deux par deux pour la feuillée φ^3.
b) Les couples d'unisécantes $A_1 B$ et $C'_1 B'$, $A_2 B$ et $C'_2 B'$, $A_3 B$ et $C'_3 B'$ sont avec la droite BB' sur trois quadriques dont chacune contient un système réglé de bisécantes de la courbe C^3; soient Σ_1, Σ_2, Σ_3 ces trois systèmes réglés.
Les droites $t_{A_1} \equiv A_1 A'_1$, $t_{C'_1} \equiv C'_1 C_1$, BB', $A_2 A_3$, $C'_2 C'_3$ sont des génératrices rectilignes du système réglé Σ_1; ces droites tracent sur la cubique gauche C^3 une involution dont les points A_1, C'_1 sont les points unis et dont les points A_2 et A_3, C'_2 et C'_3 sont deux couples de points conjugués. Des propriétés analogues étant applicables aux systèmes réglés Σ_2, Σ_3, on a

$$(1) \qquad (A_1 C'_1 A_2 A_3) = (A_2 C'_2 A_3 A_1) = (A_3 C'_3 A_1 A_2) = -1.$$

Si tous les points considérés sont réels, les points A_1, C'_1 sont séparés par les points A_2, C'_2 et aussi par les points A_3, C'_3 comme on s'en assure aisément en plaçant ces points sur une conique; deux quelconques des trois involutions considérées n'ont en commun aucun couple de points conjugués réels; la génératrice rectiligne BB' commune aux trois systèmes réglés Σ_1, Σ_2, Σ_3 ne coupe donc pas la cubique gauche C^3 en des points réels et la biplanaire $\varpi\varpi'$ n'est pas l'intersection des plans osculateurs réels. Donc, la bisécante passant par le point B commun aux plans osculateurs ϖ_{A_1}, ϖ_{A_2}, ϖ_{A_3} en trois points réels A_1, A_2, A_3 d'une cubique gauche réelle C^3 est réelle et coupe la courbe en des points imaginaires conjugués et la biplanaire contenue dans le plan $\varpi \equiv A_1 A_2 A_3$ est réelle et est l'intersection de plans osculateurs imaginaires conjugués.
c.- Les considérations précédentes entraînent encore ces conséquences.
Les points A_1, A_2, A_3 étant pris arbitrairement sur une cubique gauche C^3, si on construit les conjugués harmoniques C'_1, C'_2, C'_3 des points A_1, A_2, A_3 sur la courbe C^3 par rapport aux points A_2 et A_3, A_3 et A_1, A_1 et A_2, les plans $\varpi \equiv A_1 A_2 A_3$, $\varpi' \equiv C'_1 C'_2 C'_3$ sont conjugués pour la feuillée des plans osculateurs de la courbe C^3 et, par suite, pour cette courbe.
d. Les droites $A_1 B$, $C'_1 B'$ coupent la bisécante $A_2 A_3$ en des points conjugués pour la courbe C^3 et forment donc un groupe harmonique avec les points A_2, A_3. Mais la droite $C'_1 B'$ est dans le

plan ϖ' et rencontre la droite A_2A_3 au point où celle-ci coupe la biplanaire $\varpi\varpi'$. Cette dernière et la droite A_1B rencontrent donc la droite A_2A_3 en des points formant un quaterne harmonique avec les points A_2, A_3. La biplanaire contenue dans le plan ϖ est ainsi la polaire du point P pour le triangle $A_1A_2A_3$ et, par réciprocité, la bisécante issue du point B est la polaire du plan ϖ pour le trièdre $\varpi_{A_1}\varpi_{A_2}\varpi_{A_3}$.

c. Lorsque le plan ϖ tourne autour de la droite A_1B, le plan ϖ' tourne autour de la droite C'_1B'; le plan ϖ contient dans chacune de ses positions une bisécante A_2A_3 et une biplanaire $\varpi\varpi'$ qui se coupent sur la droite C'_1B' au conjugué pour la cubique gauche C^3 du point où la bisécante A_2A_3 rencontre la droite A_1B.

2° Cas particuliers. 1) Lorsque le plan ϖ est osculateur en un point A de la cubique gauche C^3, la surface S^3_ϖ est une surface réglée dont les génératrices rectilignes sont les lieux des points conjugués des points des droites menées par le point A dans le plan ϖ.

2) Lorsque le plan ϖ est le plan de l'infini, on trouve que le lieu des milieux de toutes les cordes d'une cubique gauche C^3 est une surface du troisième ordre S^3_ϖ qui est en même temps le lieu des centres des quadriques passant par la cubique gauche C^3.

91. Sur la surface développable des tangentes de la cubique gauche C^3.

1°) 1) Toute feuillée du troisième ordre φ^3 est formée des plans osculateurs à une cubique gauche C^3, lieu des points d'osculation des plans de la feuillée φ^3. Les tangentes à la courbe C^3 sont les génératrices rectilignes d'une surface développable Δ et les droites de contact des plans de la feuillée φ^3 avec cette surface.

2) Dire qu'il passe trois plans de la feuillée φ^3 par un point quelconque ou trois plans osculateurs de la cubique gauche C^3 par tout point extérieur à la courbe, revient à dire que du point considéré on peut mener trois plans tangents à la surface Δ qui est donc de la troisième classe.

3) Un plan quelconque rencontrant la cubique gauche C^3 en trois points, le cône qui projette la courbe d'un point extérieur est coupé par un plan quelconque mené du même point suivant trois génératrices rectilignes et est donc du troisième ordre. Une des génératrices rectilignes du cône est une bisécante de la courbe C^3 et tout plan qui ne passe pas par le sommet, coupe le cône suivant une cubique ayant un point double ou de la quatrième classe. Une droite quelconque issue du sommet rencontre le plan de cette cubique en un point duquel on peut mener quatre tangentes à cette courbe; de la droite considérée on peut donc également mener quatre plans tangents au cône ou à la cubique gauche C^3; une droite quelconque rencontre ainsi quatre tangentes de la cubique gauche C^3 ou coupe en quatre points la surface Δ qui est donc du quatrième ordre.

2° 1) De la théorie générale des surfaces développables, il résulte qu'un plan quelconque coupe la surface Δ suivant une courbe du quatrième ordre et de la troisième classe ayant trois points de rebroussement, les points communs au plan et à la cubique gauche C^3. Mais d'après ce qu'on a démontré précédemment, le plan osculateur ϖ_A au point A de la cubique gauche C^3, ou le plan tangent à la développable Δ suivant la tangente t_A au point A à la courbe C^3, coupe la surface Δ suivant la tangente t_A coupée deux fois et une conique C^2_A dont les points et les tangentes sont les points et les droites d'intersection du plan ϖ_A par les tangentes et les plans osculateurs de la cubique gauche C^3, ou les génératrices rectilignes et les plans tangents de la surface Δ. La conique C^2_A est tangente à la droite t_A au point A.

2) Si la cubique gauche C^3 est réelle et si le point A est un point réel de la courbe, la droite t_A est réelle de même que le plan ϖ_A et la conique C^2_A. Celle-ci partage le plan ϖ_A en

deux régions dont les points sont dits extérieurs ou intérieurs à la conique. Tout point extérieur est l'intersection de deux tangentes réelles à la conique. Les trois plans osculateurs menés d'un tel point à la cubique gauche C^3 sont réels ainsi que les trois biplanaires sur lesquelles il se trouve; l'un des plans osculateurs est le plan ϖ_A et deux des biplanaires sont les tangentes menées à la conique C^2_A par le point considéré; les plans osculateurs passant par ce point étant réels, la bisécante sur laquelle il se trouve est une droite réelle coupant la cubique gauche C^3 en des points imaginaires conjugués. Par opposition, par un point intérieur à la conique C^2_A passent un plan osculateur réel, le plan ϖ_A, et deux plans osculateurs imaginaires conjugués, deux biplanaires imaginaires conjuguées, les tangentes menées du point à la conique C^2_A, et une biplanaire réelle, l'intersection des plans osculateurs imaginaires conjugués, et la bisécante issue du point coupe la cubique gauche C^3 en des points réels.

3) La surface développable Δ est le lieu des coniques C^2_A correspondant aux différents points A de la cubique gauche C^3; si celle-ci est réelle, il en est de même de la surface Δ dont les points réels forment le lieu des coniques réelles C^2_A correspondant aux points réels A de la courbe C^3: dans ce cas, la surface Δ partage l'espace en deux régions, celle des points extérieurs aux coniques C^2_A est dite extérieure à la surface Δ et celle des points intérieurs aux coniques C^2_A est dite intérieure à la surface Δ. La région extérieure est traversée par les plans osculateurs réels, par les biplanaires intersections des plans osculateurs réels et par les bisécantes joignant des points imaginaires conjugués de la courbe C^3; la région intérieure est traversée par les biplanaires intersection des plans osculateurs imaginaires conjugués et par les bisécantes joignant des points réels et distincts de la courbe C^3; les tangentes à celle-ci ou les biplanaires de contact des plans osculateurs sont sur la surface Δ et séparent donc les bisécantes réelles en deux espèces ainsi que les biplanaires réelles.

3° 1) On sait que deux plans osculateurs quelconques de la cubique gauche C^3, ou deux plans tangents quelconques de la surface Δ, sont coupés par les tangentes et les plans osculateurs de la courbe C^3, ou par les génératrices rectilignes et les plans tangents de la surface Δ, suivant des points et des droites homologues de deux systèmes plans collinéaires dans lesquels les coniques telles que les coniques C^2_A sont des lignes homologues. En même temps, les ponctuelles tracées sur deux tangentes quelconques de la cubique gauche C^3 par les plans osculateurs, ou les ponctuelles tracées sur deux génératrices rectilignes quelconques de la surface Δ par les plans tangents, sont projectives.

2) Si la cubique gauche C^3 est une parabole gauche, elle est osculatrice au plan de l'infini; les coniques telles que C^2_A formant les intersections de la surface Δ par les plans tangents sont des paraboles et les ponctuelles tracées par les plans tangents sur les génératrices rectilignes sont semblables.

4° 1) On a vu que les pôles d'un plan quelconque α par rapport aux diverses coniques C^2_A est une conique C^2_α dont le plan α' est le plan conjugué du plan α dans la feuillée φ^3 des plans osculateurs de la cubique gauche C^3 ou des plans tangents de la surface Δ. Si la cubique gauche n'est pas une parabole gauche, on peut supposer le plan α confondu avec le plan de l'infini et on trouve ainsi que, à l'exception du cas où la cubique gauche C^3 étant réelle est une parabole gauche, le lieu des centres des coniques C^2_A, intersections de la surface Δ par ses plans tangents, est une conique dont le plan est le plan conjugué du plan de l'infini par rapport à la feuillée des plans tangents.

2) Si la cubique gauche C^3 est une ellipse gauche, elle coupe le plan de l'infini en un point réel et en deux points imaginaires conjugués; le plan de l'infini contient une bisécante réelle, deux bisécantes imaginaires conjuguées et une biplanaire réelle intersection de deux plans osculateurs réels coupant la surface Δ suivant deux paraboles; le lieu des centres des coniques C^2_A est une

hyperbole passant par les points de contact des deux paraboles avec la biplanaire considérée; le plan de l'hyperbole est parallèle aux plans osculateurs parallèles.

3) Si la cubique gauche C^3 est une hyperbole gauche, le plan de l'infini la coupe en des points réels et distincts, il contient trois bisécantes réelles coupant la courbe en des points réels et distincts, et une biplanaire réelle, intersection des plans osculateurs imaginaires conjugués; dans ce cas, les coniques C^2_A sont des ellipses ou des hyperboles et le lieu de leur centre est une ellipse.

4) Enfin, si la cubique gauche C^3 est une hyperbole parabolique tangente et sécante au plan de l'infini aux points B et C, la conique C^2_B est une parabole tangente en B à la droite t_B et la conique C^2_C est une hyperbole dont une asymptote est la droite t_C. Le lieu des centres des coniques C^2_A est une parabole dont le point à l'infini est le point B

5°) Les résultats obtenus au 2° peuvent se démontrer par le calcul. 1) Si on conserve les notations employées au numéro 73 (pages 122 à 124), le plan osculateur

$$(1) \qquad t^3 X_1 - X_2 - 3t^2 X_3 + 3t X_4 = 0$$

au point t de la cubique gauche C^3

$$(2) \qquad X_1 : 1 = X_2 : t^3 = X_3 : t = X_4 : t^2$$

coupe le plan osculateur $X_2 = 0$ du point $A_1 (1, 0, 0, 0)$ suivant la droite dont l'équation dans ce plan est

$$(3) \qquad t^2 X_1 - 3t X_3 + 3 X_4 = 0,$$

et dont l'enveloppe est la conique C^2 d'équation

$$(4) \qquad 9 X_3^2 - 12 X_1 X_4 = 0,$$

tangente aux points A_1, A_4 aux droites $A_3 A_1$, $A_3 A_4$.

2) D'autre part, la tangente au point t à la cubique gauche C^3 coupe le plan $X_2 = 0$ en un point dont les coordonnées dans ce plan sont (formule (17) de la page 124) 3, 2t, t^2 ou les notations du système formé de l'équation (3) et de la dérivée

$$(5) \qquad 2t X_1 - 3 X_3 = 0$$

de cette équation par rapport à t. La tangente au point t à la cubique gauche C^3 coupe donc le plan osculateur $X_2 = 0$ au point de la conique C^2 où celle-ci est tangente au plan osculateur à la cubique gauche au point t; par suite, la conique C^2 forme avec la droite $A_2 A_3$ l'intersection du plan osculateur $X_2 = 0$ et de la surface Δ des tangentes à la cubique gauche C^3 et elle est inscrite à la feuillée des plans osculateurs.

3) La droite joignant les points t, t' de la cubique gauche C^3 coupe le plan $X_2 = 0$ en un point P dont les coordonnées dans ce plan sont (formules (11) de la page 123) $t^2 + tt' + t'^2$, $tt'(t + t')$, $t^2 t'^2$.

4) Si la cubique gauche C^3 et le système de référence sont réels, le point A_3 est extérieur à la conique C^2 et il en résulte que la région du plan $X_2 = 0$ extérieure à la conique C^2 est celle dans laquelle les valeurs du premier membre de l'équation (4) sont positives. Or si on remplace X_1, X_3, X_4 par les coordonnées du point P, on a

$$9 X_3^2 - 12 X_1 X_4 = -3 t^2 t'^2 (t - t')^2;$$

donc, si P est réel, on aura $9 X_3^2 - 12 X_1 X_4 < 0$ ou > 0 et le point P sera intérieur ou extérieur à la conique C^2 selon que la bisécante issue de ce point coupera la cubique gauche C^3 en des point réels ou en des points imaginaires conjugués.

92. Faisceau ponctuel des quadriques passant par la cubique gauche C^3 et une bisécante donnée a de cette courbe. 1° Si A est un point arbitraire, extérieur à la droite a et à la courbe C^3, celle-ci recoupe le plan Aa en un point B qui peut être un des points (C^3, a) communs à la cubique gauche C^3 et à la bisécante a ou un autre point. Dans le premier cas, la quadrique support des bisécantes s'appuyant sur l'unisécante AB est la seule quadrique passant par la cubique gauche C^3, la bisécante a et le point A. Dans le second cas, si la droite AB passe par l'un des points (C^3, a), le cône du second degré projetant de ce point la cubique gauche C^3 est la seule surface du second degré passant par cette courbe, la bisécante a et le point A; si la droite AB ne passe pas par un des points (C^3, a), elle est une unisécante de la cubique gauche C^3 et la seule quadrique passant par cette courbe, la bisécante a et le point A est la quadrique support des bisécantes s'appuyant sur la droite AB. Il existe donc une infinité de quadriques passant par la cubique gauche C^3 et la bisécante a; chacune d'elles est déterminée par la condition de passer, en outre, par un point donné en dehors de la droite a et de la courbe C^3; ces quadriques forment un faisceau ponctuel; elles coupent un plan quelconque et une droite quelconque suivant un faisceau de coniques et des couples de points en involution.

2° Théorème. Les plans polaires de tout point différent des points (C^3, a) pour les quadriques passant par la cubique gauche C^3 et la bisécante a, ont une droite commune.

Un plan ϖ mené arbitrairement par le point A (1°) coupe les quadriques considérées (Q) suivant un faisceau ponctuel de coniques (C^2_ϖ) dont les points fondamentaux sont les points (C^3, ϖ), (a, ϖ) où le plan ϖ rencontre la cubique gauche C^3 et la droite a. Les plans polaires du point A pour les quadriques (Q) coupent le plan ϖ suivant les polaires du point A pour les coniques (C^2_ϖ) ils passent tous par le support A_1 du faisceau engendré par ces polaires ou par le point conjugué du point A pour toutes les coniques (C^2_ϖ). Le plan ϖ étant un plan quelconque des plans passant par le point A, les plans polaires de ce point pour les quadriques (Q) ont une infinité de points communs et comme il y en a au moins trois qui sont différents deux à deux, ils ont une droite commune. Cette droite est le lieu des points conjugués du point A pour les quadriques (Q).

H. Bisécantes conjuguées et biplanaires conjuguées.

93. 1° Extension de la notion de projectivité aux congruences $G_{1,3}$, $G_{3,1}$.
Il suffit de considérer le cas des congruences $G_{1,3}$. Par définition, les plans homologues de deux gerbes collinéaires de supports différents P, P_1 qui n'ont pas d'élément uni se coupent suivant les droites d'une congruence $G_{1,3}$ et ces droites sont les bisécantes d'une cubique gauche C^3, lieu des points singuliers de la congruence $G_{1,3}$. On dira que cette congruence est perspective à chacune des gerbes P, P_1 et à toute gerbe qui la projette d'un point quelconque de la cubique gauche C^3. Le rapport anharmonique de quatre plans d'une même feuillée de l'une quelconque des gerbes considérées sera, par définition, celui des bisécantes de la cubique gauche C^3 contenus dans ces plans. Ces définitions permettent d'établir une relation de projectivité entre la congruence $G_{1,3}$ et d'autres formes; ainsi, une congruence $G_{1,3}$ sera projective à un système plan ou à une gerbe si ces formes sont projectives aux gerbes perspectives à la congruence $G_{1,3}$; on dit aussi que la projectivité ainsi établie entre la congruence $G_{1,3}$ et un système plan ou une gerbe définit une représentation de la congruence $G_{1,3}$ ou des bisécantes de la cubique gauche C^3 sur le système plan ou dans la gerbe.

2° Définition et propriétés fondamentales d'une projectivité particulière.
1) On considère la projectivité obtenue en établissant une corrélation entre un système plan ϖ

et les gerbes collinéaires P, P_1 ; les points du système plan ϖ correspondent aux plans homologues des gerbes P, P_1 ou aux droites de la congruence $G_{1,3}$, formant les intersections de ces plans; à toute propriété de points du système plan doit correspondre une propriété de droites de la congruence $G_{1,3}$ et inversement.

2) Aux tangentes et aux points de la cubique gauche C^3 correspondent dans les gerbes P, P_1 les plans tangents et les génératrices rectilignes des cônes du second degré $\Gamma^2_P, \Gamma^2_{P_1}$, et dans le système plan ϖ les points et les tangentes d'une conique C^2_0. Celle-ci, considérée comme lieu de points est donc l'image sur le plan ϖ de la surface des tangentes de la cubique gauche C^3, et, considérée comme support de droites, elle est l'image des points de la cubique gauche C^3.

3) Les droites de la congruence $G_{1,3}$ ou les bisécantes de la cubique gauche C^3 qui correspondent aux points d'une droite a_0 du système plan ϖ sont les intersections des plans homologues de deux feuillets projectifs ayant pour supports les droites homologues a, a_1 de la droite a_0 dans les gerbes P, P_1. Deux hypothèses sont à envisager.

a. – Si la droite a_0 est tangente à la conique C^2_0, les droites a, a_1 sont des génératrices rectilignes homologues des cônes projectifs $\Gamma^2_P, \Gamma^2_{P_1}$, elles se coupent sur la cubique gauche C^3 et les droites considérées de la congruence $G_{1,3}$ sont les génératrices rectilignes du cône du second degré projetant la cubique gauche C^3 du point aa_1 de cette courbe.

N.B. – Si le point A_0 du système plan ϖ n'est pas sur la conique C^2_0, la bisécante correspondante à joint les points X, Y de la cubique gauche C^3 correspondant aux tangentes x_0, y_0 menées du point A_0 à la conique C^2_0 et les tangentes x', y' à la cubique gauche C^3 aux points X, Y correspondent aux points de contact X_0, Y_0 des tangentes x_0, y_0 avec la conique C^2_0. Donc lorsque les éléments considérés sont réels, une bisécante joint des points réels et distincts, des points réels et confondus, ou des points imaginaires conjugués de la cubique gauche, selon que le point correspondant du système plan ϖ est en dehors de la conique C^2_0, sur la conique C^2_0 ou dans la conique C^2_0.

b. – On suppose, en second lieu, que la droite, a_0 du système plan ϖ coupe la conique C^2_0 en des points distincts X_0, Y_0, on désigne par Z_0 le point courant de cette droite et par A_0 le point de rencontre des tangentes x_0, y_0 aux points X_0, Y_0 ou le pôle de la droite a_0 pour la conique C^2_0. Dans ce cas, les droites a, a_1 ne sont pas des génératrices rectilignes des cônes $\Gamma^2_P, \Gamma^2_{P_1}$, elles sont gauches et sont des unisécantes de la cubique gauche C^3; les bisécantes z' correspondant aux points Z_0 de la droite a_0 sont les génératrices rectilignes d'un système réglé Σ'_a dont le système réglé complémentaire Σ_a est formé des droites a, a_1 et des droites homologues dans les gerbes collinéaires projetant la congruence $G_{1,3}$ des points de la cubique gauche C^3. Les bisécantes correspondant aux positions X_0, Y_0 du point Z_0 sont les tangentes x', y' à la cubique gauche C^3 aux points X, Y correspondant aux tangentes x_0, y_0 de C^2_0 et intersections de la cubique gauche C^3 par la bisécante homologue à du point A_0. Les points X, Y sont les points unis de l'involution tracée sur la cubique gauche par les génératrices rectilignes z' du système réglé Σ'_a. En vertu de ce qu'on a vu précédemment, les génératrices rectilignes du système réglé Σ_a passant par les points X, Y joignent ces points aux points X_1, Y_1 où les tangentes y', x' coupent respectivement les plans osculateurs ϖ_X, ϖ_Y des points X, Y. On sait que les bisécantes z' coupent les droites XX_1, YY_1 en des points conjugués pour la cubique gauche C^3. D'autre part, la génératrice rectiligne a du système réglé Σ_a s'appuie sur les génératrices rectilignes x', y' du système réglé Σ'_a et est donc l'intersection des plan tangents au cône Γ^2_P le long des droites PX, PY; les génératrices rectilignes du système réglé Σ_a sont donc les droites polaires de la bisécante $a' \equiv XY$ pour les

ϖ

cônes du second degré perspectifs à la cubique gauche C^3.,

3° Bisécantes conjuguées et biplanaires conjuguées. – 1) Deux droites de la congruence $G_{1,3}$ sont des bisécantes conjuguées de la cubique gauche C^3 lorsque les points correspondants du système plan ϖ sont conjugués pour la conique C^2_0. Deux droites de la congruence $G_{3,1}$ des biplanaires de la cubique gauche C^3 sont des biplanaires conjuguées de cette courbe si elles sont les droites homologues de deux bisécantes conjuguées dans l'espace focal ε ayant la cubique gauche C^3 pour courbe directrice.

2) Le lieu des points conjugués d'un point A_0 du système plan ϖ par rapport à la conique C^2_0 étant la polaire a_0 du point A_0 pour la conique, les propriétés trouvées ci-dessus (2°, 3) et dans l'étude des points conjugués peuvent s'énoncer de la manière suivante.

a. – Les bisécantes conjuguées d'une tangente sont les génératrices rectilignes du cône du second degré projetant la cubique gauche C^3 du point de contact de la tangente, y compris la tangente elle-même.

b. – Les bisécantes conjuguées d'une bisécante a' qui coupe la cubique gauche C^3 en des points distincts X, Y, sont les génératrices rectilignes z' du système réglé Σ'_a dont le système réglé complémentaire Σ_a est formé des polaires a' de la droite a' pour les cônes du second degré perspectifs à la cubique gauche C^3. Les tangentes x', y' aux points X, Y sont des positions particulières de la droite z' et les points X, Y sont les points unis de l'involution tracée sur la cubique gauche C^3 par les droites z'. Les directrices du système réglé Σ'_a ou les génératrices rectilignes du système réglé Σ_a passant par les points X, Y joignent ces points aux points X_1, Y_1 où les tangentes y', x' coupent respectivement les plans osculateurs ϖ_X, ϖ_Y. Les bisécantes z' rencontrent les droites XX_1, YY_1 en des points conjugués par rapport à la cubique gauche C^3. La bisécante a' est la droite conjuguée de l'intersection $a'' \equiv X_1Y_1$ des plans osculateurs ϖ_X, ϖ_Y dans l'espace focal ayant la cubique gauche C^3 pour courbe directrice.

94. Surface réglée du quatrième ordre S^4 ayant pour directrices la cubique gauche C^3, une bisécante a' et la biplanaire a'' intersection des plans osculateurs ϖ_X, ϖ_Y aux points X, Y, supposés différents l'un de l'autre, où la bisécante a' coupe la courbe.

La biplanaire a'' est donc la droite conjuguée de la bisécante a' dans l'espace focal ε ayant la cubique gauche C^3 comme courbe directrice.

1° 1) Soient A_0 le point correspondant à la bisécante a' dans le système plan ϖ; X_0, Y_0 les points de contact des tangentes menées du point A_0 à la conique C^2_0 ou les points correspondant aux tangentes x', y' aux points X, Y de la cubique gauche C^3; B_0, C_0 deux points distincts formant un groupe harmonique avec les points X_0, Y_0 sur la polaire $a_0 \equiv X_0Y_0$ du point A_0 pour la conique C^2_0; b', c' les bisécantes correspondant aux points B_0, C_0. Le triangle $A_0B_0C_0$ est un triangle polaire de la conique C^2_0; les points A_0, B_0, C_0 sont conjugués deux à deux pour la conique C^2_0 et les bisécantes a', b', c' sont conjuguées deux à deux pour la cubique gauche C^3. Les points B_0, C_0 sont conjugués dans une involution dont les points X_0, Y_0 sont les points unis sur la droite a_0; les bisécantes b', c' sont donc conjuguées dans une involution ayant les bisécantes x', y' comme éléments unis sur le système réglé Σ'_a des bisécantes conjuguées à la bisécante a'.

2) La conique C^2_0 ne passe par aucun des sommets du triangle $A_0B_0C_0$ et n'est tangente à aucun des côtés de ce triangle. Les bisécantes $a'\,b'\,c'$ sont gauches deux à deux et coupent la cubique gauche C^3 en des points différents X et Y, Z et T, U et V. Il existe des droites x_1 et y_1, z_1 et t_1, u_1 et v_1 issues de ces points dans les plans osculateurs correspondants ϖ_X et ϖ_Y, ϖ_Z et ϖ_T, ϖ_U et ϖ_V, qui s'appuient respectivement sur les bisécantes b' et c',

c' et a', a' et b' en des points formant sur chacune des trois bisécantes deux couples de points conjugués pour la cubique gauche C^3. Les droites x_1, y_1, z_1, t_1, u_1, v_1 sont des génératrices rectilignes d'un système réglé (Σ) dont les bisécantes a', b', c' sont des directrices ; comme elles appartiennent au complexe linéaire Γ_1 associé à l'espace focal ε ou à la cubique gauche C^3, la quadrique (Q) support du système réglé (Σ) est anallagmatique dans l'espace focal ε et a donc aussi pour génératrices rectilignes les trois biplanaires a", b", c" conjuguées des bisécantes a', b', c' dans l'espace focal ε et conjuguées deux à deux pour la cubique gauche C^3 et pour la congruence $G_{3,1}$ des biplanaires de cette courbe.

3) Les droites z_1, t_1 sont les directrices passant par les points Z, T du système réglé Σ'_b des bisécantes conjuguées à la bisécante b' ; la droite z_1 joint le point Z au point Z_1 où la tangente t' au point T de la cubique gauche C^3 rencontre le plan osculateur ϖ_Z ; la tangente t' étant dans le plan osculateur ϖ_T, le point Z_1 est sur la biplanaire b", intersection des plans osculateurs ϖ_Z, ϖ_T ; de même, la droite t_1 joint le point T au point T_1 où la tangente z' coupe la biplanaire b".

4) La quadrique Q_a support du système réglé Σ'_a des bisécantes b', c',..... conjuguées de la bisécante a', passant par la cubique gauche C^3, est tangente au point Z au plan ZTT_1 de la tangente z' et de la génératrice rectiligne b'. De même, elle est tangente au point T au plan ZTZ_1 et les droites z_2, t_2 joignant les points Z, T aux points $Z_2 \equiv t_1 b'$, $T_2 \equiv z_1 b'$, sont ses secondes génératrices rectilignes passant par les points Z, T. Les côtés du quadrilatère gauche ZTT_2Z_2 étant des génératrices rectilignes de la quadrique Q_a, chacune des droites $z_1 \equiv ZT_2$, $t_1 \equiv TZ_2$ est la polaire de l'autre pour cette quadrique. Comme les droites z_1, t_1 sont les seules droites passant par les points Z, T et s'appuyant sur les droites a', a", on en déduit que les génératrices rectilignes de la surface réglée S ayant la cubique gauche C^3 et les droites a', a" pour directrices, sont dans les plans osculateurs des points où elles rencontrent la cubique gauche ; celles dont les points d'appui sur cette courbe sont les extrémités d'une bisécante conjuguée à la bisécante a' sont des droites polaires pour la quadrique Q_a, support du système réglé Σ'_a des bisécantes conjuguées à la bisécante a'.

N.B. Les raisonnements précédents supposent la bisécante b' différente des tangentes x', y' aux points X, Y où la bisécante a' coupe la cubique gauche C^3. Quand la bisécante b' devient l'une de ces tangentes, par exemple la tangente x', les droites z_1, t_1 se confondent avec la droite x_1 qui est une génératrice rectiligne de la quadrique Q_a et sa propre polaire pour cette quadrique. La droite x_1 passant par le point X dans le plan ϖ_X, appartient au complexe linéaire Γ_1 associé à la cubique gauche C^3. 5) Les génératrices rectilignes x_1, y_1, z_1, t_1..... de la surface S appartenant au complexe linéaire Γ_1 étant ou des génératrices rectilignes de la quadrique Q_a ou deux par deux des droites polaires pour cette quadrique, la surface S est anallagmatique dans l'espace focal ε et dans la polarité ayant la quadrique Q_a pour quadrique directrice.

6) Les droites a', a" étant des droites polaires pour la quadrique Q_a, coupent les génératrices rectilignes z_1, t_1 de la quadrique (Q) en des points conjugués harmoniques par rapport aux points Z et T_2, T et Z_2 donc, les droites a', a", b', c' forment un quaterne harmonique de directrices du système réglé (Σ) de la quadrique (Q).

7) Deux génératrices rectilignes telles que les droites z_1, t_1 qui rencontrent la cubique gauche C^3 aux mêmes points Z, T que l'une, b', des bisécantes conjuguées à la bisécante a, sont les supports de ponctuelles projectives dont les points homologues sont conjugués pour la cubique gauche C^3 ; comme elles appartiennent au complexe linéaire Γ_1, l'espace focal ε transforme les ponctuelles projectives dont elles sont les supports, en feuillées projectives dont elles sont encore les supports et dont les feuillets homologues sont des plans conjugués pour la feuillée des plans osculateurs de la cubique gauche C^3 ou pour cette courbe elle-même.

8) Il passe trois plans osculateurs de la cubique gauche C^3 et par suite trois génératrices rectilignes de la surface S par tout point de la directrice a' de cette surface; ces génératrices sont dans un plan passant par la directrice a" et elles rencontrent la cubique gauche C^3 aux mêmes points que ce plan; les génératrices rectilignes, polaires des précédentes pour la quadrique Q_a, sont également dans un même plan passant par la droite a" et se coupent aussi en un même point de la droite a'; les deux plans passant ainsi par la droite a" sont conjugués pour la cubique gauche C^3, de même que les deux points définis sur la droite a'.

9) Un plan α mené arbitrairement par la bisécante a' recoupe la cubique gauche C^3 en un seul point M différent des points X, Y et n'a qu'un point commun N avec la bisécante a", il ne contient donc qu'une seule génératrice rectiligne de la surface S et lorsqu'il tourne autour de la droite a', les ponctuelles engendrées par le point M sur la cubique gauche C^3 et par le point N sur la biplanaire a" sont projectives. Les génératrices rectilignes de la surface S tracent donc des ponctuelles projectives sur la cubique gauche C^3 et sur la biplanaire a"; ces ponctuelles sont perspectives à la feuillée ayant la bisécante a' pour support.

10) La surface S est donc de quatrième ordre, et à cause de cela, sera désignée dans la suite par la notation S^4. En effet, la feuillée qui projette d'une droite quelconque x la ponctuelle tracée sur la biplanaire a" par la feuillée a' (α) est projective à la ponctuelle tracée par la même feuillée sur la cubique gauche C^3. Il existe donc quatre plans de la feuillée x qui passent, à la fois, par les points homologues des ponctuelles, considérées sur la droite a^4 et sur la cubique gauche C^3, ou quatre plans dont chacun contient une génératrice rectiligne de la surface S. Celle-ci coupe donc une droite quelconque en quatre points et est ainsi du quatrième ordre.
N.B. La propriété découle aussi de ce que la quadrique support du système réglé des droites s'appuyant sur les droites a', c", x a en commun avec la cubique gauche C^3 six points dont deux sont les points X, Y où la bisécante a' coupe la courbe.

11) L'espace focal ε transforme le système réglé Σ'_a des bisécantes conjuguées à la bisécante a' en un système réglé Σ''_a dont les génératrices rectilignes sont les biplanaires conjuguées de la biplanaire a", qui est tangent aux plans osculateurs de la cubique gauche C^3 et pour lequel les droites a', a" sont des droites polaires. La surface S^4, étant anallagmatique dans l'espace focal ε et dans la polarité ayant la quadrique support du système réglé Σ'_a pour quadrique directrice, est anallagmatique dans la polarité dont la quadrique directrice est la quadrique support du système réglé Σ''_a.

12) Considérons l'espace involutif gauche ε_a ayant les droites a', a" pour directrices. Les droites a', a", b', c' formant un quaterne harmonique de génératrices rectilignes d'une quadrique (Q), les droites b', c' sont conjuguées dans ε_a et le système réglé Σ'_a y est anallagmatique; propriété qui est aussi une conséquence de ce que les directrices a', a" de ε_a sont des droites polaires pour la quadrique Q_a support de Σ'_a. La surface S^4 et l'espace focal ε sont également anallagmatiques dans ε_3 et la cubique gauche C^3 a pour homologue une seconde cubique gauche C^3_a osculatrice comme la première aux plans ϖ_X, ϖ_Y aux points X, Y; les deux courbes et les droites a', a" forment l'intersection de la surface S^4 et de la quadrique Q_a; de plus, les deux courbes ont en commun le même système réglé Σ'_a des bisécantes conjuguées à la bisécante commune a' et on peut énoncer ce théorème: L'espace involutif gauche ε_a dont les directrices sont une bisécante a' de la cubique gauche C^3 et la biplanaire a", intersection des plans osculateurs ϖ_X, ϖ_Y aux points communs à la droite a' et à la courbe C^3, associe à la cubique gauche C^3 une autre cubique gauche C^3_a; les deux courbes sont des courbes directrices d'un même espace focal ε; elles sont projectives l'une à l'autre et perspectives à la feuillée a'; les droites joignant ces points homologues sont les génératrices

rectilignes d'une surface réglée du quatrième ordre S^4 et sont des intersections des plans osculateurs aux points où elles s'appuient sur les deux courbes ou joignent aussi les points où ces plans coupent les droites a', a''. Il existe un système réglé involutif Σ'_a formé de bisécantes communes aux deux courbes C^3, C^3_a et pour lequel les droites a', a'' sont des droites polaires. Chaque génératrice rectiligne de Σ'_a est conjuguée à la bisécante commune a' pour les deux courbes et coupe chacune de celles-ci en des points conjugués pour l'autre. Les deux courbes sont tangentes aux points X, Y sur la droite a' et ont en ces points les mêmes plans osculateurs ϖ_X, ϖ_Y.

13) Remarque. Toute quadrique menée par la cubique gauche C^3 est le support de deux systèmes réglés formés respectivement de bisécantes et d'unisécantes de la courbe. Les génératrices du premier système réglé tracent une involution sur la cubique gauche C^3 et sont conjuguées à la bisécante a' joignant les points unis de cette involution. Toute quadrique passant par la cubique gauche C^3 est donc assimilable à la quadrique Q_a considérée dans ce qui précède; elle contient ainsi une cubique gauche C^3_a et est associée à une surface réglée S^4, elle est déterminée par la bisécante a'. Mais une quadrique passant par une cubique gauche est aussi déterminée par la condition de passer par une unisécante issue d'un point particulier de la courbe; le nombre des quadriques passant par une cubique gauche est doublement infini comme celui des bisécantes de la courbe et comme celui des unisécantes issues d'un point particulier de la courbe; il en est de même du nombre des surfaces réglées S^4 passant par la courbe et du nombre des génératrices rectilignes de l'ensemble de ces surfaces; ces génératrices rectilignes sont les droites de la congruence du troisième ordre et de la troisième classe des unisécantes menées dans les plans osculateurs de la cubique gauche C^3.

Table des Matières.

Errata.

p. 6, l. 7 du bas, au lieu de x, x', il faut x', x.

p. 34, l. 9, au lieu de correspondent, il faut se correspondent.

p. 39, l. 11, au lieu de $-\sqrt{ab}$, il faut $-ab$.

p. 124, l. 6, au lieu de $-3tX_4$, il faut $+3tX_4$.

p. 126, l. 6, au lieu de enveloppent, il faut enveloppant.

p. 126, l. 25, au lieu de ou de bisécantes, il faut ou de droites.

p. 128, l. 6, il faut ajouter: construire la biplanaire dans un plan donné extérieur à la feuillée φ^3.

p. 128, l. 16 du bas, au lieu de $(3°, 4)$, il faut $(81, 3°, 4)$.

Complément aux errata du Tome III du Cours de Géométrie projective. —

Page 67, lignes 19, 20, 21, remplacer "un même plan, les droites . . . . deux à deux." par le texte suivant : un même plan ϖ ; le point P commun aux droites $A'B$, $B''C'$, $A''C$ serait dans le plan ϖ. Mais les plans $(A'B, A''C)$, $(A''C, B''C')$, $(B''C', A'B)$ sont tangents à la quadrique support du système réglé Σ aux points A, C'', B' ; le point P est le sommet du cône circonscrit à la quadrique suivant la conique d'intersection par le plan ϖ et il est absurde de dire que le point P est dans le plan ϖ.

Page 117, ligne 12 du bas, au lieu de (10), il faut (9).

Page 125, ligne 10, au lieu de "plans des feuillées", il faut "plans doubles des feuillées."

Page 125, ligne 11, au lieu de "les feuillées", il faut "des feuillets".

Page 137, ligne 1 du bas, au lieu de "$+ A_{13}(a_1 - a_4)$", il faut "$+ A_{23}(a_1 - a_4)$".

Page 138, ajouter après la ligne 2, "ou les équations

$$(22)\quad \begin{aligned} &A_{23} = (a_1 - a_3)u, \qquad A_{42} = -(a_1 - a_4)u, \qquad A_{13} = (a_1 - a_3)\theta v, \qquad A_{14} = (a_1 - a_4)v, \\ &A_{12} = \frac{1}{a_3 - a_4}(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)(1 - \theta)(u - v), \qquad A_{34} = \frac{-1}{u - v}(a_3 - a_4)uv, \end{aligned}$$

dans lesquelles u et v ont des valeurs arbitraires".

Page 140, ligne 7 du bas, au lieu de "$X_2 + 3t^2 X_4 = 0$", il faut "$X_2 + 3t^2 X_3 = 0$".

Page 141, ligne 5, au lieu de "$t_F = A_3 A_4$", il faut "$t_F = A_2 A_4$".

Page 150, ligne 10, au lieu de "C^3_d", il faut "C'^3" ; ligne 11, au lieu de "génératrices rectilignes distinctes ou confondues de la quadrique Q_1 ; ces génératrices rectilignes", il faut : "droites doubles distinctes ou confondues de l'involution gauche (d, d_1) ; ces droites doubles"

Page 155, ligne 18 du bas, au lieu de "notations", il faut "solutions".

Page 159, ligne 17, au lieu de "$Z_2 \equiv t_1 C'$, $T_2 \equiv z_1 C'$", il faut "$Z_2 \equiv t_1 c'$, $T_2 = z_1 c'$".

Page 160, ligne 10 du bas, au lieu de "ε'_3", il faut "ε".

